

指数不等式クイズ

[1] 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) 9^x = 27$$

$$(2) 2^{x-1} \leq 8$$

$$(3) \left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

解答 (1) $x = \frac{3}{2}$ (2) $x \leq 4$ (3) $x < 1$

(解説)

$$(1) \text{ 方程式を変形すると } 3^{2x} = 3^3 \\ \text{ よって } 2x = 3$$

$$\text{これを解いて } x = \frac{3}{2}$$

$$(2) \text{ 不等式を変形すると } 2^{x-1} \leq 2^3$$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } x - 1 \leq 3$$

$$\text{これを解いて } x \leq 4$$

$$(3) \text{ 不等式を変形すると } \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

$$\text{底 } \frac{1}{2} \text{ は } 1 \text{ より小さいから } 2x < x + 1$$

$$\text{これを解いて } x < 1$$

[2] 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) 8^x = 4$$

$$(2) 3^{2x-1} = 243$$

$$(3) 25^x = 5^{3-x}$$

$$(4) 2^x - 32 < 0$$

$$(5) \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leq \frac{1}{16}$$

$$(6) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{81}\right)^x$$

解答 (1) $x = \frac{2}{3}$ (2) $x = 3$ (3) $x = 1$ (4) $x < 5$ (5) $x \geq 5$ (6) $x > \frac{1}{2}$

(解説)

$$(1) \text{ 方程式を変形すると } 2^{3x} = 2^2 \quad \text{ よって } 3x = 2$$

$$\text{これを解いて } x = \frac{2}{3}$$

$$(2) \text{ 方程式を変形すると } 3^{2x-1} = 3^5 \quad \text{ よって } 2x - 1 = 5$$

$$\text{これを解いて } x = 3$$

$$(3) \text{ 方程式を変形すると } 5^{2x} = 5^{3-x} \quad \text{ よって } 2x = 3 - x$$

$$\text{これを解いて } x = 1$$

$$(4) \text{ 不等式を変形すると } 2^x < 2^5$$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } x < 5$$

$$(5) \text{ 不等式を変形すると } \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\text{底 } \frac{1}{2} \text{ は } 1 \text{ より小さいから } x - 1 \geq 4$$

$$\text{これを解いて } x \geq 5$$

$$(6) \text{ 不等式を変形すると } \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$$

$$\text{底 } \frac{1}{3} \text{ は } 1 \text{ より小さいから } 2x + 1 < 4x$$

$$\text{これを解いて } x > \frac{1}{2}$$

[3] 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) 8^{2x} = 16$$

$$(2) 27^x = 3^{4-x}$$

$$(3) \sqrt{3^x} \geq 3^{x+2}$$

$$(4) \left(\frac{1}{16}\right)^x < 2^{x+5}$$

$$(5) 9^x - 3^x = 6$$

$$(6) 2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 > 0$$

解答 (1) $x = \frac{2}{3}$ (2) $x = 1$ (3) $x \leq -4$ (4) $x > -1$ (5) $x = 1$

(6) $x < -1, 2 < x$

(解説)

$$(1) (2^3)^{2x} = 2^4 \text{ から } 2^{6x} = 2^4$$

$$\text{よって } 6x = 4 \quad \text{ ゆえに } x = \frac{2}{3}$$

$$(2) 3^{3x} = 3^{4-x} \text{ から } 3x = 4 - x \quad \text{これを解いて } x = 1$$

$$(3) 3^{\frac{x}{2}} \geq 3^{x+2}$$

$$\text{底 } 3 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } \frac{x}{2} \geq x + 2 \quad \text{ すなわち } x \geq 2x + 4$$

$$\text{これを解いて } x \leq -4$$

$$(4) (2^{-4})^x < 2^{x+5} \quad \text{ すなわち } 2^{-4x} < 2^{x+5}$$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } -4x < x + 5$$

$$\text{これを解いて } x > -1$$

$$(5) \text{ 方程式を変形すると } (3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$$

$$3^x = t \text{ とおくと } t^2 - t - 6 = 0$$

$$\text{因数分解して } (t+2)(t-3) = 0$$

$$t > 0 \text{ であるから } t = 3$$

$$\text{すなわち } 3^x = 3$$

$$\text{よって } x = 1$$

$$(6) \text{ 不等式を変形すると } 2 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 4 > 0$$

$$2^x = t \text{ とおくと } 2t^2 - 9t + 4 > 0$$

$$\text{因数分解して } (t-4)(2t-1) > 0$$

$$\text{これを解くと } t < \frac{1}{2}, \quad 4 < t$$

$$\text{ゆえに } 2^x < \frac{1}{2}, \quad 4 < 2^x$$

$$\text{すなわち } 2^x < 2^{-1}, \quad 2^2 < 2^x$$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } x < -1, \quad 2 < x$$

[4] 次の不等式を解け。

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$$

$$(2) 3^{2x+1} + 17 \cdot 3^x - 6 < 0$$

解答 (1) $x > -3$ (2) $x < -1$

(解説)

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^x < 8 \text{ から } 2^{-x} < 2^3$$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } -x < 3 \quad \text{ よって } x > -3$$

$$(2) 3^{2x+1} + 17 \cdot 3^x - 6 < 0 \text{ から } 3 \cdot (3^x)^2 + 17 \cdot 3^x - 6 < 0$$

$$\text{よって } (3^x + 6)(3 \cdot 3^x - 1) < 0$$

$3^x + 6 > 0$ であるから $3 \cdot 3^x - 1 < 0$

ゆえに $3^x < \frac{1}{3}$ すなわち $3^x < 3^{-1}$

底 3 は 1 より大きいから $x < -1$

[5] 次の不等式を解け。

$$(1) 3^{2x-1} > \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \leq \frac{2^x}{8} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$(3) 2^{2x} - 2^{x+2} - 32 < 0$$

$$(4) \left(\frac{1}{4}\right)^x - 9\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 32 \leq 0$$

解答 (1) $x > \frac{1}{4}$ (2) $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (3) $x < 3$ (4) $-4 \leq x \leq -1$

(解説)

$$(1) 3^{2x-1} > \left(\frac{1}{9}\right)^x \text{ から } 3^{2x-1} > 3^{-2x}$$

$$\text{底 } 3 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } 2x - 1 > -2x \quad \text{ よって } x > \frac{1}{4}$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \leq \frac{2^x}{8} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ から } 2^{-2x} \leq 2^{x-3} \leq 2^{-x}$$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } -2x \leq x - 3 \leq -x$$

$$-2x \leq x - 3 \text{ から } x \geq 1 \quad \dots \dots \text{ ①}, \quad x - 3 \leq -x \text{ から } x \leq \frac{3}{2} \quad \dots \dots \text{ ②}$$

$$\text{①, ② の共通範囲を求めて } 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$(3) 2^{2x} - 2^{x+2} - 32 < 0 \text{ から } (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 < 0$$

$$\text{よって } (2^x + 4)(2^x - 8) < 0$$

$$2^x + 4 > 0 \text{ であるから } 2^x - 8 < 0$$

$$\text{ゆえに } 2^x < 8 \text{ すなわち } 2^x < 2^3$$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } x < 3$$

$$(4) \left(\frac{1}{4}\right)^x - 9\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 32 \leq 0 \text{ から } \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 18\left(\frac{1}{2}\right)^x + 32 \leq 0$$

$$\text{よって } \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right\} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 16\right\} \leq 0$$

$$\text{ゆえに } 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 16 \text{ すなわち } 2^1 \leq 2^{-x} \leq 2^4$$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } 1 \leq -x \leq 4$$

$$\text{したがって } -4 \leq x \leq -1$$

[別解] [2 行目まで同じ]

$$2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 16 \text{ から } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\text{底 } \frac{1}{2} \text{ は } 1 \text{ より小さいから } -4 \leq x \leq -1$$

[6] 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) 2^x = 64$$

$$(2) 27^x = \frac{1}{9}$$

$$(3) \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{64}$$

$$(4) \left(\frac{1}{8}\right)^x = 16$$

$$(5) 2^x > 64$$

$$(6) 27^x \leq \frac{1}{81}$$

$$(7) \left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{64}$$

$$(8) \left(\frac{1}{9}\right)^x \geq 27$$

〔解答〕 (1) $x=6$ (2) $x=-\frac{2}{3}$ (3) $x=3$ (4) $x=-\frac{4}{3}$ (5) $x>6$

(6) $x \leq -\frac{4}{3}$ (7) $x>3$ (8) $x \leq -\frac{3}{2}$

〔解説〕

(1) $2^x=64$ から $2^x=2^6$ よって $x=6$

(2) $27^x=\frac{1}{9}$ から $3^{3x}=3^{-2}$

よって $3x=-2$ ゆえに $x=-\frac{2}{3}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ から $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^3$

よって $x=3$

(4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x=16$ から $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

よって $3x=-4$ ゆえに $x=-\frac{4}{3}$

〔別解〕 $\left(\frac{1}{8}\right)^x=16$ から $2^{-3x}=2^4$

よって $-3x=4$ ゆえに $x=-\frac{4}{3}$

(5) $2^x>64$ から $2^x>2^6$

底2は1より大きいから $x>6$

(6) $27^x \leq \frac{1}{81}$ から $3^{3x} \leq 3^{-4}$

底3は1より大きいから $3x \leq -4$

よって $x \leq -\frac{4}{3}$

(7) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{64}$ から $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^3$

底 $\frac{1}{4}$ は1より小さいから $x>3$

(8) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \geq 27$ から $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $2x \leq -3$

よって $x \leq -\frac{3}{2}$

〔別解〕 $\left(\frac{1}{9}\right)^x \geq 27$ から $3^{-2x} \geq 3^3$

底3は1より大きいから $-2x \geq 3$

よって $x \leq -\frac{3}{2}$

〔7〕 次の方程式、不等式を解け。

(1) $2^{3x-2}=128$

(2) $125^{x-1}=\left(\frac{1}{25}\right)^{x-6}$

(3) $3^{x-2}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

(4) $243^x < 3^{2x+3}$

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\frac{1}{8}\right)^x$

(6) $(0.2)^{2x-1} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

〔解答〕 (1) $x=3$ (2) $x=3$ (3) $x=\frac{1}{2}$ (4) $x<1$ (5) $x<-2$

(6) $x \leq \frac{5}{6}$

〔解説〕

(1) $2^{3x-2}=128$ から $2^{3x-2}=2^7$

よって $3x-2=7$

これを解いて $x=3$

(2) $125^{x-1}=\left(\frac{1}{25}\right)^{x-6}$ から $5^{3(x-1)}=5^{-2(x-6)}$

よって $3(x-1)=-2(x-6)$

これを解いて $x=3$

(3) $3^{x-2}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ から $3^{x-2}=3^{-\frac{3}{2}}$

よって $x-2=-\frac{3}{2}$

これを解いて $x=\frac{1}{2}$

(4) $243^x < 3^{2x+3}$ から $3^{5x} < 3^{2x+3}$

底3は1より大きいから $5x < 2x+3$

これを解いて $x < 1$

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\frac{1}{8}\right)^x$ から $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $5x+4 < 3x$

これを解いて $x < -2$

(6) $(0.2)^{2x-1} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ から $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

よって $5^{-(2x-1)} \geq 5^{-\frac{2}{3}}$

底5は1より大きいから $-(2x-1) \geq -\frac{2}{3}$

これを解いて $x \leq \frac{5}{6}$

〔8〕 次の方程式、不等式を解け。

(1) $2^x=64$ (2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ (3) $2^{2x+1}=32$ (4) $4^{2x-1}=2^{3x-5}$

(5) $3^x < 27$ (6) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \frac{1}{81}$ (7) $5^{2x-1} > \frac{1}{125}$ (8) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leq 2^{x+2}$

〔解答〕 (1) $x=6$ (2) $x=3$ (3) $x=2$ (4) $x=-3$

(5) $x < 3$ (6) $x \geq 2$ (7) $x > -1$ (8) $x \geq -\frac{2}{3}$

〔解説〕

(1) $2^x=64$ から $2^x=2^6$ よって $x=6$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ から $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^3$ よって $x=3$

〔別解〕 $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ から $4^{-x}=4^{-3}$

よって $-x=-3$ ゆえに $x=3$

(3) $2^{2x+1}=32$ から $2^{2x+1}=2^5$

よって $2x+1=5$ ゆえに $x=2$

(4) $4^{2x-1}=2^{3x-5}$ から $2^{2(2x-1)}=2^{3x-5}$

よって $2(2x-1)=3x-5$ ゆえに $x=-3$

(5) $3^x < 27$ から $3^x < 3^3$ 底3は1より大きいから $x < 3$

(6) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \frac{1}{81}$ から $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \left(\frac{1}{9}\right)^2$

底 $\frac{1}{9}$ は1より小さいから $x \geq 2$

〔別解〕 $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \frac{1}{81}$ から $9^{-x} \leq 9^{-2}$

底9は1より大きいから $-x \leq -2$ よって $x \geq 2$

(7) $5^{2x-1} > \frac{1}{125}$ から $5^{2x-1} > 5^{-3}$

底5は1より大きいから $2x-1 > -3$ よって $x > -1$

(8) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leq 2^{x+2}$ から $2^{-2x} \leq 2^{x+2}$

底2は1より大きいから $-2x \leq x+2$ よって $x \geq -\frac{2}{3}$

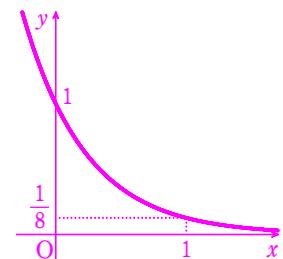
〔9〕 (1) 関数 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ のグラフをかけ。

(2) 次の方程式、不等式を解け。

(ア) $2^x=\sqrt[3]{16}$ (イ) $(0.5)^{2x-1} < \sqrt[4]{32}$

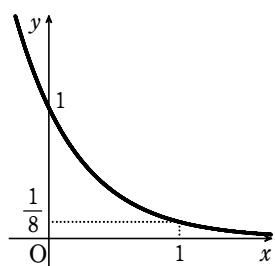
〔解答〕 (1) [図]

(2) (ア) $x=\frac{4}{3}$ (イ) $x > -\frac{1}{8}$



〔解説〕

(1) [図]



(2) (ア) 方程式を変形すると $2^x=2^{\frac{4}{3}}$ よって $x=\frac{4}{3}$

(イ) $(0.5)^{2x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}=2^{-(2x-1)}, \sqrt[4]{32}=2^{\frac{5}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$ であるから,

不等式は $2^{-2x+1} < 2^{\frac{5}{4}}$

底2は1より大きいから $-2x+1 < \frac{5}{4}$ これを解いて $x > -\frac{1}{8}$

10 次の方程式、不等式を解け。

(1) $4^x = 64$ (2) $25^x = \frac{1}{125}$

(3) $8^{2x+3} = 2^{3x+5}$ (4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

(5) $2^x < 32$ (6) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \frac{1}{8}$ (7) $9^{x+1} < 243^x$ (8) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2x-1} \geq 6^{x+3}$

解答 (1) $x=3$ (2) $x=-\frac{3}{2}$ (3) $x=-\frac{4}{3}$ (4) $x=\frac{2}{3}$ (5) $x < 5$

(6) $x \leq \frac{3}{2}$ (7) $x > \frac{2}{3}$ (8) $x \leq -\frac{1}{5}$

解説

(1) 方程式を変形すると $4^x = 4^3$

よって $x=3$

(2) 方程式を変形すると $5^{2x} = 5^{-3}$

よって $2x = -3$

したがって $x = -\frac{3}{2}$

(3) 方程式を変形すると $2^{3(2x+3)} = 2^{3x+5}$

よって $3(2x+3) = 3x+5$

これを解いて $x = -\frac{4}{3}$

(4) 方程式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2(3x-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$

よって $2(3x-1) = 3x$

これを解いて $x = \frac{2}{3}$

(5) 不等式を変形すると $2^x < 2^5$

底2は1より大きいから $x < 5$

(6) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $2x \leq 3$

よって $x \leq \frac{3}{2}$

(7) 不等式を変形すると $3^{2(x+1)} < 3^{5x}$

底3は1より大きいから $2(x+1) < 5x$

これを解いて $x > \frac{2}{3}$

(8) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{6}\right)^{2(2x-1)} \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{-(x+3)}$

底 $\frac{1}{6}$ は1より小さいから $2(2x-1) \leq -(x+3)$

これを解いて $x \leq -\frac{1}{5}$

別解 不等式を変形すると $6^{-2(2x-1)} \geq 6^{x+3}$

底6は1より大きいから $-2(2x-1) \geq x+3$

これを解いて $x \leq -\frac{1}{5}$

11 次の方程式、不等式を解け。

(1) $2^x = \sqrt[3]{16}$

(2) $\frac{1}{5} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x \leq 1$

解答 (1) $x = \frac{4}{3}$ (2) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

解説

(1) 方程式を変形すると $2^x = 2^{\frac{4}{3}}$

よって $x = \frac{4}{3}$

(2) 不等式から $\left(\frac{1}{5}\right)^1 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^0$

底 $\frac{1}{5}$ は1より小さいから $0 \leq 2x \leq 1$

よって $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

12 次の不等式を解け。

(1) $2^x < 16$

(2) $3^x > \frac{1}{27}$

(3) $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 27$

(4) $5^{x-2} \leq 125$

(5) $3^{2-x} > 9^x$

(6) $\left(\frac{1}{8}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

解答 (1) $x < 4$ (2) $x > -3$ (3) $x > -\frac{3}{2}$ (4) $x \leq 5$ (5) $x < \frac{2}{3}$

(6) $x \geq \frac{1}{2}$

解説

(1) 不等式を変形すると $2^x < 2^4$

底2は1より大きいから $x < 4$

(2) 不等式を変形すると $3^x > 3^{-3}$

底3は1より大きいから $x > -3$

(3) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $2x > -3$

これを解いて $x > -\frac{3}{2}$

(4) 不等式を変形すると $5^{x-2} \leq 5^3$

底5は1より大きいから $x-2 \leq 3$

これを解いて $x \leq 5$

(5) 不等式を変形すると $3^{2-x} > 3^{2x}$

底3は1より大きいから $2-x > 2x$

これを解いて $x < \frac{2}{3}$

(6) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $3x \geq x+1$

これを解いて $x \geq \frac{1}{2}$

(5) $2^x < 32$

(6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \frac{1}{243}$

(7) $243^x < 3^{2x+3}$

(8) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2^{x-3}$

(9) $x=3$

(10) $x=-\frac{3}{2}$

(11) $x=-\frac{4}{3}$

(12) $x=\frac{2}{3}$

(13) $x < 5$

解説

(1) 方程式を変形すると $4^x = 4^3$

よって $x=3$

(2) 方程式を変形すると $5^{2x} = 5^{-3}$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $x=-\frac{3}{2}$

よって $x=-\frac{3}{2}$

(3) 方程式を変形すると $2^{3(2x+3)} = 2^{3x+5}$

底3は1より大きいから $3(2x+3) = 3x+5$

よって $x=-\frac{4}{3}$

(4) 方程式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2(3x-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $x=-\frac{1}{5}$

よって $x=-\frac{1}{5}$

(5) 不等式を変形すると $2^x < 2^5$

底2は1より大きいから $x < 5$

(6) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^5$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $x \leq 5$

(7) 不等式を変形すると $3^{5x} < 3^{2x+3}$

底3は1より大きいから $5x < 2x+3$

これを解いて $x < 1$

(8) 不等式を変形すると $2^{-2x} \geq 2^{x-3}$

底2は1より大きいから $-2x \geq x-3$

これを解いて $x \leq 1$

13 次の方程式、不等式を解け。

(1) $2^x = \sqrt[3]{16}$

(2) $\frac{1}{5} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x \leq 1$

解答 (1) $x = \frac{4}{3}$ (2) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

解説

(1) 方程式を変形すると $2^x = 2^{\frac{4}{3}}$

よって $x = \frac{4}{3}$

(2) 不等式から $\left(\frac{1}{5}\right)^1 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^0$

底 $\frac{1}{5}$ は1より小さいから $0 \leq 2x \leq 1$

よって $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

14 次の方程式、不等式を解け。

(1) $2^x < 16$

(2) $3^x > \frac{1}{27}$

(3) $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 27$

(4) $5^{x-2} \leq 125$

(5) $3^{2-x} > 9^x$

(6) $\left(\frac{1}{8}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

解答 (1) $x < 4$ (2) $x > -3$ (3) $x > -\frac{3}{2}$ (4) $x \leq 5$ (5) $x < \frac{2}{3}$

(6) $x \geq \frac{1}{2}$

解説

(1) 不等式を変形すると $2^x < 2^4$

底2は1より大きいから $x < 4$

(2) 不等式を変形すると $3^x > 3^{-3}$

底3は1より大きいから $x > -3$

(3) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $2x > -3$

これを解いて $x > -\frac{3}{2}$

(4) 不等式を変形すると $5^{x-2} \leq 125$

底5は1より大きいから $x-2 \leq 3$

これを解いて $x \leq 5$

(5) 不等式を変形すると $3^{2-x} > 9^x$

底3は1より大きいから $2-x > 2x$

これを解いて $x < \frac{2}{3}$

(6) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $3x \geq x+1$

これを解いて $x \geq \frac{1}{2}$