$\boxed{1}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で最大値 3，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -1

解説

$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$-1 \leqq t \leqq 1$　…… ①

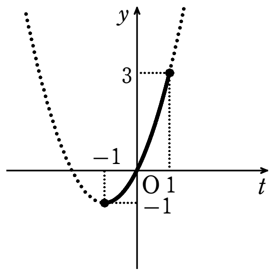
y を t で表すと

$y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$

① の範囲において，y は

$t = 1$　で最大値 3 をとり，

$t = -1$ で最小値 -1 をとる。



また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$t = 1$ ならば $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，　$t = -1$ ならば $\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

よって，この関数は

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で最大値 3 をとり，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -1 をとる。

$\boxed{2}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta - \cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$ ；$\theta = 0$ で最小値 -1

解説

$\sin^2\theta - \cos\theta = (1 - \cos^2\theta) - \cos\theta$

$= -\cos^2\theta - \cos\theta + 1$

$\cos\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$-1 \leqq t \leqq 1$　…… ①

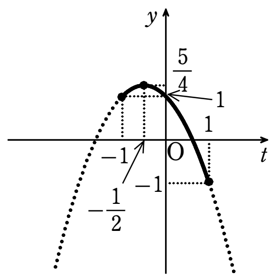
y を t で表すと

$y = -t^2 - t + 1 = -\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4}$

① の範囲において，y は

$t = -\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，

$t = 1$ で最小値 -1 をとる。



また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$t = -\dfrac{1}{2}$ ならば　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$　　$t = 1$ ならば　$\theta = 0$

よって，この関数は

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，$\theta = 0$ で最小値 -1 をとる。

$\boxed{3}$ 次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y = -\sin\theta - 2$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

(2)　$y = \cos^2\theta + \sin\theta$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

(3)　$y = \tan^2\theta + 2\tan\theta + 3$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

解答　(1)　$\theta = 0$，π で最大値 -2；$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -3

(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$ ；$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -1

(3)　$\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 2 ；最大値はない

解説

(1)　$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから

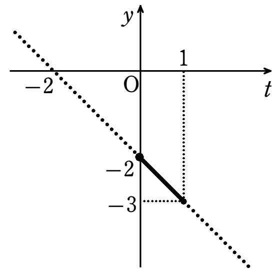
$0 \leqq t \leqq 1$　…… ①

y を t で表すと　　$y = -t - 2$

① の範囲において，y は

$t = 0$ で最大値 -2 をとり，

$t = 1$ で最小値 -3 をとる。



また，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから

$t = 0$ ならば $\theta = 0$，π，　$t = 1$ ならば $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

よって，この関数は

$\theta = 0$，π で最大値 -2 をとり，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -3 をとる。

(2)　$y = \cos^2\theta + \sin\theta = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$

$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$-1 \leqq t \leqq 1$　…… ①

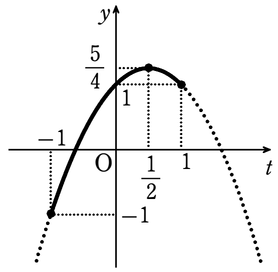
y を t で表すと

$y = -t^2 + t + 1 = -\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4}$

① の範囲において，y は

$t = \dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，

$t = -1$ で最小値 -1 をとる。



また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$t = \dfrac{1}{2}$ ならば $\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，　$t = -1$ ならば $\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

よって，この関数は

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -1 をとる。

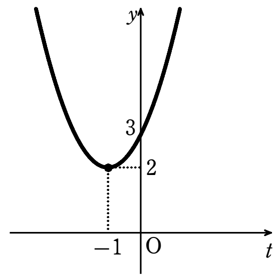
(3)　$\tan\theta = t$ とおくと，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である

から，t はすべての実数値をとる。

y を t で表すと　　$y = t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2$

したがって，y は $t = -1$ で最小値 2 をとる。

また，最大値はない。



$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$t = -1$ ならば $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

よって，この関数は $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 2 をとる。

また，最大値はない。

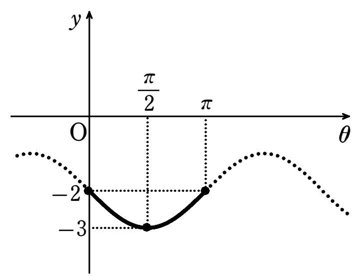
別解　(1)　関数 $y = -\sin\theta - 2$ のグラフは，

関数 $y = -\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動したもので，

図のようになる。図から，

$\theta = 0$，π で最大値 -2，

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -3



$\boxed{4}$ 次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$y = \sin x + \cos x$　$(0 \leqq x < 2\pi)$

解答　$x = \dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\sqrt{2}$，$x = \dfrac{5}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$

解説

与えられた関数の式を変形すると　　$y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ であるから

$-1 \leqq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$　　よって　$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ のとき，$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ から　　$x = \dfrac{\pi}{4}$

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ のとき，$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$ から　$x = \dfrac{5}{4}\pi$

ゆえに，この関数は $x = \dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり，

$x = \dfrac{5}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。

$\boxed{5}$ 次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$　$(0 \leqq x < 2\pi)$

解答　$x = \dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 2，$x = \dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 -2

解説

与えられた関数の式を変形すると　　$y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{6} \leqq x - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{11}{6}\pi$ であるから

$-1 \leqq \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$　　よって　$-2 \leqq y \leqq 2$

また，$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ のとき　$x = \dfrac{5}{3}\pi$

$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ のとき　　$x = \dfrac{2}{3}\pi$

ゆえに，この関数は $x = \dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 2 をとり，$x = \dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 -2 をとる。

$\boxed{6}$ 関数 $y = \sin x + 2\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$

解説

与えられた関数の式を変形すると　　$y = \sqrt{5}\sin(x + \alpha)$

ただし，$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$-1 \leqq \sin(x + \alpha) \leqq 1$ より　　$-\sqrt{5} \leqq y \leqq \sqrt{5}$

よって，この関数の最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$ である。

$\boxed{7}$ 関数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　最大値は 5，最小値は -5

解説

与えられた関数の式を変形すると　　$y = 5\sin(x + \alpha)$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq1$ より　　$-5\leqq y\leqq5$

よって，この関数の最大値は5，最小値は -5 である。

$\boxed{8}$ 次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=\cos2x-2\sin x+1\quad(0\leqq x<2\pi)$$

解答　$x=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{2}$ ；$x=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -2

解説

$\cos2x-2\sin x+1=(1-2\sin^2x)-2\sin x+1$

$\qquad=-2\sin^2x-2\sin x+2$

よって　　$y=-2\sin^2x-2\sin x+2$

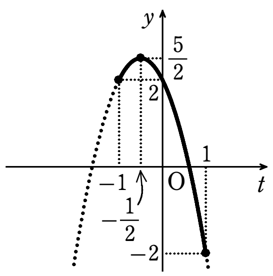
$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$-1\leqq t\leqq1$　……①

y を t で表すと　　$y=-2t^2-2t+2=-2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$

① の範囲において，y は

$t=-\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{5}{2}$ をとり，

$t=1$ で最小値 -2 をとる。



また，$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=-\dfrac{1}{2}$ ならば　　$x=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

$t=1$ ならば　　$x=\dfrac{\pi}{2}$

よって，この関数は

$x=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{2}$ をとり，

$x=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -2 をとる。

$\boxed{9}$ 次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=\sin^2x+4\sin x\cos x+5\cos^2x\quad(0\leqq x<2\pi)$$

解答　$x=\dfrac{\pi}{8}$，$\dfrac{9}{8}\pi$ で最大値 $2\sqrt{2}+3$ ；$x=\dfrac{5}{8}\pi$，$\dfrac{13}{8}\pi$ で最小値 $-2\sqrt{2}+3$

解説

$\sin^2x+4\sin x\cos x+5\cos^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2}+2\sin2x+\dfrac{5(1+\cos2x)}{2}$

$\qquad=2\sin2x+2\cos2x+3=2\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+3$

よって　　$y=2\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+3$

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{4}\leqq2x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{17}{4}\pi$ であるから

$-1\leqq\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$　　　よって　　$-2\sqrt{2}+3\leqq y\leqq2\sqrt{2}+3$

また，$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ のとき

$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{2}\pi$　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{8}$，$\dfrac{9}{8}\pi$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき

$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$　すなわち　$x=\dfrac{5}{8}\pi$，$\dfrac{13}{8}\pi$

ゆえに，この関数は

$x=\dfrac{\pi}{8}$，$\dfrac{9}{8}\pi$ で最大値 $2\sqrt{2}+3$ をとり，

$x=\dfrac{5}{8}\pi$，$\dfrac{13}{8}\pi$ で最小値 $-2\sqrt{2}+3$ をとる。

$\boxed{10}$ 関数 $y=2\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin x+\cos x$ として，y を t の関数で表せ。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y の最大値と最小値を求めよ。

解答　(1)　$y=t^2+t-1$　　(2)　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　　(3)　最大値 $1+\sqrt{2}$，最小値 $-\dfrac{5}{4}$

解説

(1)　$t=\sin x+\cos x$ の両辺を2乗すると，$\sin^2x+\cos^2x=1$ から

$t^2=1+2\sin x\cos x$

よって　　$2\sin x\cos x=t^2-1$　　　ゆえに　　$y=(t^2-1)+t$

すなわち　$y=t^2+t-1$

(2)　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

ここで，$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$ であるから

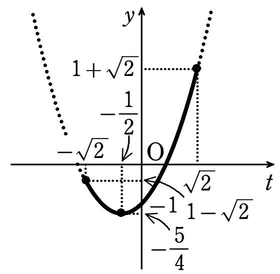
$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　$y=t^2+t-1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

よって，y は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $1+\sqrt{2}$ をとり，

$t=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$ をとる。



ゆえに，最大値は $1+\sqrt{2}$，最小値は $-\dfrac{5}{4}$ である。

$\boxed{11}$ 次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。[各8点]

(1)　$y=\cos^2\theta-4\cos\theta+2$　　　(2)　$y=2\tan^2\theta-4\tan\theta+3$

解答　(1)　$\cos\theta=t$ とおくと　　$-1\leqq t\leqq1$

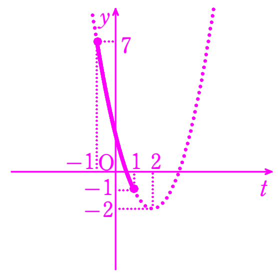
また　　$y=t^2-4t+2=(t-2)^2-2$

よって，y は

$t=-1$ すなわち $\theta=\pi$ で最大値 7

$t=1$ すなわち $\theta=0$ で最小値 -1

をとる。



(2)　$\tan\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ から，t はすべての実数値をとる。

また　　$y=2t^2-4t+3=2(t-1)^2+1$

よって，y は $t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$ で最小値1をとる。

また，最大値はない。

解説

(1)　$\cos\theta=t$ とおくと　　$-1\leqq t\leqq1$

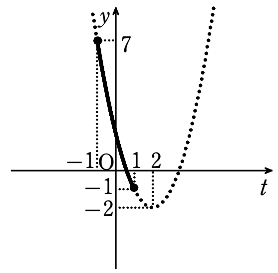
また　　$y=t^2-4t+2=(t-2)^2-2$

よって，y は

$t=-1$ すなわち $\theta=\pi$ で最大値 7

$t=1$ すなわち $\theta=0$ で最小値 -1

をとる。



(2)　$\tan\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ から，t はすべての実数値をとる。

また　　$y=2t^2-4t+3=2(t-1)^2+1$

よって，y は $t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$ で最小値1をとる。

また，最大値はない。

$\boxed{12}$ 関数 $y=\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフをかき，最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。[20点]

解答　$y=\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos2\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$　$\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

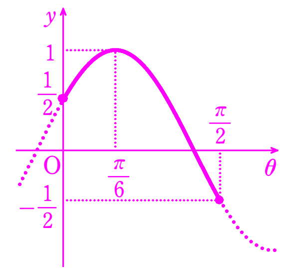
よって，グラフは右図の実線部分のようになる。

したがって，y は

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 1

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$

をとる。



解説

$y=\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos2\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$　$\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

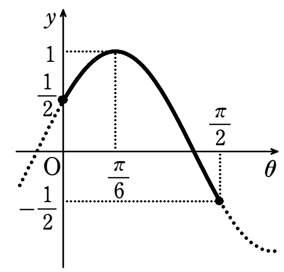
よって，グラフは右図の実線部分のようになる。

したがって，y は

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 1

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$

をとる。



$\boxed{13}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，関数 $y=2(\sin\theta-\cos\theta)-2\sin\theta\cos\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ。[25点]

解答　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおき，この式の両辺を2乗すると　$t^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

よって　$2\sin\theta\cos\theta=1-t^2$

ゆえに　$y=2t-(1-t^2)+1=t^2+2t=(t+1)^2-1$

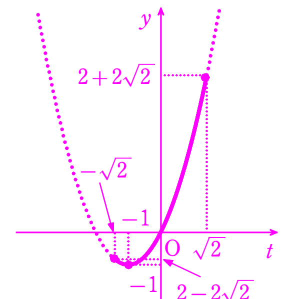
また，$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　……①

① の範囲で y は

$t=\sqrt{2}$　で最大値　$2+2\sqrt{2}$ をとり，

$t=-1$　で最小値　-1 をとる。



$t=\sqrt{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ から　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

$t=-1$　のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ から　　$\theta=0$，$\dfrac{3}{2}\pi$

したがって，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ で最大値　$2+2\sqrt{2}$，$\theta=0$，$\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値　-1 をとる。

（解説）

$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおき，この式の両辺を2乗すると　$t^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

よって　$2\sin\theta\cos\theta=1-t^2$

ゆえに　$y=2t-(1-t^2)+1=t^2+2t=(t+1)^2-1$

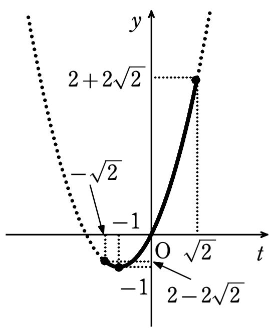
また，$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\quad\cdots\cdots①$$

① の範囲で y は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $2+2\sqrt{2}$ をとり，

$t=-1$ で最小値 -1 をとる。



$t=\sqrt{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ から　$\theta=\frac{3}{4}\pi$

$t=-1$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ から　$\theta=0,\ \frac{3}{2}\pi$

したがって，$\theta=\frac{3}{4}\pi$ で最大値 $2+2\sqrt{2}$，$\theta=0,\ \frac{3}{2}\pi$ で最小値 -1 をとる。

14 $0\leqq\theta<2\pi$ とする。関数 $y=\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin 2\theta$ について　［各10点］

(1) 周期を求めよ。　　(2) 最大値，最小値を求めよ。

解答　$y=\left(\cos2\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin2\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin2\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

(1) 周期は　$2\pi\div2=\pi$

(2) $-1\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq1$ であるから　$-1\leqq y\leqq1$

また，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6}\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{25}{6}\pi$ であるから

$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

ゆえに，$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ で最大値1，$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ で最小値 -1 をとる。

（解説）

$y=\left(\cos2\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin2\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin2\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

(1) 周期は　$2\pi\div2=\pi$

(2) $-1\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq1$ であるから　$-1\leqq y\leqq1$

また，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6}\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{25}{6}\pi$ であるから

$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

ゆえに，$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ で最大値1，$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ で最小値 -1 をとる。

15 関数 $y=4\sin^2\theta-4\cos\theta+1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ のとき最大値6；$\theta=0$ のとき最小値 -3

（解説）

$y=4\sin^2\theta-4\cos\theta+1=4(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta+1$

$=-4\cos^2\theta-4\cos\theta+5$

$\cos\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$-1\leqq x\leqq1$　……①

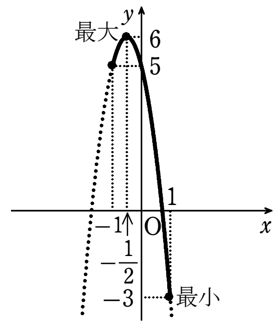
y を x の式で表すと

$$y=-4x^2-4x+5=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+6$$

① の範囲において，y は

$x=-\frac{1}{2}$ で最大値6，$x=1$ で最小値 -3

をとる。



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$x=-\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ から　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

$x=1$ となるのは，$\cos\theta=1$ から　$\theta=0$

したがって　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ のとき最大値6；$\theta=0$ のとき最小値 -3

16 次の関数の最大値および最小値と，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=\cos^2\theta+\sin\theta-1$　$(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

(2) $y=2\tan^2\theta+4\tan\theta+1$　$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

解答　(1) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$；$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2

(2) $\theta=-\frac{\pi}{4}$ のとき最小値 -1，最大値はない

（解説）

(1) $y=(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-1=-\sin^2\theta+\sin\theta$

$\sin\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ から

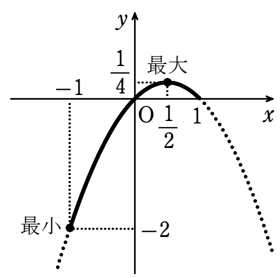
$-1\leqq x\leqq1$　……①

y を x の式で表すと　$y=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

① の範囲において，y は

$x=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$，$x=-1$ で最小値 -2

をとる。$0\leqq\theta\leqq2\pi$ であるから



$x=\frac{1}{2}$ となるとき，$\sin\theta=\frac{1}{2}$ から　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$x=-1$ となるとき，$\sin\theta=-1$ から　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

よって　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$；$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2

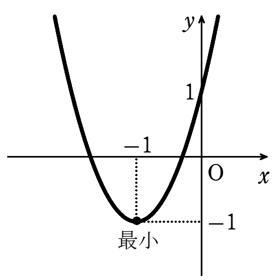
(2) $\tan\theta=x$ とおくと，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ から，x はすべての実数値をとる。

y を x の式で表すと　$y=2x^2+4x+1=2(x+1)^2-1$

ゆえに，y は $x=-1$ で最小値 -1 をとり，最大値はない。

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから

$x=-1$ となるとき，$\tan\theta=-1$ から　$\theta=-\frac{\pi}{4}$



よって　$\theta=-\frac{\pi}{4}$ のとき最小値 -1，最大値はない。

17 次の関数の最大値と最小値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。

(1) $y=\sin2\theta+\sqrt{3}\cos2\theta$　　(2) $y=-4\sin\theta+3\cos\theta$

解答　(1) 最大値2，最小値 -2　　(2) 最大値3，最小値 -5

（解説）

(1) $y=\sin2\theta+\sqrt{3}\cos2\theta=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\frac{\pi}{3}\leqq2\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{7}{3}\pi$

よって　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$

したがって，y は　$2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{12}$ で最大値2

$2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{7}{12}\pi$ で最小値 -2

をとる。

(2) $y=-4\sin\theta+3\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$　$\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$

また，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\frac{3}{2}\pi<\pi+\alpha<2\pi$

ゆえに　$\sin\frac{3}{2}\pi\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq\sin\alpha$

すなわち　$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq\frac{3}{5}$

したがって，y は　$\theta+\alpha=\alpha$　すなわち　$\theta=0$ で最大値3

$\theta+\alpha=\frac{3}{2}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$ で最小値 -5

をとる。

18 次の関数の最大値と最小値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。

(1) $y=\cos\theta-\sin\theta$　　(2) $y=2\sin\theta+3\cos\theta$

解答　(1) 最大値1，最小値 $-\sqrt{2}$　　(2) 最大値 $\sqrt{13}$，最小値 -3

（解説）

(1) $y=\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta+\frac{3}{4}\pi\leqq\frac{7}{4}\pi$

よって　$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，y は

$\theta+\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi$　すなわち　$\theta=0$ で最大値1

$\theta+\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{3}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$

をとる。

(2) $y=2\sin\theta+3\cos\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$　$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$

また，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\pi<\pi+\alpha<\frac{3}{2}\pi$

ゆえに　$\sin(\pi+\alpha)\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq\sin\dfrac{\pi}{2}$

すなわち　$\sin(\pi+\alpha)\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$

したがって，y は

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ で最大値 $\sqrt{13}$

$\theta+\alpha=\pi+\alpha$ すなわち $\theta=\pi$ で最小値 $\sqrt{13}\sin(\pi+\alpha)=2\sin\pi+3\cos\pi=-3$

をとる。

19 関数 $f(\theta)=\sin 2\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)-1$ を考える。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ。

解答　(1) $f(\theta)=t^2+2t-2$　(2) $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$；$\theta=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3

解説

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を 2 乗すると

$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

ゆえに　$t^2=1+\sin 2\theta$　よって　$\sin 2\theta=t^2-1$

したがって　$f(\theta)=t^2-1+2t-1=t^2+2t-2$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ …… ①

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ …… ② であるから

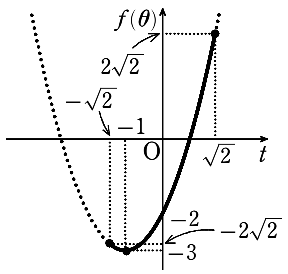
$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　よって　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3) (1) から　$f(\theta)=t^2+2t-2=(t+1)^2-3$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲において $f(\theta)$ は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$，$t=-1$ で最小値 -3

をとる。



$t=\sqrt{2}$ のとき，① から　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

② の範囲で解くと　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$t=-1$ のとき，① から　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

② の範囲で解くと　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$　すなわち　$\theta=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$；$\theta=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3

20 x の関数 $y=\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-\sin x\cos x+1$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。

(1) $t=\sin x-\cos x$ とおくと，$y=$ ア $\boxed{}\,t^2+$ イ $\boxed{}\,t+$ ウ $\boxed{}$ が成り立つ。

(2) $x=$ エ $\boxed{}$ で y は最大値 オ $\boxed{}$ をとり，$x=$ カ $\boxed{}$ で y は最小値 キ $\boxed{}$ をとる。

解答　(1) (ア) $\dfrac{1}{2}$　(イ) $\sqrt{2}$　(ウ) $\dfrac{1}{2}$

(2) (エ) $\dfrac{\pi}{2}$　(オ) $\sqrt{2}+1$　(カ) $-\dfrac{\pi}{4}$　(キ) $-\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $t=\sin x-\cos x$ の両辺を 2 乗すると

$t^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x$

ゆえに　$t^2=1-2\sin x\cos x$　よって　$\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$

したがって　$y=\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-\sin x\cos x+1$

$=\sqrt{2}\,t-\dfrac{1-t^2}{2}+1=$ ア $\dfrac{1}{2}t^2+$ イ $\sqrt{2}\,t+$ ウ $\dfrac{1}{2}$

(2) $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ …… ①

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\dfrac{3}{4}\pi\leqq x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ …… ② であるから

$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　すなわち　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1$

ここで，(1) から　$y=\dfrac{1}{2}(t+\sqrt{2})^2-\dfrac{1}{2}$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1$ の範囲において，y は

$t=1$ で最大値 $\sqrt{2}+1$，$t=-\sqrt{2}$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$

をとる。

$t=1$ のとき，① から　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

② の範囲で解くと　$x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{2}$

$t=-\sqrt{2}$ のとき，① から　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

② の範囲で解くと　$x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$x=-\dfrac{\pi}{4}$

よって，y は $x=$ エ $\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 オ $\sqrt{2}+1$ をとり，

$x=$ カ $-\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 キ $-\dfrac{1}{2}$ をとる。

21 次の関数の最大値と最小値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。

(1) $y=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta$

(2) $y=8\sqrt{3}\cos^2\theta+6\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}\sin^2\theta$

解答　(1) $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，$\theta=\dfrac{5}{8}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ のとき最大値 $6+5\sqrt{3}$，$\theta=\dfrac{7}{12}\pi$ のとき最小値 $-6+5\sqrt{3}$

解説

(1) $y=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

$=\dfrac{1}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$

よって　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

したがって，y は

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{5}{8}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

をとる。

(2) $y=8\sqrt{3}\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+6\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2}+2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=3\sin 2\theta+3\sqrt{3}\cos 2\theta+5\sqrt{3}=3(\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta)+5\sqrt{3}$

$=6\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+5\sqrt{3}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{7}{3}\pi$

よって　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

したがって，y は

$2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ のとき最大値 $6+5\sqrt{3}$，

$2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{7}{12}\pi$ のとき最小値 $-6+5\sqrt{3}$

をとる。

22 関数 $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3\cos 2x$ $(0\leqq x<2\pi)$ について

(1) $f(x)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値をすべて求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 a の値の範囲を求めよ。

解答　(1) $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値 4；$x=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -5　(2) $3<a<4$

解説

(1) $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3(1-2\sin^2 x)=-4\sin^2 x+4\sin x+3$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ から　$-1\leqq t\leqq 1$

$y=f(x)$ とし，y を t の式で表すと

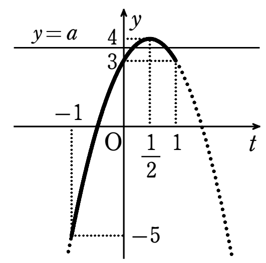
$y=-4t^2+4t+3$

$=-4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+4$

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲において，y は

$t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 4，$t=-1$ で最小値 -5

をとる。$0\leqq x<2\pi$ であるから



$t=\dfrac{1}{2}$ となるのは，$\sin x=\dfrac{1}{2}$ から　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$t=-1$ となるのは，$\sin x=-1$ から　$x=\dfrac{3}{2}\pi$

のときである。したがって

$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値 4；$x=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -5

(2) $\sin x=t$ を満たす x $(0\leqq x<2\pi)$ の個数は次のようになる。

$-1<t<1$ のとき　2 個

$t=-1,\ 1$ のとき　1 個

$t<-1,\ 1<t$ のとき　0 個

よって，$f(x)=a$ が相異なる 4 個の解をもつための条件は，放物線 $y=-4t^2+4t+3$ と直線 $y=a$ が $-1<t<1$ の範囲で異なる 2 個の共有点をもつことである。

(1) の図から，求める a の値の範囲は　$3<a<4$

23 次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=\sin\theta-2$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

(2) $y=3\cos\theta+1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

(3) $y=2\sin\theta-1$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi\right)$

(4) $y=-\tan\theta+1$ $\left(-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$

解答　(1) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 -1，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -3

(2) $\theta=0$ で最大値 4，$\theta=\pi$ で最小値 -2

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 1，$\theta=\dfrac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\sqrt{3}-1$

(4) $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\sqrt{3}+1$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 0

解説

(1) $0\leqq\theta<2\pi$ から　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$

よって，$\sin\theta=t$ とおくと，関数は　$y=t-2\quad(-1\leqq t\leqq1)$

したがって　$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 -1，

$t=-1$ すなわち $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -3

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ から　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

よって，$\cos\theta=t$ とおくと，関数は　$y=3t+1\quad(-1\leqq t\leqq1)$

したがって　$t=1$ すなわち $\theta=0$ で最大値 4，

$t=-1$ すなわち $\theta=\pi$ で最小値 -2

(3) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ から　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\theta\leqq1$

よって，$\sin\theta=t$ とおくと，関数は　$y=2t-1\quad\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq1\right)$

したがって　$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 1，

$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\sqrt{3}-1$

(4) $-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ から　$-\sqrt{3}\leqq\tan\theta\leqq1$

よって，$\tan\theta=t$ とおくと，関数は　$y=-t+1\quad(-\sqrt{3}\leqq t\leqq1)$

したがって　$t=-\sqrt{3}$ すなわち $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\sqrt{3}+1$，

$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 0

24 次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$　　(2) $y=\tan\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\quad\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $y=\sin^2\theta-4\sin\theta+1\quad(0\leqq\theta<2\pi)$　　(4) $y=\sin^2\theta+\cos\theta+1\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

(5) $y=2\tan^2\theta+4\tan\theta+5\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

解答 (1) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 1，$\theta=\pi$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 1，$\theta=0$ で最小値 -1

(3) $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最大値 6，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -2

(4) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$；$\theta=\pi$ で最小値 0

(5) 最大値はない，$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 3

解説

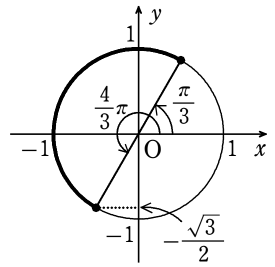
(1) $0\leqq\theta\leqq\pi$ から　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4}{3}\pi$

よって，y は

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 1，

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4}{3}\pi$ すなわち $\theta=\pi$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

をとる。



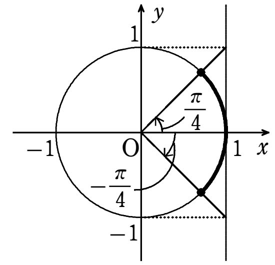
(2) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ から　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}$

よって，y は

$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 1，

$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$ すなわち $\theta=0$ で最小値 -1

をとる。



(3) $\sin\theta=t$ とおくと　$-1\leqq t\leqq1$

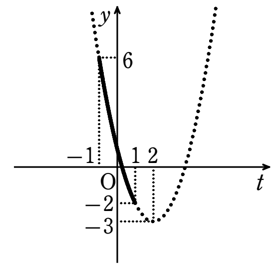
また　$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

よって，y は

$t=-1$ すなわち $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最大値 6，

$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -2

をとる。



(4) $y=(1-\cos^2\theta)+\cos\theta+1=-\cos^2\theta+\cos\theta+2$

$\cos\theta=t$ とおくと　$-1\leqq t\leqq1$

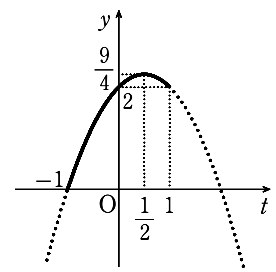
また　$y=-t^2+t+2=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって，y は

$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$；

$t=-1$ すなわち $\theta=\pi$ で最小値 0

をとる。



(5) $\tan\theta=t$ とおくと，t はすべての実数値をとる。

また　$y=2t^2+4t+5=2(t+1)^2+3$

よって，y は

$t=-1$ すなわち $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 3

をとる。

また，最大値はない。

25 $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。関数 $y=2\sin x-\cos 2x$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 3，$x=-\dfrac{\pi}{6}$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$

解説

$y=2\sin x-(1-2\sin^2x)=2\sin^2x+2\sin x-1$

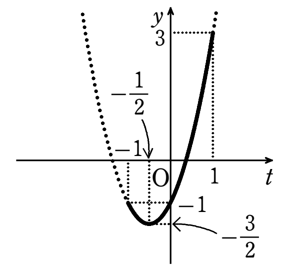
$\sin x=t$ とおくと，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から　$-1\leqq t\leqq1$

また　$y=2t^2+2t-1=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

よって

$t=1$ で最大値 3，　$t=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$

をとる。



$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$t=1$ のとき $x=\dfrac{\pi}{2}$，　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき $x=-\dfrac{\pi}{6}$

したがって　$x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 3，　$x=-\dfrac{\pi}{6}$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$

26 $0\leqq x\leqq\pi$ とする。関数 $y=\sin x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答 $x=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3}{4}$，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\dfrac{1}{4}$

解説

$y=\sin x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

$=-\dfrac{1}{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{3}\leqq2x+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{7}{3}\pi$ であるから　$-1\leqq\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq1$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2}\cdot1+\dfrac{1}{4}\leqq y\leqq-\dfrac{1}{2}\cdot(-1)+\dfrac{1}{4}$　すなわち　$-\dfrac{1}{4}\leqq y\leqq\dfrac{3}{4}$

$\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき　$2x+\dfrac{\pi}{3}=\pi$　よって　$x=\dfrac{\pi}{3}$

$\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ のとき　$2x+\dfrac{\pi}{3}=2\pi$　よって　$x=\dfrac{5}{6}\pi$

したがって　$x=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3}{4}$，　$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\dfrac{1}{4}$

27 次の関数の最大値，最小値を求めよ。(1)，(2) については，そのときの x の値も求めよ。

(1) $y=-\sin x+\cos x\quad(0\leqq x<2\pi)$　　(2) $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x\quad(0\leqq x<\pi)$

(3) $y=4\sin x+3\cos x$　　(4) $y=\sqrt{7}\sin x-3\cos x$

解答 (1) $x=\dfrac{7}{4}\pi$ で最大値 $\sqrt{2}$，$x=\dfrac{3}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$

(2) $x=\dfrac{5}{12}\pi$ で最大値 2，$x=\dfrac{11}{12}\pi$ で最小値 -2

(3) 最大値 5，最小値 -5　(4) 最大値 4，最小値 -4

解説

(1) $y=-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{3}{4}\pi\leqq x+\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{11}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)\leqq1$

よって　$-\sqrt{2}\leqq y\leqq\sqrt{2}$

$\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)=1$ のとき，$x+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{5}{2}\pi$ から　$x=\dfrac{7}{4}\pi$

$\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)=-1$ のとき，$x+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$ から　$x=\dfrac{3}{4}\pi$

ゆえに，この関数は

$$x=\frac{7}{4}\pi \text{ で最大値 } \sqrt{2},\quad x=\frac{3}{4}\pi \text{ で最小値 } -\sqrt{2}$$

をとる。

(2)　$y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x<\pi$ のとき $-\frac{\pi}{3}\leqq 2x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

よって　$-2\leqq y\leqq 2$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ のとき，$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ から　$x=\frac{5}{12}\pi$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき，$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$ から　$x=\frac{11}{12}\pi$

ゆえに，この関数は

$$x=\frac{5}{12}\pi \text{ で最大値 } 2,\quad x=\frac{11}{12}\pi \text{ で最小値 } -2$$

をとる。

(3)　$y=4\sin x+3\cos x=5\sin(x+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ から　$-5\leqq y\leqq 5$

よって，この関数の最大値は 5，最小値は -5 である。

(4)　$y=\sqrt{7}\sin x-3\cos x=4\sin(x+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha=-\frac{3}{4}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ から　$-4\leqq y\leqq 4$

よって，この関数の最大値は 4，最小値は -4 である。

28 $0\leqq x\leqq\pi$ のとき，次の関数の最大値，最小値を求めよ。(1) については，そのときの x の値も求めよ。

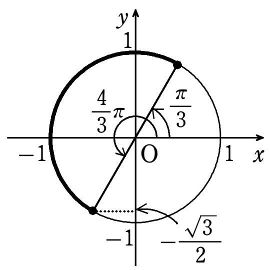
(1)　$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$　　(2)　$y=2\sin x+\cos x$

解答　(1)　$x=\frac{\pi}{6}$ で最大値 2，$x=\pi$ で最小値 $-\sqrt{3}$

(2)　最大値 $\sqrt{5}$，最小値 -1

解説

(1)　$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$



$0\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4}{3}\pi$$

であるから

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$$

よって　$-\sqrt{3}\leqq y\leqq 2$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ のとき，$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ から　$x=\frac{\pi}{6}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$x+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$ から　$x=\pi$

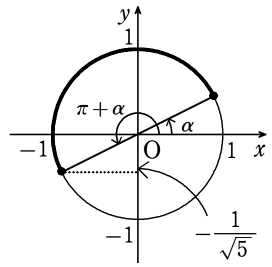
ゆえに，この関数は

$$x=\frac{\pi}{6} \text{ で最大値 } 2,\quad x=\pi \text{ で最小値 } -\sqrt{3}$$

をとる。

(2)　$y=2\sin x+\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$



$0\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\pi+\alpha$$

であるから，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より

$$\sin(\pi+\alpha)\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$$

ここで　$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

よって，この関数の最大値は $\sqrt{5}$，最小値は -1 である。

29 次の関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$$y=2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2 x\quad(0\leqq x<2\pi)$$

解答　$x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{7}{6}\pi$ で最大値 5，$x=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$ で最小値 1

解説

$$y=2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\sin 2x+4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+3$$

$$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+3$$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6}\leqq 2x+\frac{\pi}{6}<\frac{25}{6}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

よって　$1\leqq y\leqq 5$

また，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{7}{6}\pi$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$，$\frac{7}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$

ゆえに，この関数は

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi \text{ で最大値 } 5,\quad x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi \text{ で最小値 } 1$$

をとる。

30 次の関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$$y=2(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+1\quad(0\leqq x<2\pi)$$

解答　$x=\frac{\pi}{4}$ で最大値 $2+2\sqrt{2}$，$x=\pi$，$\frac{3}{2}\pi$ で最小値 -1

解説

$\sin x+\cos x=t$ とおく。

この式の両辺を 2 乗すると　$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$

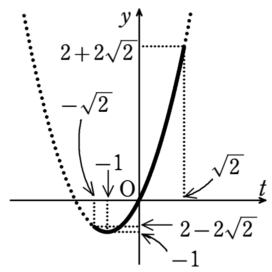
よって　$2\sin x\cos x=t^2-1$

ゆえに　$y=2t+(t^2-1)+1=t^2+2t=(t+1)^2-1$

また　$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　…… ①



① の範囲で y は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $2+2\sqrt{2}$，

$t=-1$ で最小値 -1

をとる。

$t=\sqrt{2}$ のとき　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

よって　$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　すなわち　$x=\frac{\pi}{4}$

$t=-1$ のとき　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$　すなわち　$x=\pi$，$\frac{3}{2}\pi$

したがって，y は

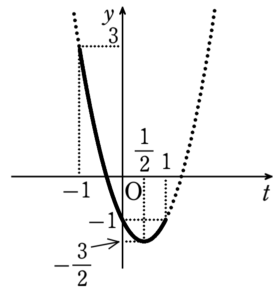
$$x=\frac{\pi}{4} \text{ で最大値 } 2+2\sqrt{2},\quad x=\pi,\ \frac{3}{2}\pi \text{ で最小値 } -1$$

をとる。

31 $0\leqq x<2\pi$ とする。関数 $y=\cos 2x-2\cos x$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=\pi$ で最大値 3，$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

解説



$y=\cos 2x-2\cos x=(2\cos^2 x-1)-2\cos x$

$\cos x=t$ とおくと　$-1\leqq t\leqq 1$

$y=2t^2-2t-1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

したがって，$t=-1$ で最大値 3，

$t=\frac{1}{2}$　で最小値 $-\frac{3}{2}$ をとる。

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$t=-1$ のとき　$x=\pi$

$t=\frac{1}{2}$　のとき　$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

よって　$x=\pi$ で最大値 3，

$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

32 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=5\cos^2 x+6\sin x\cos x-3\sin^2 x\quad(0\leqq x<2\pi)$$

解答　最大値 6，最小値 -4

解説

$$y=5\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+6\cdot\frac{\sin 2x}{2}-3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=3\sin 2x+4\cos 2x+1$$

$$=5\sin(2x+\alpha)+1$$

ただし　$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-1\leqq\sin(2x+\alpha)\leqq 1$ であるから　最大値は 6，最小値は -4

33 次の関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$$y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-\sin x\cos x-1\quad(0\leqq x<2\pi)$$

解答　$x=\frac{\pi}{4}$ で最大値 $\frac{1}{2}$，$x=\frac{5}{4}\pi$ で最小値 $-\frac{7}{2}$

解説

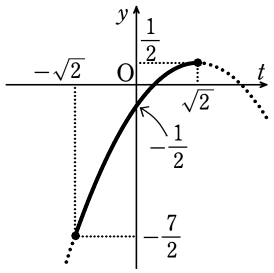
$\sin x+\cos x=t$ とおく。

この式の両辺を 2 乗すると　$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$

よって　$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

ゆえに　$y=\sqrt{2}\,t-\dfrac{t^2-1}{2}-1$

$=-\dfrac{1}{2}(t-\sqrt{2})^2+\dfrac{1}{2}$



また　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　…… ①

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　…… ②

② の範囲で y は　$t=\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{2}$，$t=-\sqrt{2}$ で最小値 $-\dfrac{7}{2}$ をとる。

① と $0\leqq x<2\pi$ から　$t=\sqrt{2}$ のとき $x=\dfrac{\pi}{4}$，$t=-\sqrt{2}$ のとき $x=\dfrac{5}{4}\pi$

すなわち　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\dfrac{1}{2}$，$x=\dfrac{5}{4}\pi$ で最小値 $-\dfrac{7}{2}$

$\boxed{34}$ $y=3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-6\sin x+2\sqrt{3}\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とする。

(1)　$\sqrt{3}\sin x-\cos x=t$ とおいて，y を t で表せ。

(2)　y の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答　(1)　$y=t^2-2\sqrt{3}\,t$　　(2)　$x=0$ で最大値 $1+2\sqrt{3}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 -3

解説

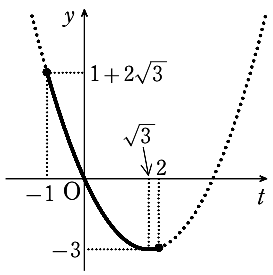
(1)　$y=(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2-2\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)$

よって　$y=t^2-2\sqrt{3}\,t$　…… ①

(2)　$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$　　よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-1\leqq t\leqq 2$　…… ②



① を変形すると　$y=(t-\sqrt{3})^2-3$

② の範囲で，y は

$t=-1$ で最大値 $1+2\sqrt{3}$，

$t=\sqrt{3}$ で最小値 -3

をとる。

$t=-1$ のとき　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$

よって　$x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$　　ゆえに　$x=0$

$t=\sqrt{3}$ のとき　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$　　ゆえに　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

したがって，y は

$x=0$ で最大値 $1+2\sqrt{3}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 -3

をとる。