三角不等式クイズ(弧度法)(難)

$\boxed{1}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

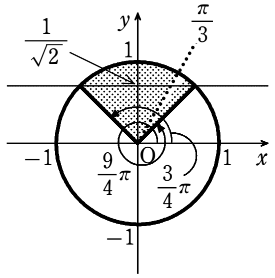
解答 $0\leqq\theta\leqq\frac{5}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

この範囲で，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす $\theta+\frac{\pi}{3}$ の値は

$$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$$



よって，図から，不等式を満たす $\theta+\frac{\pi}{3}$ の値の範囲は

$$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$$

ゆえに $0\leqq\theta\leqq\frac{5}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$

$\boxed{2}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\geqq\frac{1}{2}$　(2) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{3}$

解答 (1) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$，$\frac{3}{2}\pi\leqq\theta<2\pi$　(2) $0\leqq\theta<\frac{7}{12}\pi$，$\frac{11}{12}\pi<\theta<2\pi$

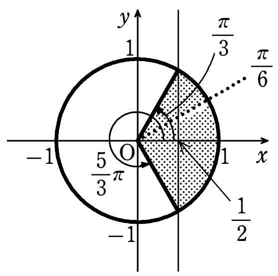
(3) $\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{\pi}{4}$，$\frac{13}{12}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$

解説

(1) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$

この範囲で，$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ を満たす $\theta+\frac{\pi}{6}$ の値は

$$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$



よって，図から，不等式を満たす $\theta+\frac{\pi}{6}$ の値の範囲は

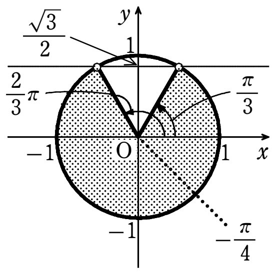
$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$$

ゆえに $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$，$\frac{3}{2}\pi\leqq\theta<2\pi$

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$

この範囲で，$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす $\theta-\frac{\pi}{4}$ の値は

$$\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$$



よって，図から，不等式を満たす $\theta-\frac{\pi}{4}$ の値の範囲は

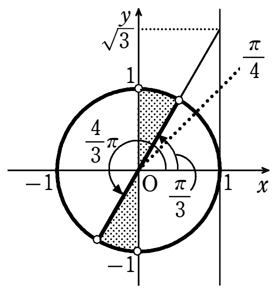
$$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi<\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$$

ゆえに $0\leqq\theta<\frac{7}{12}\pi$，$\frac{11}{12}\pi<\theta<2\pi$

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

この範囲で，$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$ を満たす $\theta+\frac{\pi}{4}$ の値は

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$



よって，図から，不等式を満たす $\theta+\frac{\pi}{4}$ の値の範囲は

$$\frac{\pi}{3}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi$$

ゆえに $\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{\pi}{4}$，$\frac{13}{12}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$

$\boxed{3}$ $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos 2x=-3\cos x+1$　(2) $\cos 2x<-3\cos x+1$

解答 (1) $x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$　(2) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

解説

(1) 2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2\cos^2 x-1=-3\cos x+1$$

移項して整理すると

$$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

左辺を変形して $(\cos x+2)(2\cos x-1)=0$

$\cos x\neq-2$ であるから

$2\cos x-1=0$　すなわち　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

(2) (1) により，与えられた不等式は，次のように変形される。

$$(\cos x+2)(2\cos x-1)<0$$

$\cos x+2>0$ であるから

$2\cos x-1<0$　すなわち　$\cos x<\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

$\boxed{4}$ $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\cos 2x=4\sin x-1$　(2) $\sin 2x=\sin x$

(3) $\cos 2x\leqq 3\sin x-1$　(4) $\cos 2x<\cos x$

解答 (1) $x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$　(2) $x=0$，$\frac{\pi}{3}$，π，$\frac{5}{3}\pi$　(3) $\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi$

(4) $0<x<\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$

解説

(1) 2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2(1-2\sin^2 x)=4\sin x-1$$

移項して整理すると　$4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

左辺を変形して　$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$

$2\sin x+3\neq0$ であるから　$2\sin x-1=0$　すなわち　$\sin x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$

(2) 2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2\sin x\cos x=\sin x$$

移項すると　$2\sin x\cos x-\sin x=0$

左辺を変形して　$\sin x(2\cos x-1)=0$

ゆえに　$\sin x=0$　または　$2\cos x-1=0$

すなわち　$\sin x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=0$，π　または　$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

したがって　$x=0$，$\frac{\pi}{3}$，π，$\frac{5}{3}\pi$

(3) 2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$1-2\sin^2 x\leqq 3\sin x-1$$

移項して整理すると　$2\sin^2 x+3\sin x-2\geqq0$

左辺を変形して　$(\sin x+2)(2\sin x-1)\geqq0$

$\sin x+2>0$ であるから　$2\sin x-1\geqq0$　すなわち　$\sin x\geqq\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi$

(4) 2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2\cos^2 x-1<\cos x$$

移項して　$2\cos^2 x-\cos x-1<0$

左辺を変形して　$(2\cos x+1)(\cos x-1)<0$

ゆえに　$-\frac{1}{2}<\cos x<1$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$0<x<\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$

$\boxed{5}$ $0\leqq x<2\pi$ のとき，不等式 $\sin x-\sqrt{3}\cos x>1$ を解け。

解答 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi$

解説

左辺を変形して　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>1$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{3}\leqq x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$ であるから，この範囲で

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

を満たす $x-\frac{\pi}{3}$ の値は　$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

ゆえに，① から　$\frac{\pi}{6}<x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{6}\pi$

したがって　$\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi$

6 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x<1$　　(2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x\leqq\sqrt{2}$

解答　(1) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{11}{6}\pi$　　(2) $0\leqq x\leqq\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi\leqq x<2\pi$

解説

(1) 左辺を変形して　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<1$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ であるから，この範囲で

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

を満たす $x+\frac{\pi}{3}$ の値は　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

ゆえに，① から　$\frac{5}{6}\pi<x+\frac{\pi}{3}<\frac{13}{6}\pi$

したがって　$\frac{\pi}{2}<x<\frac{11}{6}\pi$

(2) 左辺を変形して　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqq\sqrt{2}$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$ であるから，この範囲で

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

を満たす $x-\frac{\pi}{6}$ の値は　$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

ゆえに，① から　$-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{\pi}{4}$,

$\frac{3}{4}\pi\leqq x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$

したがって　$0\leqq x\leqq\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi\leqq x<2\pi$

7 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos 2x+\cos x+1=0$　　(2) $\sin 2x=\sqrt{3}\cos x$

(3) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$　　(4) $\sin 2x-\cos 2x=1$

(5) $\sin x\geqq\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$　　(6) $\cos x-\sin x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

解答　(1) $x=\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$　　(2) $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(3) $x=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　　(4) $x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(5) $0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\leqq x<2\pi$　　(6) $\frac{\pi}{12}<x<\frac{17}{12}\pi$

解説

(1) 2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると　$(2\cos^2x-1)+\cos x+1=0$

整理すると　$2\cos^2x+\cos x=0$

左辺を変形して　$\cos x(2\cos x+1)=0$

ゆえに　$\cos x=0$　または　$\cos x=-\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$　または　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

したがって　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2) 2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると　$2\sin x\cos x=\sqrt{3}\cos x$

移項すると　$2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x=0$

左辺を変形して　$\cos x(2\sin x-\sqrt{3})=0$

ゆえに　$\cos x=0$　または　$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$　または　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

したがって　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(3) 左辺を変形して　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$ であるから，① より

$x+\frac{\pi}{6}=\pi,\ 2\pi$　　ゆえに　$x=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

別解　$\begin{cases}\sqrt{3}\sin x+\cos x=0\\ \sin^2x+\cos^2x=1\end{cases}$　から　$4\sin^2x=1$

ゆえに　$\sin x=\frac{1}{2},\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

または　$\sin x=-\frac{1}{2},\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x=\frac{1}{2},\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$0\leqq x<2\pi$ から　$x=\frac{5}{6}\pi$

$\sin x=-\frac{1}{2},\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$0\leqq x<2\pi$ から　$x=\frac{11}{6}\pi$

(4) 左辺を変形して　$\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

よって　$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{4}\leqq 2x-\frac{\pi}{4}<\frac{15}{4}\pi$ であるから，① より

$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi$

ゆえに　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(5) 移項すると　$\sin x-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqq 0$

左辺を加法定理を用いて変形すると　$\sin x-\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)\geqq 0$

整理すると　$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\geqq 0$

左辺を変形して　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geqq 0$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ であるから，この範囲で $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ を満たす $x+\frac{\pi}{3}$ の値は　$x+\frac{\pi}{3}=\pi,\ 2\pi$

ゆえに，① から　$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}\leqq\pi,\ 2\pi\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

したがって　$0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\leqq x<2\pi$

(6) $\cos x-\sin x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺に -1 を掛けて　$\sin x-\cos x>-\frac{1}{\sqrt{2}}$

左辺を変形すると　$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$ であるから，この範囲で $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ を満たす $x-\frac{\pi}{4}$ の値は　$x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

ゆえに，① から　$-\frac{\pi}{6}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{6}\pi$

したがって　$\frac{\pi}{12}<x<\frac{17}{12}\pi$

8 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin^2x+\cos x-1=0$　　(2) $1\leqq\sqrt{3}\sin x+\cos x\leqq\sqrt{3}$

解答　(1) $x=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$　　(2) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$

解説

(1) 左辺を変形すると　$2(1-\cos^2x)+\cos x-1=0$

整理すると　$2\cos^2x-\cos x-1=0$

左辺を変形して　$(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$

よって　$\cos x=1,\ -\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\cos x=1$ のとき　$x=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

ゆえに　$x=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

(2) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ であるから

$1\leqq 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq\sqrt{3}$

ゆえに　$\frac{1}{2}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$ であるから，① より

$\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\leqq x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$

したがって　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$

9 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。[各 10 点]

(1) $2(\sin x-\cos x)=-\sqrt{6}$　　(2) $\sqrt{3}\sin x\geqq\cos x$

解答　(1) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ であるから，方程式は

$2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{6}$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$ であるから，① より

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　ゆえに　$x=\frac{19}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(2)　$\sqrt{3}\sin x\geqq\cos x$ から　$\sqrt{3}\sin x-\cos x\geqq 0$

$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ であるから，不等式は

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geqq 0$ ……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$ であるから，① より

$0\leqq x-\frac{\pi}{6}\leqq\pi$　ゆえに　$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{7}{6}\pi$

解説

(1)　$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ であるから，方程式は

$2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{6}$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$ であるから，① より

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　ゆえに　$x=\frac{19}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(2)　$\sqrt{3}\sin x\geqq\cos x$ から　$\sqrt{3}\sin x-\cos x\geqq 0$

$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ であるから，不等式は

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geqq 0$ ……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$ であるから，① より

$0\leqq x-\frac{\pi}{6}\leqq\pi$　ゆえに　$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{7}{6}\pi$

10　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。[各 15 点]

(1)　$\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=1$　(2)　$\cos^2\theta+2\cos\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta\geqq 0$

解答　(1)　与えられた方程式から　$(\sin^2\theta-1)+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=0$

よって　$-\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=0$

ゆえに　$\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)=0$

よって　$\cos\theta=0$ または $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=0$

すなわち　$\cos\theta=0$ ……①　または　$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ……②

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，① より　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$　② より　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2)　与えられた不等式から　$\cos^2\theta-\sin^2\theta+2(\cos\theta+\sin\theta)\geqq 0$

よって　$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta+2)\geqq 0$ ……①

$\cos\theta-\sin\theta+2=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)+2>0$ から，① より　$\cos\theta+\sin\theta\geqq 0$

よって　$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0$　ゆえに　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0$ ……②

また，$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

よって，② から　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\pi,\ 2\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

したがって　$0\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

(1)　与えられた方程式から　$(\sin^2\theta-1)+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=0$

よって　$-\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=0$

ゆえに　$\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)=0$

よって　$\cos\theta=0$ または $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=0$

すなわち　$\cos\theta=0$ ……①　または　$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ……②

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，① より　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$　② より　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2)　与えられた不等式から　$\cos^2\theta-\sin^2\theta+2(\cos\theta+\sin\theta)\geqq 0$

よって　$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta+2)\geqq 0$ ……①

$\cos\theta-\sin\theta+2=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)+2>0$ から，① より　$\cos\theta+\sin\theta\geqq 0$

よって　$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0$　ゆえに　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0$ ……②

また，$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

よって，② から　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\pi,\ 2\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

したがって　$0\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

11　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2)　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2}$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　(2)　$\frac{7}{12}\pi<\theta<\frac{23}{12}\pi$

解説

(1)　$2\theta+\frac{\pi}{3}=\alpha$ とおくと

$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……①

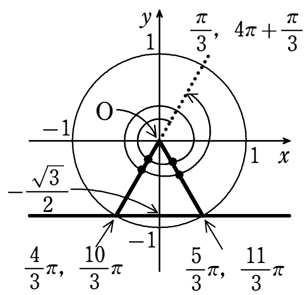
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{3}\leqq\alpha<4\pi+\frac{\pi}{3}$

この範囲において，① の解は

$\alpha=\frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$

すなわち　$2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$



(2)　$\theta+\frac{\pi}{4}=\alpha$ とおくと　$\sin\alpha<\frac{1}{2}$ ……①

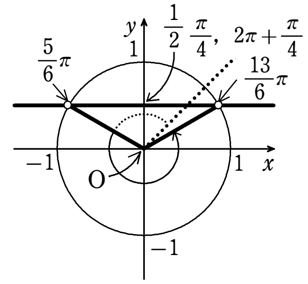
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{4}\leqq\alpha<2\pi+\frac{\pi}{4}$

この範囲において，① の解は

$\frac{5}{6}\pi<\alpha<\frac{13}{6}\pi$

すなわち　$\frac{5}{6}\pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{13}{6}\pi$

ゆえに　$\frac{7}{12}\pi<\theta<\frac{23}{12}\pi$



12　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$　(2)　$2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)<\sqrt{3}$

(3)　$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$　(4)　$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqq-\sqrt{3}$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$　(2)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{13}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi<\theta<2\pi$

(3)　$\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$　(4)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{12}\pi\leqq\theta<\frac{5}{4}\pi,\ \frac{17}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

(1)　$2\theta-\frac{\pi}{3}=\alpha$ とおくと　$2\cos\alpha=\sqrt{3}$　すなわち　$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

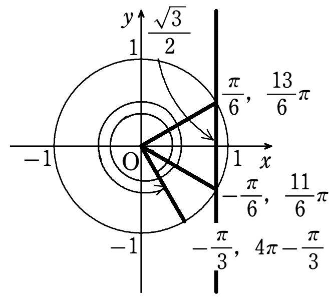
$-\frac{\pi}{3}\leqq\alpha<4\pi-\frac{\pi}{3}$ ……①

この範囲で $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$\alpha=-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

すなわち　$2\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$



(2)　(1) と同様に考える。

$2\theta-\frac{\pi}{3}=\alpha$ とおき，① の範囲で $2\cos\alpha<\sqrt{3}$ すなわち $\cos\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$-\frac{\pi}{3}\leqq\alpha<-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi<\alpha<4\pi-\frac{\pi}{3}$

よって　$-\frac{\pi}{3}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}<2\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{3}<4\pi-\frac{\pi}{3}$

ゆえに　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{13}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi<\theta<2\pi$

(3)　$\theta+\frac{\pi}{4}=\alpha$ とおくと　$\tan\alpha=-\sqrt{3}$

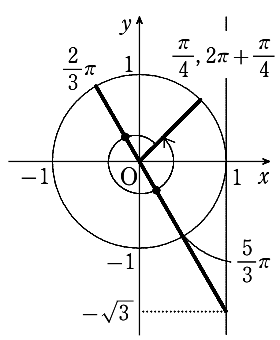
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{4}\leqq\alpha<2\pi+\frac{\pi}{4}$ ……②

この範囲で $\tan\alpha=-\sqrt{3}$ を解くと

$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

すなわち　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$



(4)　(3) と同様に考える。

$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\alpha$ とおき，② の範囲で $\tan\alpha \geqq -\sqrt{3}$ を解くと

$$\frac{\pi}{4}\leqq\alpha<\frac{\pi}{2},\quad \frac{2}{3}\pi\leqq\alpha<\frac{3}{2}\pi,\quad \frac{5}{3}\pi\leqq\alpha<2\pi+\frac{\pi}{4}$$

よって　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{12}\pi\leqq\theta<\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{17}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$

13 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin^2\theta+\cos\theta-1=0$　　(2) $2\cos^2\theta+5\sin\theta<4$

解答　(1) $\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$　(2) $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$

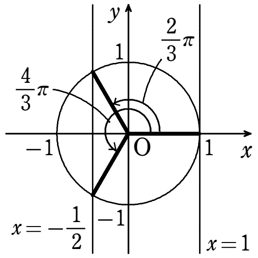
解説

(1) 方程式から　$2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1=0$

整理すると　$2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

よって　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)=0$

ゆえに　$\cos\theta=1,\ -\dfrac{1}{2}$



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta=1$ より　$\theta=0$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

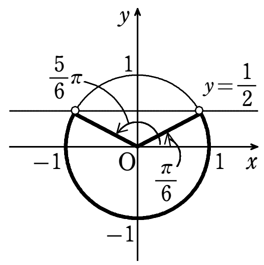
したがって，解は　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(2) 不等式から　$2(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta<4$

整理すると　$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2>0$

よって　$(\sin\theta-2)(2\sin\theta-1)>0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから常に $\sin\theta-2<0$ である。



ゆえに　$2\sin\theta-1<0$

よって　$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

これを解いて　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$

14 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta=\tan\theta$

(3) $2\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1>0$　　(4) $\cos\theta<0$ かつ $4\cos^2\theta-1<0$

解答　(1) $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$　(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$　(3) $0\leqq\theta<\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi<\theta<2\pi$

(4) $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

解説

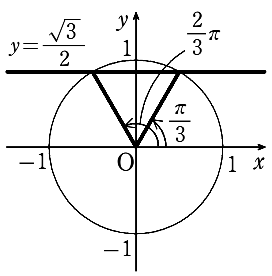
(1) 方程式から　$2(1-\sin^2\theta)-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$

整理すると　$2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta-3=0$

よって　$(\sin\theta+\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

$\sin\theta+\sqrt{3}\neq0$



ゆえに　$2\sin\theta-\sqrt{3}=0$

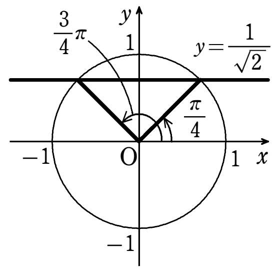
すなわち　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これを解いて　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

(2) 方程式から　$\sqrt{2}\cos\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

すなわち　$\sqrt{2}\cos^2\theta=\sin\theta$

ただし，$\theta\neq\dfrac{\pi}{2},\ \theta\neq\dfrac{3}{2}\pi$



よって　$\sqrt{2}(1-\sin^2\theta)=\sin\theta$

整理すると　$\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta-\sqrt{2}=0$

したがって　$(\sin\theta+\sqrt{2})(\sqrt{2}\sin\theta-1)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

$\sin\theta+\sqrt{2}\neq0$

ゆえに　$\sqrt{2}\sin\theta-1=0$　すなわち　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これを解いて　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$　$\left(\theta\neq\dfrac{\pi}{2},\ \theta\neq\dfrac{3}{2}\pi \text{ に適する}\right)$

別解　方程式より，$\tan\theta$ と $\cos\theta$ の符号は同じであるから，θ は第 1 象限または第 2 象限の角である。……(＊)

$\tan\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ を $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1+2\cos^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

両辺に $\cos^2\theta$ を掛けて整理すると　$2\cos^4\theta+\cos^2\theta-1=0$

ゆえに　$(\cos^2\theta+1)(2\cos^2\theta-1)=0$

$\cos^2\theta+1\geqq1$ であるから　$2\cos^2\theta-1=0$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

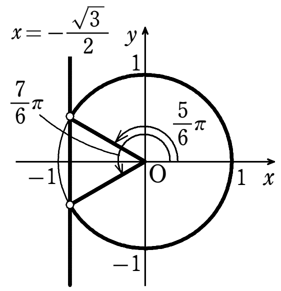
(＊)から，求める解は　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

(3) 不等式から　$2(1-\cos^2\theta)+\sqrt{3}\cos\theta+1>0$

整理すると　$2\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta-3<0$

よって　$(\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})<0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから常に $\cos\theta-\sqrt{3}<0$ である。



ゆえに　$2\cos\theta+\sqrt{3}>0$

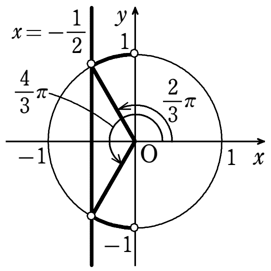
すなわち　$\cos\theta>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これを解いて　$0\leqq\theta<\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi<\theta<2\pi$

(4) 不等式から

$\cos\theta<0$ かつ $(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)<0$

よって　$\cos\theta<0$ かつ $-\dfrac{1}{2}<\cos\theta<\dfrac{1}{2}$



ゆえに　$-\dfrac{1}{2}<\cos\theta<0$

これを解いて　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

15 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin2\theta=\cos\theta$　　(2) $\cos2\theta-3\cos\theta+2\geqq0$

解答　(1) $\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　(2) $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

解説

(1) 方程式から　$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

ゆえに　$\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\cos\theta=0,\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\cos\theta=0$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

以上から，解は　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(2) 不等式から　$2\cos^2\theta-1-3\cos\theta+2\geqq0$

整理すると　$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1\geqq0$

ゆえに　$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-1)\geqq0$

よって　$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2},\ 1\leqq\cos\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ では，$\cos\theta\leqq1$ であるから　$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2},\ \cos\theta=1$

したがって，解は　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

16 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos2\theta+5\sin\theta-3<0$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(2) $2\sin2\theta-2(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)-\sqrt{3}=0$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(3) $\cos\theta-3\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2}+4>0$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

解答　(1) $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<\theta\leqq\pi$　(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$　(3) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<2\pi$

解説

(1) 方程式から　$(1-2\sin^2\theta)+5\sin\theta-3<0$

整理すると　$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2>0$

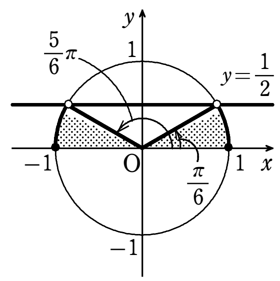
よって　$(\sin\theta-2)(2\sin\theta-1)>0$

$\sin\theta-2<0$ であるから

$2\sin\theta-1<0$　すなわち　$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから

$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<\theta\leqq\pi$



(2) 方程式から

$2\cdot2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta-\sqrt{3}=0$

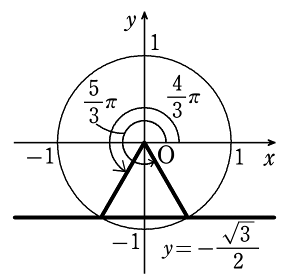
$2\sin\theta(2\cos\theta-1)+\sqrt{3}(2\cos\theta-1)=0$

ゆえに　$(2\sin\theta+\sqrt{3})(2\cos\theta-1)=0$

よって　$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}$

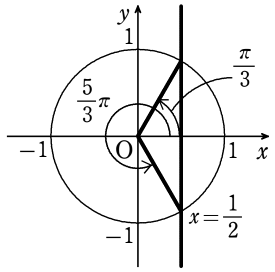
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\theta=\dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$



$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より　　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

以上から，解は　　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$



(3)　不等式から

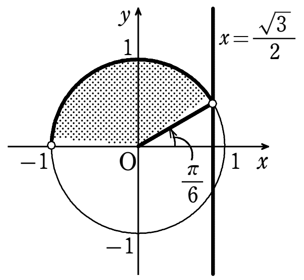
$$\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+4>0$$

整理すると　$2\cos^2\frac{\theta}{2}-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+3>0$

よって　$\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)>0$

$\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}<0$ であるから　　$2\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}<0$

ゆえに　$\cos\frac{\theta}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$



$0\leqq\theta<2\pi$ より，$0\leqq\frac{\theta}{2}<\pi$ であるから　　$\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{2}<\pi$　すなわち　$\frac{\pi}{3}<\theta<2\pi$

$\boxed{17}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$　$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

(2)　$\cos 3\theta+\sin 2\theta+\cos\theta>0$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(3)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$　$(0\leqq x\leqq\pi)$

解答　(1)　$x=\frac{2}{5}\pi$　　(2)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

(3)　$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{2}{3}\pi$

解説

(1)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=(\sin 4x+\sin x)+(\sin 3x+\sin 2x)$

$$=2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{3}{2}x+2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}$$

$$=2\sin\frac{5}{2}x\left(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{5}{2}x\cdot 2\cos x\cos\frac{x}{2}$$

ゆえに，方程式は　　$\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}=0$　……①

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$ であるから　　$\cos x\neq 0,\ \cos\frac{x}{2}\neq 0$

よって，① から　　$\sin\frac{5}{2}x=0$

$0<\frac{5}{2}x<\frac{5}{4}\pi$ であるから，$\sin\frac{5}{2}x=0$ となるのは，$\frac{5}{2}x=\pi$ のときである。

したがって　　$x=\frac{2}{5}\pi$

(2)　$\cos 3\theta+\sin 2\theta+\cos\theta=(\cos 3\theta+\cos\theta)+\sin 2\theta$

$$=2\cos 2\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta$$

$$=2\cos\theta(\cos 2\theta+\sin\theta)$$

$$=2\cos\theta(1-2\sin^2\theta+\sin\theta)$$

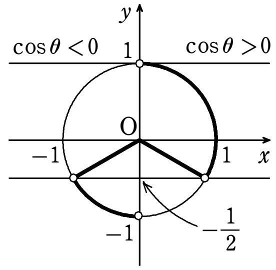
$$=-2\cos\theta(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)$$

したがって，不等式は

$$\cos\theta(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$$

ゆえに　「$\cos\theta>0,\ -\frac{1}{2}<\sin\theta<1$」または

「$\cos\theta<0,\ \sin\theta<-\frac{1}{2}$」



よって

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$$

(3)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x=2\sin 2x\cos x+\sin 2x$

$$=\sin 2x(2\cos x+1)$$

$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=(\cos 3x+\cos x)+\cos 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$

$$=\cos 2x(2\cos x+1)$$

したがって，方程式は　　$\sin 2x(2\cos x+1)=\cos 2x(2\cos x+1)$

よって　　$(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0$

ゆえに　　$\cos x=-\frac{1}{2}$　……①　または　$\sin 2x=\cos 2x$　……②

$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で，① を解くと　　$x=\frac{2}{3}\pi$

また，$\cos 2x=0$ のとき　$\sin 2x\neq 0$ であるから，② は

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1\quad すなわち\quad \tan 2x=1$$

$0\leqq x\leqq\pi$　すなわち　$0\leqq 2x\leqq 2\pi$ の範囲で，これを解くと

$$2x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\quad すなわち\quad x=\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi$$

したがって，求める解は　　$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{2}{3}\pi$

$\boxed{18}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=1$　　　　(2)　$\cos 2\theta+\sin 2\theta+1>0$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \pi$　　(2)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

解説

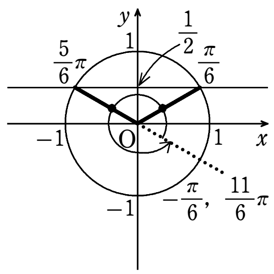
(1)　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

よって，方程式は　　$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$

ゆえに，① から　　$\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって　　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \pi$



(2)　$\sin 2\theta+\cos 2\theta=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

よって，不等式は　$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{1}{\sqrt{2}}$　……①

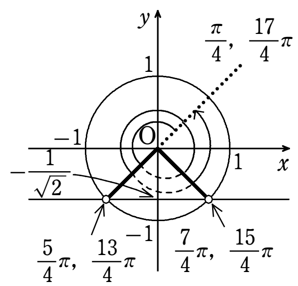
$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{17}{4}\pi$

ゆえに，① から

$$\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{13}{4}\pi,$$

$$\frac{15}{4}\pi<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{17}{4}\pi$$

したがって



$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$$

$\boxed{19}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{2}$　　　　(2)　$\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta<1$

(3)　$\sin\theta\leqq\sqrt{3}\cos\theta$

解答　(1)　$\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$　　(2)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

(3)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

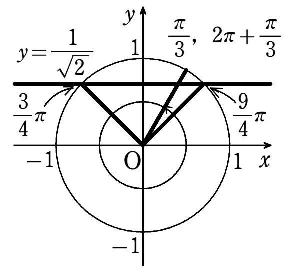
(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

よって，方程式は　　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$

ゆえに，① から　　$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$

したがって　　$\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$



(2)　$\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta=2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

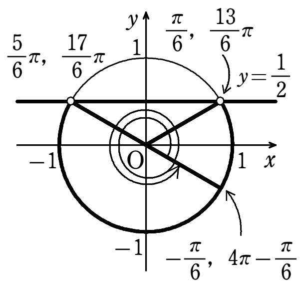
よって，不等式は　　$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$-\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{6}<4\pi-\frac{\pi}{6}$

ゆえに，① から

$$-\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6},\quad \frac{5}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi,$$

$$\frac{17}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<4\pi-\frac{\pi}{6}$$



したがって　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

(3)　$\sin\theta\leqq\sqrt{3}\cos\theta$　から　　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\leqq 0$

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，

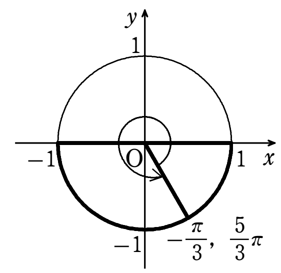
不等式は　　　　$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leqq 0$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

ゆえに，① から

$$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}\leqq 0,\quad \pi\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$$

したがって　　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$



$\boxed{20}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(2)　$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)>1$

(3)　$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(4)　$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\geqq-\sqrt{3}$

解答　(1)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$　　(2)　$\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$

(3)　$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$　　(4)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ から　$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$

よって，不等式 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$

ゆえに　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{12}$，$\frac{5}{12}\pi \leqq \theta < 2\pi$

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ から　$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$

よって，不等式 $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 1$ から　$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{4}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi$

ゆえに　$\frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi$，$\frac{17}{12}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ から　$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$

よって，不等式 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\frac{5}{6}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{7}{6}\pi$

ゆえに　$\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

(4) $0 \leqq \theta < 2\pi$ から　$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$

よって，不等式 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geqq -\sqrt{3}$ から

$$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

ゆえに　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2} \leqq \theta < \frac{4}{3}\pi$，$\frac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$

21 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$　　(2) $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(4) $\tan\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) \geqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$

解答　(1) $\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$　(2) $\theta = \frac{\pi}{24},\ \frac{7}{24}\pi,\ \frac{25}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi$

(3) $\frac{7}{24}\pi < \theta < \frac{11}{24}\pi$，$\frac{31}{24}\pi < \theta < \frac{35}{24}\pi$

(4) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{7}{12}\pi$，$\frac{3}{4}\pi \leqq \theta < \frac{13}{12}\pi$，$\frac{5}{4}\pi \leqq \theta < \frac{19}{12}\pi$，$\frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$

解説

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ から　$-\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta - \frac{\pi}{3} < 4\pi - \frac{\pi}{3}$

よって，方程式 $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ から　$2\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi$

ゆえに　$\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ から　$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} < 4\pi + \frac{\pi}{6}$

よって，方程式 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ から　$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi$

ゆえに　$\theta = \frac{\pi}{24},\ \frac{7}{24}\pi,\ \frac{25}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ から　$\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{4} < 4\pi + \frac{\pi}{4}$

よって，不等式 $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ から

$$\frac{5}{6}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{19}{6}\pi$$

ゆえに　$\frac{7}{24}\pi < \theta < \frac{11}{24}\pi$，$\frac{31}{24}\pi < \theta < \frac{35}{24}\pi$

(4) $0 \leqq \theta < 2\pi$ から　$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < 4\pi + \frac{\pi}{3}$

よって，不等式 $\tan\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) \geqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ から

$$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{2}\pi,$$

$$\frac{17}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{2}\pi,\ \frac{23}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{13}{3}\pi$$

ゆえに　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{7}{12}\pi$，$\frac{3}{4}\pi \leqq \theta < \frac{13}{12}\pi$，$\frac{5}{4}\pi \leqq \theta < \frac{19}{12}\pi$，

$\frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$

22 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$　　(2) $2\cos^2\theta - 3\sin\theta - 3 = 0$

(3) $2\sin^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta < 0$　　(4) $2\sin^2\theta - 4 < 5\cos\theta$

(5) $2\cos^2\theta \leqq \sin\theta + 1$　　(6) $\sin\theta < \tan\theta$

解答　(1) $\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$　(2) $\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　(3) $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$

(4) $0 \leqq \theta < \frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$　(5) $\theta = \frac{3}{2}\pi$，$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$

(6) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

解説

(1) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ から　$2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$

よって　$2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

ゆえに　$(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - 1) = 0$　……①

$\cos\theta + 2 \neq 0$ であるから，① より　$2\cos\theta - 1 = 0$

よって　$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(2) $2\cos^2\theta - 3\sin\theta - 3 = 0$ から　$2(1 - \sin^2\theta) - 3\sin\theta - 3 = 0$

よって　$2\sin^2\theta + 3\sin\theta + 1 = 0$

ゆえに　$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta + 1) = 0$

したがって　$\sin\theta = -1,\ -\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\sin\theta = -1$ のとき　$\theta = \frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ のとき　$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

よって，解は　$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(3) $2\sin^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta < 0$ から　$\sin\theta(2\sin\theta - \sqrt{3}) < 0$

よって　$0 < \sin\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，解は　$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$

(4) $2\sin^2\theta - 4 < 5\cos\theta$ から　$2(1 - \cos^2\theta) - 4 < 5\cos\theta$

よって　$2\cos^2\theta + 5\cos\theta + 2 > 0$

ゆえに　$(\cos\theta + 2)(2\cos\theta + 1) > 0$　……①

$\cos\theta + 2 > 0$ であるから，① より　$2\cos\theta + 1 > 0$

よって　$\cos\theta > -\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，解は　$0 \leqq \theta < \frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$

(5) $2\cos^2\theta \leqq \sin\theta + 1$ から　$2(1 - \sin^2\theta) \leqq \sin\theta + 1$

よって　$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 \geqq 0$

ゆえに　$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) \geqq 0$　……①

$\sin\theta + 1 \geqq 0$ であるから，① より　$\sin\theta + 1 = 0$ または $2\sin\theta - 1 \geqq 0$

よって　$\sin\theta = -1$ または $\sin\theta \geqq \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\sin\theta = -1$ のとき　$\theta = \frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta \geqq \frac{1}{2}$ のとき　$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta = \frac{3}{2}\pi$，$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$

(6) $\sin\theta < \tan\theta$ から　$\tan\theta\cos\theta < \tan\theta$

よって　$\tan\theta(1 - \cos\theta) > 0$　……①

$1 - \cos\theta \geqq 0$ であるから，① より　$\tan\theta > 0$ かつ $1 - \cos\theta \neq 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\tan\theta > 0$ のとき　$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

$1 - \cos\theta \neq 0$ のとき　$\theta \neq 0$

したがって，解は　$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

23 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\cos 2x < \sin x$　　(2) $\cos 2x \geqq \cos^2 x$

(3) $\cos x + \sin 2x > 0$

解答　(1) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$　(2) $x = 0,\ \pi$

(3) $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$，$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$，$\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

解説

(1) $\cos 2x < \sin x$ から　$1 - 2\sin^2 x < \sin x$

よって　$2\sin^2 x + \sin x - 1 > 0$

ゆえに　$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) > 0$

$\sin x + 1 \geqq 0$ であるから　$\sin x + 1 \neq 0$ かつ $2\sin x - 1 > 0$

よって　$\sin x \neq -1$ かつ $\sin x > \frac{1}{2}$

すなわち　$\sin x > \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから，解は　$\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5}{6}\pi$

(2)　$\cos 2x \geqq \cos^2 x$ から　$2\cos^2 x - 1 \geqq \cos^2 x$

よって　$\cos^2 x - 1 \geqq 0$

ゆえに　$(\cos x + 1)(\cos x - 1) \geqq 0$

よって　$\cos x \leqq -1$，$1 \leqq \cos x$

$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ であるから　$\cos x = -1$ または $\cos x = 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$\cos x = -1$ のとき　$x = \pi$

$\cos x = 1$ のとき　$x = 0$

したがって，解は　$x = 0$，π

(3)　$\cos x + \sin 2x > 0$ から　$\cos x + 2\sin x \cos x > 0$

よって　$\cos x(2\sin x + 1) > 0$

ゆえに　$(\cos x > 0$ かつ $2\sin x + 1 > 0)$

または $(\cos x < 0$ かつ $2\sin x + 1 < 0)$

すなわち　$\left(\cos x > 0 \text{ かつ } \sin x > -\dfrac{1}{2}\right)$　……①

または $\left(\cos x < 0 \text{ かつ } \sin x < -\dfrac{1}{2}\right)$　……②

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから，① より

$$\left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi\right) \text{ かつ } \left(0 \leqq x < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi\right)$$

よって　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから，② より　$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$　かつ　$\dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{11}{6}\pi$

よって　$\dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi$

したがって，解は　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

24 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\cos x + \cos 3x + \cos 5x < 0$ を解け。

解答　$\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{3}$

解説

$\cos x + \cos 3x + \cos 5x < 0$ から　$\cos x + 2\cos\dfrac{3x+5x}{2}\cos\dfrac{3x-5x}{2} < 0$

すなわち　$\cos x + 2\cos 4x \cos x < 0$

よって　$\cos x(2\cos 4x + 1) < 0$　……①

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos x > 0$

よって，① から　$2\cos 4x + 1 < 0$

ゆえに　$\cos 4x < -\dfrac{1}{2}$　……②

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ から　$0 \leqq 4x < 2\pi$

よって，② から　$\dfrac{2}{3}\pi < 4x < \dfrac{4}{3}\pi$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{3}$

25 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\sin x + \cos x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos x < \sqrt{3}\sin x$

(3)　$\sqrt{2} \leqq \sin x - \sqrt{3}\cos x < \sqrt{3}$

解答　(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi \leqq x < 2\pi$　(2)　$\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{7}{6}\pi$

(3)　$\dfrac{7}{12}\pi \leqq x < \dfrac{2}{3}\pi$，$\pi < x \leqq \dfrac{13}{12}\pi$

解説

(1)　$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから，不等式は　$\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \dfrac{1}{2}$　……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ であるから，① より

$$\frac{\pi}{4} \leqq x + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{6}\pi,\quad \frac{13}{6}\pi \leqq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

ゆえに　$0 \leqq x \leqq \dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi \leqq x < 2\pi$

(2)　不等式を変形すると　$\sqrt{3}\sin x - \cos x > 0$

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから，不等式は　$2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) > 0$

よって　$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) > 0$　……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{6} \leqq x - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{11}{6}\pi$ であるから，① より　$0 < x - \dfrac{\pi}{6} < \pi$

ゆえに　$\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{7}{6}\pi$

(3)　$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから，不等式は

$$\sqrt{2} \leqq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{3}$$

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ であるから，① より

$$\frac{\pi}{4} \leqq x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3},\quad \frac{2}{3}\pi < x - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{3}{4}\pi$$

ゆえに　$\dfrac{7}{12}\pi \leqq x < \dfrac{2}{3}\pi$，$\pi < x \leqq \dfrac{13}{12}\pi$

26 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$　　(2)　$2\cos^2\theta + 2 \geqq -7\sin\theta$

解答　(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$　(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$

解説

(1)　$2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$ から　$2(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta - 2 = 0$

よって　$2\cos^2\theta - \cos\theta = 0$　ゆえに　$\cos\theta(2\cos\theta - 1) = 0$

したがって　$\cos\theta = 0$，$\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\cos\theta = 0$ のとき　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

よって，解は　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$

(2)　$2\cos^2\theta + 2 \geqq -7\sin\theta$ から　$2(1 - \sin^2\theta) + 2 \geqq -7\sin\theta$

よって　$2\sin^2\theta - 7\sin\theta - 4 \leqq 0$　ゆえに　$(\sin\theta - 4)(2\sin\theta + 1) \leqq 0$

$\sin\theta - 4 < 0$ であるから　$2\sin\theta + 1 \geqq 0$　よって　$\sin\theta \geqq -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，解は　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$