

指数不等式クイズ

1 次の方程式，不等式を解け。

(1) $9^x=27$ (2) $2^{x-1}\leq 8$ (3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

【解答】 (1) $x=\frac{3}{2}$ (2) $x\leq 4$ (3) $x<1$

【解説】

(1) 方程式を変形すると $3^{2x}=3^3$
よって $2x=3$
これを解いて $x=\frac{3}{2}$

(2) 不等式を変形すると $2^{x-1}\leq 2^3$
底2は1より大きいから $x-1\leq 3$
これを解いて $x\leq 4$

(3) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$
底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $2x<x+1$
これを解いて $x<1$

2 次の方程式，不等式を解け。

(1) $8^x=4$ (2) $3^{2x-1}=243$ (3) $25^x=5^{3-x}$
(4) $2^x-32<0$ (5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\leq \frac{1}{16}$ (6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{81}\right)^x$

【解答】 (1) $x=\frac{2}{3}$ (2) $x=3$ (3) $x=1$ (4) $x<5$ (5) $x\geq 5$ (6) $x>\frac{1}{2}$

【解説】

(1) 方程式を変形すると $2^{3x}=2^2$ よって $3x=2$
これを解いて $x=\frac{2}{3}$

(2) 方程式を変形すると $3^{2x-1}=3^5$ よって $2x-1=5$
これを解いて $x=3$

(3) 方程式を変形すると $5^{2x}=5^{3-x}$ よって $2x=3-x$
これを解いて $x=1$

(4) 不等式を変形すると $2^x<2^5$
底2は1より大きいから $x<5$

(5) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\leq \left(\frac{1}{2}\right)^4$
底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $x-1\geq 4$
これを解いて $x\geq 5$

(6) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$
底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $2x+1<4x$
これを解いて $x>\frac{1}{2}$

3 次の方程式，不等式を解け。

(1) $8^{2x}=16$ (2) $27^x=3^{4-x}$ (3) $\sqrt{3^x}\geq 3^{x+2}$
(4) $\left(\frac{1}{16}\right)^x<2^{x+5}$ (5) $9^x-3^x=6$ (6) $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4>0$

【解答】 (1) $x=\frac{2}{3}$ (2) $x=1$ (3) $x\leq -4$ (4) $x>-1$ (5) $x=1$
(6) $x<-1, 2<x$

【解説】

(1) $(2^3)^{2x}=2^4$ から $2^{6x}=2^4$
よって $6x=4$ よえに $x=\frac{2}{3}$

(2) $3^{3x}=3^{4-x}$ から $3x=4-x$ これを解いて $x=1$

(3) $3^{\frac{x}{2}}\geq 3^{x+2}$
底3は1より大きいから $\frac{x}{2}\geq x+2$ すなわち $x\geq 2x+4$
これを解いて $x\leq -4$

(4) $(2^{-4})^x<2^{x+5}$ すなわち $2^{-4x}<2^{x+5}$
底2は1より大きいから $-4x<x+5$
これを解いて $x>-1$

(5) 方程式を変形すると $(3^x)^2-3^x-6=0$
 $3^x=t$ とおくと $t^2-t-6=0$
因数分解して $(t+2)(t-3)=0$
 $t>0$ であるから $t=3$
すなわち $3^x=3$
よって $x=1$

(6) 不等式を変形すると $2\cdot (2^x)^2-9\cdot 2^x+4>0$
 $2^x=t$ とおくと $2t^2-9t+4>0$
因数分解して $(t-4)(2t-1)>0$
これを解くと $t<\frac{1}{2}, 4<t$

ゆえに $2^x<\frac{1}{2}, 4<2^x$
すなわち $2^x<2^{-1}, 2^2<2^x$
底2は1より大きいから $x<-1, 2<x$

4 次の不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x<8$ (2) $3^{2x+1}+17\cdot 3^x-6<0$

【解答】 (1) $x>-3$ (2) $x<-1$

【解説】

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x<8$ から $2^{-x}<2^3$
底2は1より大きいから $-x<3$ よって $x>-3$

(2) $3^{2x+1}+17\cdot 3^x-6<0$ から $3\cdot (3^x)^2+17\cdot 3^x-6<0$
よって $(3^x+6)(3\cdot 3^x-1)<0$

$3^x+6>0$ であるから $3\cdot 3^x-1<0$
ゆえに $3^x<\frac{1}{3}$ すなわち $3^x<3^{-1}$
底3は1より大きいから $x<-1$

5 次の不等式を解け。

(1) $3^{2x-1}>\left(\frac{1}{9}\right)^x$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\leq \frac{2^x}{8}\leq \left(\frac{1}{2}\right)^x$
(3) $2^{2x}-2^{x+2}-32<0$ (4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-9\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+32\leq 0$

【解答】 (1) $x>\frac{1}{4}$ (2) $1\leq x\leq \frac{3}{2}$ (3) $x<3$ (4) $-4\leq x\leq -1$

【解説】

(1) $3^{2x-1}>\left(\frac{1}{9}\right)^x$ から $3^{2x-1}>3^{-2x}$
底3は1より大きいから $2x-1>-2x$ よって $x>\frac{1}{4}$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\leq \frac{2^x}{8}\leq \left(\frac{1}{2}\right)^x$ から $2^{-2x}\leq 2^{x-3}\leq 2^{-x}$
底2は1より大きいから $-2x\leq x-3\leq -x$
 $-2x\leq x-3$ から $x\geq 1$ ……①, $x-3\leq -x$ から $x\leq \frac{3}{2}$ ……②

①, ②の共通範囲を求めて $1\leq x\leq \frac{3}{2}$

(3) $2^{2x}-2^{x+2}-32<0$ から $(2^x)^2-4\cdot 2^x-32<0$
よって $(2^x+4)(2^x-8)<0$
 $2^x+4>0$ であるから $2^x-8<0$
ゆえに $2^x<8$ すなわち $2^x<2^3$
底2は1より大きいから $x<3$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-9\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+32\leq 0$ から $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-18\left(\frac{1}{2}\right)^x+32\leq 0$
よって $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-16\right\}\leq 0$

ゆえに $2\leq \left(\frac{1}{2}\right)^x\leq 16$ すなわち $2^1\leq 2^{-x}\leq 2^4$

底2は1より大きいから $1\leq -x\leq 4$
したがって $-4\leq x\leq -1$

【別解】〔2行目まで同じ〕

$2\leq \left(\frac{1}{2}\right)^x\leq 16$ から $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\leq \left(\frac{1}{2}\right)^x\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $-4\leq x\leq -1$

6 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^x=64$ (2) $27^x=\frac{1}{9}$ (3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ (4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x=16$
(5) $2^x>64$ (6) $27^x\leq \frac{1}{81}$ (7) $\left(\frac{1}{4}\right)^x<\frac{1}{64}$ (8) $\left(\frac{1}{9}\right)^x\geq 27$

【解答】 (1) $x=6$ (2) $x=-\frac{2}{3}$ (3) $x=3$ (4) $x=-\frac{4}{3}$ (5) $x>6$

(6) $x\leq-\frac{4}{3}$ (7) $x>3$ (8) $x\leq-\frac{3}{2}$

【解説】

(1) $2^x=64$ から $2^x=2^6$ よって $x=6$

(2) $27^x=\frac{1}{9}$ から $3^{3x}=3^{-2}$

よって $3x=-2$ ゆえに $x=-\frac{2}{3}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ から $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^3$

よって $x=3$

(4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x=16$ から $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

よって $3x=-4$ ゆえに $x=-\frac{4}{3}$

【別解】 $\left(\frac{1}{8}\right)^x=16$ から $2^{-3x}=2^4$

よって $-3x=4$ ゆえに $x=-\frac{4}{3}$

(5) $2^x>64$ から $2^x>2^6$

底 2 は 1 より大きいから $x>6$

(6) $27^x\leq\frac{1}{81}$ から $3^{3x}\leq 3^{-4}$

底 3 は 1 より大きいから $3x\leq-4$

よって $x\leq-\frac{4}{3}$

(7) $\left(\frac{1}{4}\right)^x<\frac{1}{64}$ から $\left(\frac{1}{4}\right)^x<\left(\frac{1}{4}\right)^3$

底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さいから $x>3$

(8) $\left(\frac{1}{9}\right)^x\geq 27$ から $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\geq\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $2x\leq-3$

よって $x\leq-\frac{3}{2}$

【別解】 $\left(\frac{1}{9}\right)^x\geq 27$ から $3^{-2x}\geq 3^3$

底 3 は 1 より大きいから $-2x\geq 3$

よって $x\leq-\frac{3}{2}$

【7】 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^{3x-2}=128$ (2) $125^{x-1}=\left(\frac{1}{25}\right)^{x-6}$ (3) $3^{x-2}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

(4) $243^x<3^{2x+3}$ (5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\frac{1}{8}\right)^x$ (6) $(0.2)^{2x-1}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

【解答】 (1) $x=3$ (2) $x=3$ (3) $x=\frac{1}{2}$ (4) $x<1$ (5) $x<-2$

(6) $x\leq\frac{5}{6}$

【解説】

(1) $2^{3x-2}=128$ から $2^{3x-2}=2^7$

よって $3x-2=7$

これを解いて $x=3$

(2) $125^{x-1}=\left(\frac{1}{25}\right)^{x-6}$ から $5^{3(x-1)}=5^{-2(x-6)}$

よって $3(x-1)=-2(x-6)$

これを解いて $x=3$

(3) $3^{x-2}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ から $3^{x-2}=3^{-\frac{3}{2}}$

よって $x-2=-\frac{3}{2}$

これを解いて $x=\frac{1}{2}$

(4) $243^x<3^{2x+3}$ から $3^{5x}<3^{2x+3}$

底 3 は 1 より大きいから $5x<2x+3$

これを解いて $x<1$

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\frac{1}{8}\right)^x$ から $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $5x+4<3x$

これを解いて $x<-2$

(6) $(0.2)^{2x-1}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ から $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

よって $5^{-(2x-1)}\geq 5^{-\frac{2}{3}}$

底 5 は 1 より大きいから $-(2x-1)\geq-\frac{2}{3}$

これを解いて $x\leq\frac{5}{6}$

【8】 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^x=64$ (2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ (3) $2^{2x+1}=32$ (4) $4^{2x-1}=2^{3x-5}$

(5) $3^x<27$ (6) $\left(\frac{1}{9}\right)^x\leq\frac{1}{81}$ (7) $5^{2x-1}>\frac{1}{125}$ (8) $\left(\frac{1}{4}\right)^x\leq 2^{x+2}$

【解答】 (1) $x=6$ (2) $x=3$ (3) $x=2$ (4) $x=-3$

(5) $x<3$ (6) $x\geq 2$ (7) $x>-1$ (8) $x\geq-\frac{2}{3}$

【解説】

(1) $2^x=64$ から $2^x=2^6$ よって $x=6$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ から $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^3$ よって $x=3$

【別解】 $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ から $4^{-x}=4^{-3}$

よって $-x=-3$ ゆえに $x=3$

(3) $2^{2x+1}=32$ から $2^{2x+1}=2^5$

よって $2x+1=5$ ゆえに $x=2$

(4) $4^{2x-1}=2^{3x-5}$ から $2^{2(2x-1)}=2^{3x-5}$

よって $2(2x-1)=3x-5$ ゆえに $x=-3$

(5) $3^x<27$ から $3^x<3^3$ 底 3 は 1 より大きいから $x<3$

(6) $\left(\frac{1}{9}\right)^x\leq\frac{1}{81}$ から $\left(\frac{1}{9}\right)^x\leq\left(\frac{1}{9}\right)^2$

底 $\frac{1}{9}$ は 1 より小さいから $x\geq 2$

【別解】 $\left(\frac{1}{9}\right)^x\leq\frac{1}{81}$ から $9^{-x}\leq 9^{-2}$

底 9 は 1 より大きいから $-x\leq-2$ よって $x\geq 2$

(7) $5^{2x-1}>\frac{1}{125}$ から $5^{2x-1}>5^{-3}$

底 5 は 1 より大きいから $2x-1>-3$ よって $x>-1$

(8) $\left(\frac{1}{4}\right)^x\leq 2^{x+2}$ から $2^{-2x}\leq 2^{x+2}$

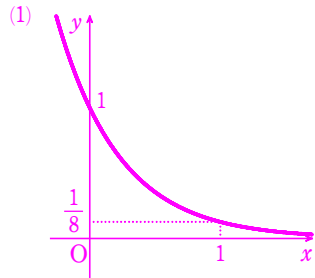
底 2 は 1 より大きいから $-2x\leq x+2$ よって $x\geq-\frac{2}{3}$

【9】 (1) 関数 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ のグラフをかけ。

(2) 次の方程式，不等式を解け。

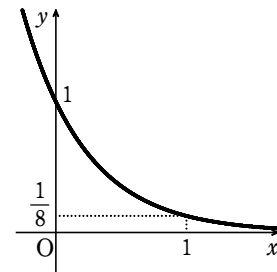
(ア) $2^x=\sqrt[3]{16}$ (イ) $(0.5)^{2x-1}<\sqrt[4]{32}$

【解答】 (1) **【図】** (2) (ア) $x=\frac{4}{3}$ (イ) $x>-\frac{1}{8}$



【解説】

(1) **【図】**



(2) (ア) 方程式を変形すると $2^x=2^{\frac{4}{3}}$ よって $x=\frac{4}{3}$

(イ) $(0.5)^{2x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}=2^{-(2x-1)}$, $\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}}$ であるから,

不等式は $2^{-2x+1}<2^{\frac{5}{4}}$

底 2 は 1 より大きいから $-2x+1<\frac{5}{4}$ これを解いて $x>-\frac{1}{8}$

10 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x=64$ (2) $25^x=\frac{1}{125}$ (3) $8^{2x+3}=2^{3x+5}$ (4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$
(5) $2^x<32$ (6) $\left(\frac{1}{4}\right)^x\geq\frac{1}{8}$ (7) $9^{x+1}<243^x$ (8) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2x-1}\geq 6^{x+3}$

解答 (1) $x=3$ (2) $x=-\frac{3}{2}$ (3) $x=-\frac{4}{3}$ (4) $x=\frac{2}{3}$ (5) $x<5$
(6) $x\leq\frac{3}{2}$ (7) $x>\frac{2}{3}$ (8) $x\leq-\frac{1}{5}$

解説

(1) 方程式を変形すると $4^x=4^3$
よって $x=3$
(2) 方程式を変形すると $5^{2x}=5^{-3}$
よって $2x=-3$
したがって $x=-\frac{3}{2}$
(3) 方程式を変形すると $2^{3(2x+3)}=2^{3x+5}$
よって $3(2x+3)=3x+5$
これを解いて $x=-\frac{4}{3}$
(4) 方程式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2(3x-1)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$
よって $2(3x-1)=3x$
これを解いて $x=\frac{2}{3}$
(5) 不等式を変形すると $2^x<2^5$
底 2 は 1 より大きいから $x<5$
(6) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^3$
底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $2x\leq 3$
よって $x\leq\frac{3}{2}$
(7) 不等式を変形すると $3^{2(x+1)}<3^{5x}$
底 3 は 1 より大きいから $2(x+1)<5x$
これを解いて $x>\frac{2}{3}$
(8) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{6}\right)^{2(2x-1)}\geq\left(\frac{1}{6}\right)^{-(x+3)}$
底 $\frac{1}{6}$ は 1 より小さいから $2(2x-1)\leq -(x+3)$
これを解いて $x\leq-\frac{1}{5}$
別解 不等式を変形すると $6^{-2(2x-1)}\geq 6^{x+3}$
底 6 は 1 より大きいから $-2(2x-1)\geq x+3$
これを解いて $x\leq-\frac{1}{5}$

11 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^x=\sqrt[3]{16}$ (2) $\frac{1}{5}\leq\left(\frac{1}{25}\right)^x\leq 1$

解答 (1) $x=\frac{4}{3}$ (2) $0\leq x\leq\frac{1}{2}$

解説

(1) 方程式を変形すると $2^x=2^{\frac{4}{3}}$
よって $x=\frac{4}{3}$
(2) 不等式から $\left(\frac{1}{5}\right)^1\leq\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}\leq\left(\frac{1}{5}\right)^0$
底 $\frac{1}{5}$ は 1 より小さいから $0\leq 2x\leq 1$
よって $0\leq x\leq\frac{1}{2}$

12 次の不等式を解け。

(1) $2^x<16$ (2) $3^x>\frac{1}{27}$ (3) $\left(\frac{1}{9}\right)^x<27$
(4) $5^{x-2}\leq 125$ (5) $3^{2-x}>9^x$ (6) $\left(\frac{1}{8}\right)^x\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

解答 (1) $x<4$ (2) $x>-3$ (3) $x>-\frac{3}{2}$ (4) $x\leq 5$ (5) $x<\frac{2}{3}$
(6) $x\geq\frac{1}{2}$

解説

(1) 不等式を変形すると $2^x<2^4$
底 2 は 1 より大きいから $x<4$
(2) 不等式を変形すると $3^x>3^{-3}$
底 3 は 1 より大きいから $x>-3$
(3) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$
底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $2x>-3$
これを解いて $x>-\frac{3}{2}$
(4) 不等式を変形すると $5^{x-2}\leq 5^3$
底 5 は 1 より大きいから $x-2\leq 3$
これを解いて $x\leq 5$
(5) 不等式を変形すると $3^{2-x}>3^{2x}$
底 3 は 1 より大きいから $2-x>2x$
これを解いて $x<\frac{2}{3}$
(6) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$
底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $3x\geq x+1$
これを解いて $x\geq\frac{1}{2}$

13 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x=64$ (2) $25^x=\frac{1}{125}$ (3) $8^{2x+3}=2^{3x+5}$ (4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$

(5) $2^x<32$ (6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\geq\frac{1}{243}$ (7) $243^x<3^{2x+3}$ (8) $\left(\frac{1}{4}\right)^x\geq 2^{x-3}$

解答 (1) $x=3$ (2) $x=-\frac{3}{2}$ (3) $x=-\frac{4}{3}$ (4) $x=\frac{2}{3}$ (5) $x<5$
(6) $x\leq 5$ (7) $x<1$ (8) $x\leq 1$

解説

(1) 方程式を変形すると $4^x=4^3$
よって $x=3$
(2) 方程式を変形すると $5^{2x}=5^{-3}$
 $2x=-3$ から $x=-\frac{3}{2}$
(3) 方程式を変形すると $2^{3(2x+3)}=2^{3x+5}$
 $3(2x+3)=3x+5$ から $x=-\frac{4}{3}$
(4) 方程式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2(3x-1)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$
 $2(3x-1)=3x$ から $x=\frac{2}{3}$
(5) 不等式を変形すると $2^x<2^5$
底 2 は 1 より大きいから $x<5$
(6) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^x\geq\left(\frac{1}{3}\right)^5$
底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $x\leq 5$
(7) 不等式を変形すると $3^{5x}<3^{2x+3}$
底 3 は 1 より大きいから $5x<2x+3$
これを解いて $x<1$
(8) 不等式を変形すると $2^{-2x}\geq 2^{x-3}$
底 2 は 1 より大きいから $-2x\geq x-3$
これを解いて $x\leq 1$