指数不等式クイズ(難)

1 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x-2^{x+1}-8=0$　　(2) $9^x-8\cdot3^x-9>0$

解答 (1) $x=2$　(2) $x>2$

解説

(1) 方程式を変形すると
$$(2^x)^2-2\cdot2^x-8=0$$
$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は
$$t^2-2t-8=0$$
よって　$(t+2)(t-4)=0$

$t>0$ であるから　$t=4$

ゆえに　$2^x=4$　すなわち　$2^x=2^2$

よって　$x=2$

(2) 不等式を変形すると
$$(3^x)^2-8\cdot3^x-9>0$$
$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は
$$t^2-8t-9>0$$
よって　$(t+1)(t-9)>0$

$t+1>0$ であるから　$t-9>0$　すなわち　$t>9$

ゆえに　$3^x>9$　すなわち　$3^x>3^2$

底 3 は 1 より大きいから　$x>2$

2 次の方程式，不等式を解け。

(1) $3^{2x}-3^{x+1}-54=0$　　(2) $2\cdot4^x-5\cdot2^x+2=0$

(3) $4^x-7\cdot2^x-8>0$　　(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$

解答 (1) $x=2$　(2) $x=1,\ -1$　(3) $x>3$　(4) $x>1$

解説

(1) 方程式を変形すると　$(3^x)^2-3\cdot3^x-54=0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-3t-54=0$

よって　$(t+6)(t-9)=0$

$t>0$ であるから　$t=9$

ゆえに　$3^x=9$　すなわち　$3^x=3^2$

よって　$x=2$

(2) 方程式を変形すると　$2\cdot(2^x)^2-5\cdot2^x+2=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$2t^2-5t+2=0$

よって　$(t-2)(2t-1)=0$

$t>0$ であるから　$t=2,\ \frac{1}{2}$

ゆえに　$2^x=2,\ \frac{1}{2}$　すなわち　$2^x=2^1,\ 2^{-1}$

よって　$x=1,\ -1$

(3) 不等式を変形すると　$(2^x)^2-7\cdot2^x-8>0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-7t-8>0$

よって　$(t+1)(t-8)>0$

$t+1>0$ であるから　$t-8>0$　すなわち　$t>8$

ゆえに　$2^x>8$　すなわち　$2^x>2^3$

底 2 は 1 より大きいから　$x>3$

(4) 不等式を変形すると　$3\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$3t^2+5t-2<0$

よって　$(t+2)(3t-1)<0$

$t+2>0$ であるから　$3t-1<0$　すなわち　$t<\frac{1}{3}$

ゆえに　$\left(\frac{1}{3}\right)^x<\frac{1}{3}$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^1$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x>1$

3 次の方程式，不等式を解け。[各 10 点]

(1) $2^{2x-1}=512$　　(2) $9^x+3^{x+1}>18$

解答 (1) $2^{2x-1}=512$ から　$2^{2x-1}=2^9$

よって　$2x-1=9$　ゆえに　$x=5$

(2) $9^x+3^{x+1}>18$ から　$(3^x)^2+3\cdot3^x-18>0$

よって　$(3^x+6)(3^x-3)>0$

$3^x+6>0$ であるから　$3^x-3>0$　すなわち　$3^x>3^1$

底 3 は 1 より大きいから　$x>1$

解説

(1) $2^{2x-1}=512$ から　$2^{2x-1}=2^9$

よって　$2x-1=9$　ゆえに　$x=5$

(2) $9^x+3^{x+1}>18$ から　$(3^x)^2+3\cdot3^x-18>0$

よって　$(3^x+6)(3^x-3)>0$

$3^x+6>0$ であるから　$3^x-3>0$　すなわち　$3^x>3^1$

底 3 は 1 より大きいから　$x>1$

4 次の方程式，不等式を解け。[各 15 点]

(1) $3^{2x-1}=\frac{1}{243}$　　(2) $16^x-2\cdot4^{x+1}<128$

解答 (1) $3^{2x-1}=\frac{1}{243}$ から　$3^{2x-1}=3^{-5}$

よって　$2x-1=-5$　ゆえに　$x=-2$

(2) $16^x-2\cdot4^{x+1}<128$ から　$(4^x)^2-8\cdot4^x-128<0$

よって　$(4^x+8)(4^x-16)<0$

$4^x+8>0$ であるから　$4^x-16<0$　すなわち　$4^x<4^2$

底 4 は 1 より大きいから　$x<2$

解説

(1) $3^{2x-1}=\frac{1}{243}$ から　$3^{2x-1}=3^{-5}$

よって　$2x-1=-5$　ゆえに　$x=-2$

(2) $16^x-2\cdot4^{x+1}<128$ から　$(4^x)^2-8\cdot4^x-128<0$

よって　$(4^x+8)(4^x-16)<0$

$4^x+8>0$ であるから　$4^x-16<0$　すなわち　$4^x<4^2$

底 4 は 1 より大きいから　$x<2$

5 次の不等式を解け。

(1) $9^x+3^x-12>0$　　(2) $4^x-2\cdot2^x-8\leqq0$

解答 (1) $x>1$　(2) $x\leqq2$

解説

(1) 不等式を変形すると　$(3^x)^2+3^x-12>0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は
$$t^2+t-12>0$$
$$(t-3)(t+4)>0$$
$t+4>0$ であるから　$t-3>0$　すなわち　$t>3$

よって　$3^x>3$　すなわち　$3^x>3^1$

底 3 は 1 より大きいから　$x>1$

(2) 不等式を変形すると　$(2^x)^2-2\cdot2^x-8\leqq0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は
$$t^2-2t-8\leqq0$$
$$(t+2)(t-4)\leqq0$$
$t+2>0$ であるから　$t-4\leqq0$　すなわち　$t\leqq4$

よって　$2^x\leqq4$　すなわち　$2^x\leqq2^2$

底 2 は 1 より大きいから　$x\leqq2$

6 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^{2x+1}-2^{x+3}-64=0$　　(2) $2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+7\left(\frac{1}{2}\right)^x-4>0$

解答 (1) $x=3$　(2) $x<1$

解説

(1) 方程式を変形すると　$2(2^x)^2-8\cdot2^x-64=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は
$$2t^2-8t-64=0$$
$$2(t+4)(t-8)=0$$
$t>0$ であるから　$t=8$

よって　$2^x=8$

すなわち　$2^x=2^3$

したがって　$x=3$

(2) 不等式を変形すると　$2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+7\left(\frac{1}{2}\right)^x-4>0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は
$$2t^2+7t-4>0$$
$$(t+4)(2t-1)>0$$
$t+4>0$ であるから　$2t-1>0$　すなわち　$t>\frac{1}{2}$

よって　$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{2}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x<1$

$\boxed{7}$ 次の不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$　(2) $3^{2x+1}+17\cdot 3^x-6<0$

解答　(1) $x>-3$　(2) $x<-1$

解説

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$ から　$2^{-x}<2^3$

底 2 は 1 より大きいから　$-x<3$　よって　$x>-3$

(2) $3^{2x+1}+17\cdot 3^x-6<0$ から　$3\cdot(3^x)^2+17\cdot 3^x-6<0$

よって　$(3^x+6)(3\cdot 3^x-1)<0$

$3^x+6>0$ であるから　$3\cdot 3^x-1<0$

ゆえに　$3^x<\frac{1}{3}$　すなわち　$3^x<3^{-1}$

底 3 は 1 より大きいから　$x<-1$

$\boxed{8}$ 次の不等式を解け。

(1) $3^{2x-1}>\left(\frac{1}{9}\right)^x$　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \leqq \frac{2^x}{8} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(3) $2^{2x}-2^{x+2}-32<0$　(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-9\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+32\leqq 0$

解答　(1) $x>\frac{1}{4}$　(2) $1\leqq x\leqq\frac{3}{2}$　(3) $x<3$　(4) $-4\leqq x\leqq -1$

解説

(1) $3^{2x-1}>\left(\frac{1}{9}\right)^x$ から　$3^{2x-1}>3^{-2x}$

底 3 は 1 より大きいから　$2x-1>-2x$　よって　$x>\frac{1}{4}$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \leqq \frac{2^x}{8} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x$ から　$2^{-2x}\leqq 2^{x-3}\leqq 2^{-x}$

底 2 は 1 より大きいから　$-2x\leqq x-3\leqq -x$

$-2x\leqq x-3$ から　$x\geqq 1$　……①,　$x-3\leqq -x$ から　$x\leqq\frac{3}{2}$　……②

①, ② の共通範囲を求めて　$1\leqq x\leqq\frac{3}{2}$

(3) $2^{2x}-2^{x+2}-32<0$ から　$(2^x)^2-4\cdot 2^x-32<0$

よって　$(2^x+4)(2^x-8)<0$

$2^x+4>0$ であるから　$2^x-8<0$

ゆえに　$2^x<8$　すなわち　$2^x<2^3$

底 2 は 1 より大きいから　$x<3$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-9\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+32\leqq 0$ から　$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-18\left(\frac{1}{2}\right)^x+32\leqq 0$

よって　$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-16\right\}\leqq 0$

ゆえに　$2\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq 16$　すなわち　$2^1\leqq 2^{-x}\leqq 2^4$

底 2 は 1 より大きいから　$1\leqq -x\leqq 4$

したがって　$-4\leqq x\leqq -1$

別解　［2 行目まで同じ］

$2\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq 16$ から　$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$-4\leqq x\leqq -1$

$\boxed{9}$ 次の不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1}$　(2) $2\cdot 4^x-17\cdot 2^x+8<0$　(3) $25^x-3\cdot 5^x-10\geqq 0$

解答　(1) $x<3$　(2) $-1<x<3$　(3) $x\geqq 1$

解説

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1}$ から　$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{4(x-1)}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$2x+2>4(x-1)$

これを解いて　$x<3$

(2) 与式から　$2\cdot(2^x)^2-17\cdot 2^x+8<0$

$2^x=X$ とおくと　$X>0$

不等式は　$2X^2-17X+8<0$

したがって　$(2X-1)(X-8)<0$

これを解いて　$\frac{1}{2}<X<8$　($X>0$ を満たす)

ゆえに　$\frac{1}{2}<2^x<8$　すなわち　$2^{-1}<2^x<2^3$

底 2 は 1 より大きいから　$-1<x<3$

(3) 与式から　$(5^x)^2-3\cdot 5^x-10\geqq 0$

$5^x=X$ とおくと　$X>0$

不等式は　$X^2-3X-10\geqq 0$

したがって　$(X+2)(X-5)\geqq 0$

$X+2>0$ であるから　$X-5\geqq 0$　すなわち　$X\geqq 5$

ゆえに　$5^x\geqq 5$　底 5 は 1 より大きいから　$x\geqq 1$

$\boxed{10}$ 次の不等式を解け。

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<9$　(2) $2^{4x}-4^{x+1}>0$　(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-9\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+32\leqq 0$

解答　(1) $-2<x<\frac{1}{2}$　(2) $x>1$　(3) $-4\leqq x\leqq -1$

解説

(1) 与式から　$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$-2<x<\frac{1}{2}$

(2) 与式から　$(4^x)^2-4\cdot 4^x>0$

$4^x=X$ とおくと　$X>0$　不等式は　$X^2-4X>0$

したがって　$X(X-4)>0$

$X>0$ であるから　$X-4>0$　すなわち　$X>4$

ゆえに　$4^x>4$　底 4 は 1 より大きいから　$x>1$

(3) 与式から　$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-18\left(\frac{1}{2}\right)^x+32\leqq 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=X$ とおくと　$X>0$　不等式は　$X^2-18X+32\leqq 0$

したがって　$(X-2)(X-16)\leqq 0$

ゆえに　$2\leqq X\leqq 16$　($X>0$ を満たす)

よって　$2\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq 16$　すなわち　$2^1\leqq 2^{-x}\leqq 2^4$

底 2 は 1 より大きいから　$1\leqq -x\leqq 4$

各辺に -1 を掛けて　$-4\leqq x\leqq -1$

$\boxed{11}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x+2^{x+1}-24=0$　(2) $10^{2x}+10^x=2$

(3) $9^{x+1}-28\cdot 3^x+3=0$　(4) $16^x-3\cdot 4^x-4\geqq 0$

(5) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-\frac{1}{3^x}-6<0$　(6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}-9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2>0$

解答　(1) $x=2$　(2) $x=0$　(3) $x=1,\ -2$　(4) $x\geqq 1$　(5) $x>-1$
(6) $x<-1,\ 2<x$

解説

(1) 方程式を変形すると　$(2^x)^2+2\cdot 2^x-24=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2+2t-24=0$

よって　$(t-4)(t+6)=0$

$t>0$ であるから　$t=4$

ゆえに　$2^x=4$　すなわち　$2^x=2^2$

したがって　$x=2$

(2) 方程式を変形すると　$(10^x)^2+10^x-2=0$

$10^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2+t-2=0$

よって　$(t-1)(t+2)=0$

$t>0$ であるから　$t=1$

ゆえに　$10^x=1$　すなわち　$10^x=10^0$

したがって　$x=0$

(3) 方程式を変形すると　$9\cdot(3^x)^2-28\cdot 3^x+3=0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$9t^2-28t+3=0$

よって　$(t-3)(9t-1)=0$

$t>0$ であるから　$t=3,\ \frac{1}{9}$

ゆえに　$3^x=3,\ \frac{1}{9}$　すなわち　$3^x=3^1,\ 3^{-2}$

したがって　$x=1,\ -2$

(4) 不等式を変形すると　$(4^x)^2-3\cdot 4^x-4\geqq 0$

$4^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-3t-4\geqq 0$

よって　$(t+1)(t-4)\geqq 0$

$t+1>0$ であるから　$t-4\geqq 0$　すなわち　$t\geqq 4$

ゆえに　$4^x\geqq 4$　すなわち　$4^x\geqq 4^1$

底 4 は 1 より大きいから　$x \geqq 1$

(5)　不等式を変形すると　$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-\left(\frac{1}{3}\right)^x-6<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-t-6<0$

よって　$(t+2)(t-3)<0$

$t+2>0$ であるから　$t-3<0$　すなわち　$t<3$

ゆえに　$\left(\frac{1}{3}\right)^x<3$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x>-1$

(6)　不等式を変形すると　$4\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2>0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$4t^2-9t+2>0$

よって　$(t-2)(4t-1)>0$

これを解くと　$t<\frac{1}{4}$，$2<t$

ゆえに　$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{4}$，$2<\left(\frac{1}{2}\right)^x$　すなわち　$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^2$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^x$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x<-1$，$2<x$

$\boxed{12}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$4^{2x}+4^{x+1}-12=0$　　(2)　$25^x-4\cdot5^x=5$

(3)　$9^x+2\cdot3^x-15>0$　　(4)　$\frac{1}{4^x}-3\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq4$

解答　(1)　$x=\frac{1}{2}$　(2)　$x=1$　(3)　$x>1$　(4)　$x\geqq-2$

解説

(1)　方程式を変形すると　$(4^x)^2+4\cdot4^x-12=0$

$4^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2+4t-12=0$

よって　$(t+6)(t-2)=0$

$t>0$ であるから　$t=2$　すなわち　$4^x=2$

ゆえに　$2^{2x}=2^1$　よって　$2x=1$

したがって　$x=\frac{1}{2}$

(2)　方程式を変形すると　$(5^x)^2-4\cdot5^x-5=0$

$5^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-4t-5=0$

よって　$(t+1)(t-5)=0$　$t>0$ であるから　$t=5$

すなわち　$5^x=5^1$　したがって　$x=1$

(3)　不等式を変形すると　$(3^x)^2+2\cdot3^x-15>0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2+2t-15>0$

よって　$(t+5)(t-3)>0$

$t+5>0$ であるから　$t-3>0$　ゆえに　$t>3$

すなわち　$3^x>3^1$　底 3 は 1 より大きいから　$x>1$

(4)　$\frac{1}{4^x}=2^{-2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

よって，不等式を変形すると　$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-4\leqq0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-3t-4\leqq0$

よって　$(t+1)(t-4)\leqq0$

$t+1>0$ であるから　$t-4\leqq0$　ゆえに　$t\leqq4$

すなわち　$\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq4$　よって　$\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\geqq-2$

$\boxed{13}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$4^x-5\cdot2^{x+2}+64=0$　　(2)　$2^x-24\cdot2^{-x}=5$

(3)　$\frac{1}{4^x}\geqq\frac{3}{2^x}-2$　　(4)　$3^{2x+1}-4\cdot3^x+1<0$

解答　(1)　$x=2,\ 4$　(2)　$x=3$　(3)　$x\leqq-1,\ 0\leqq x$　(4)　$-1<x<0$

解説

(1)　方程式を変形すると　$(2^x)^2-20\cdot2^x+64=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-20t+64=0$

よって　$(t-4)(t-16)=0$

したがって　$t=4,\ 16$　（これは $t>0$ を満たす）

ゆえに　$2^x=4$，$2^x=16$

すなわち　$2^x=2^2$，$2^x=2^4$

よって　$x=2,\ 4$

(2)　方程式の両辺に 2^x を掛けると　$(2^x)^2-24=5\cdot2^x$

ゆえに　$(2^x)^2-5\cdot2^x-24=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-5t-24=0$

よって　$(t+3)(t-8)=0$

$t>0$ であるから　$t=8$

ゆえに　$2^x=8$　すなわち　$2^x=2^3$

したがって　$x=3$

(3)　不等式を変形すると　$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2\geqq3\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$

ゆえに　$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-3\left(\frac{1}{2}\right)^x+2\geqq0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-3t+2\geqq0$

よって　$(t-1)(t-2)\geqq0$

ゆえに　$t\leqq1$，$2\leqq t$

したがって　$\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq1$，$2\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^x$

すなわち　$\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^0$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^x$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\leqq-1$，$0\leqq x$

(4)　不等式を変形すると　$3\cdot(3^x)^2-4\cdot3^x+1<0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$3t^2-4t+1<0$

よって　$(t-1)(3t-1)<0$

ゆえに　$\frac{1}{3}<t<1$

したがって　$\frac{1}{3}<3^x<1$

すなわち　$3^{-1}<3^x<3^0$

底 3 は 1 より大きいから　$-1<x<0$

$\boxed{14}$ 不等式 $\frac{1}{9^x}-\frac{6}{3^x}-27>0$ を満たす x の値の範囲は，$x<\boxed{\quad}$ である。

解答　-2

解説

不等式から　$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-6\left(\frac{1}{3}\right)^x-27>0$

ゆえに　$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\right\}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x-9\right\}>0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x>0$ より $\left(\frac{1}{3}\right)^x+3>0$ であるから

$\left(\frac{1}{3}\right)^x-9>0$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x>9$

よって　$3^{-x}>3^2$

底 3 は 1 より大きいから

$-x>2$　すなわち　$x<-2$

別解　$\left(\frac{1}{3}\right)^x>9$ から　$\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x<-2$

$\boxed{15}$ $2\cdot2^x+2^{2-x}>9$ を満たす x の範囲は，$\boxed{\quad}$ である。

解答　$x<-1$，$2<x$

解説

不等式から　$2\cdot2^x+4\cdot2^{-x}>9$

$2^x=t$ とおくと　$t>0$

不等式は　$2t+\frac{4}{t}>9$

よって　$2t^2-9t+4>0$　すなわち　$(2t-1)(t-4)>0$

ゆえに　$0<t<\frac{1}{2}$，$4<t$　よって　$0<2^x<\frac{1}{2}$，$4<2^x$

したがって　$x<-1$，$2<x$

$\boxed{16}$ 不等式 $\left(\frac{1}{8}\right)^x\leqq7\left(\frac{1}{2}\right)^x-6$ を満たす実数 x の範囲を不等式で表すと $\boxed{\quad}$ である。

解答　$-1\leqq x\leqq0$

解説

不等式から　$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^3\leqq7\left(\frac{1}{2}\right)^x-6$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと　$t>0$

不等式は　$t^3\leqq7t-6$　よって　$t^3-7t+6\leqq0$

左辺を因数分解する。 $P(t)=t^3-7t+6$ とすると， $P(1)=1-7+6=0$

よって $P(t)$ は $t-1$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r|l} & \;\; t^2 \;+t\;-6 \\ \hline t-1 & t^3 \qquad -7t+6 \\ & t^3-t^2 \\ \hline & \quad t^2-7t \\ & \quad t^2-t \\ \hline & \qquad -6t+6 \\ & \qquad -6t+6 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$P(t)$ を $t-1$ で割ると商が t^2+t-6 となるので

$P(t)=(t-1)(t^2+t-6)=(t-1)(t+3)(t-2)$

ゆえに

$(t-1)(t+3)(t-2)\leqq 0$

ここで，$t>0$ より，$t+3>0$ であるから　$(t-1)(t-2)\leqq 0$

ゆえに　$1\leqq t\leqq 2$　　すなわち　$1\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq 2$

したがって　$-1\leqq x\leqq 0$

17 不等式 $2^{-2(3x+1)}-5\times 2^{-3x}+16<0$ を解け。

解答　$-\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}$

解説

$2^{-3x}=X$ とおくと，$X>0$ であり　$2^{-2(3x+1)}=(2^{-3x})^2\times 2^{-2}=\frac{1}{4}X^2$

よって，不等式は　$\frac{1}{4}X^2-5X+16<0$

整理すると　$(X-4)(X-16)<0$

これを解くと　$4<X<16$　　これは，$X>0$ を満たす。

よって　$2^2<2^{-3x}<2^4$

底 2 は 1 より大きいから　$2<-3x<4$

ゆえに　$-\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}$

18 $a>0$，$a\neq 1$ とする。x の不等式 $a^x+a^{1-x}<1+a$ を解け。

解答　$0<x<1$

解説

$a^x>0$ であるから，$a^x+a^{1-x}<1+a$ の両辺に a^x を掛けると　$(a^x)^2+a<(1+a)a^x$

すなわち　$(a^x)^2-(1+a)a^x+a<0$　　よって　$(a^x-1)(a^x-a)<0$　……①

[1]　$a>1$ のとき

①から　$1<a^x<a$　　底 a が 1 より大きいから　$0<x<1$

[2]　$0<a<1$ のとき

①から　$a<a^x<1$　　底 a が 1 より小さいから　$0<x<1$

[1]，[2] から　$0<x<1$

19 次の不等式を解け。ただし，a は 1 と異なる正の定数とする。

(1)　$\log_a(x^2-2x-8)\geqq\log_a(2x-3)$

(2)　$a^{2x+1}-a^{x+2}-a^{x-1}+1<0$

解答　(1)　$0<a<1$ のとき $4<x\leqq 5$，　$a>1$ のとき $x\geqq 5$

(2)　$-2<x<1$

解説

(1)　真数は正であるから　$x^2-2x-8>0$ かつ $2x-3>0$

よって　$(x+2)(x-4)>0$ かつ $x>\frac{3}{2}$　　ゆえに　$x>4$　……①

[1]　$0<a<1$ のとき

不等式から　$x^2-2x-8\leqq 2x-3$　　整理して　$x^2-4x-5\leqq 0$

よって　$(x+1)(x-5)\leqq 0$　　ゆえに　$-1\leqq x\leqq 5$　……②

①，② から，解は　$4<x\leqq 5$

[2]　$a>1$ のとき

不等式から　$x^2-2x-8\geqq 2x-3$　　よって　$(x+1)(x-5)\geqq 0$

ゆえに　$x\leqq -1$，$5\leqq x$　……③

①，③ から，解は　$x\geqq 5$

(2)　不等式から　$a\cdot a^{2x}-a^2a^x-\frac{1}{a}a^x+1<0$

$a^x=t$ とおくと　$at^2-a^2t-\frac{1}{a}t+1<0$

両辺に $a\,(>0)$ を掛けて　$a^2t^2-(a^3+1)t+a<0$

よって　$(t-a)(a^2t-1)<0$

$$\begin{array}{lcrcr} 1 & \times & -a & \longrightarrow & -a^3 \\ a^2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline a^2 & & a & & -(a^3+1) \end{array}$$

ゆえに　$a^2(t-a)\left(t-\frac{1}{a^2}\right)<0$

$a^2>0$ であるから　$(t-a)\left(t-\frac{1}{a^2}\right)<0$　……①

ここで　$a-\frac{1}{a^2}=\frac{a^3-1}{a^2}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2}$

[1]　$0<a<1$ のとき

$a<\frac{1}{a^2}$ であるから，① の解は　$a<t<\frac{1}{a^2}$　　よって　$a<a^x<a^{-2}$

底 a は 1 より小さいから　$-2<x<1$

[2]　$a>1$ のとき

$a>\frac{1}{a^2}$ であるから，① の解は　$\frac{1}{a^2}<t<a$　　よって　$a^{-2}<a^x<a$

底 a は 1 より大きいから　$-2<x<1$

したがって，解は　$-2<x<1$