1 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{343}$　　(2) $\sqrt[5]{32}$　　(3) $\sqrt[4]{0.0001}$

解答 (1) 7　(2) 2　(3) 0.1

解説

(1) $\sqrt[3]{343}=\sqrt[3]{7^3}=7$

(2) $\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

(3) $\sqrt[4]{0.0001}=\sqrt[4]{0.1^4}=0.1$

2 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[4]{9^2}$　　(2) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$　　(3) $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$　　(4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$　　(5) $\sqrt[8]{16}$

解答 (1) 3　(2) 2　(3) 5　(4) 3　(5) $\sqrt{2}$

解説

(1) $\sqrt[4]{9^2}=\sqrt[4]{(3^2)^2}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(2) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2\cdot 2^3}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{250}{2}}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[2\times 3]{3^6}=\sqrt[6]{3^6}=3$

(5) $\sqrt[8]{16}=\sqrt[8]{2^4}=\sqrt[2\times 4]{2^{1\times 4}}=\sqrt[2]{2}=\sqrt{2}$

3 次の値を求めよ。

(1) $4^{\frac{1}{2}}$　　(2) $125^{\frac{2}{3}}$　　(3) $25^{-\frac{3}{2}}$

解答 (1) 2　(2) 25　(3) $\dfrac{1}{125}$

解説

(1) $4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$

別解 $4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^{2\times\frac{1}{2}}=2^1=2$

(2) $125^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^2}=(\sqrt[3]{125})^2=5^2=25$

別解 $125^{\frac{2}{3}}=(5^3)^{\frac{2}{3}}=5^{3\times\frac{2}{3}}=5^2=25$

(3) $25^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{25^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{25^3}}=\dfrac{1}{(\sqrt{25})^3}=\dfrac{1}{5^3}=\dfrac{1}{125}$

別解 $25^{-\frac{3}{2}}=(5^2)^{-\frac{3}{2}}=5^{2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=5^{-3}=\dfrac{1}{5^3}=\dfrac{1}{125}$

4 次の式を計算せよ。

(1) $4^{\frac{1}{3}}\times 4^{\frac{1}{4}}\div 4^{\frac{1}{12}}$　　(2) $\left\{\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

(3) $\sqrt[4]{9}\times\sqrt[6]{27}$　　(4) $\sqrt{a^3}\times\sqrt[6]{a}$　　(5) $\sqrt{a}\div\sqrt[6]{a}\times\sqrt[3]{a^2}$

解答 (1) 2　(2) $\dfrac{3}{4}$　(3) 3　(4) $a\sqrt[3]{a^2}$　(5) a

解説

(1) 与式$=4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$

(2) 与式$=(2^4\cdot 3^{-2})^{-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}=(2^4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3^{-2})^{-\frac{1}{2}}=2^{-2}\cdot 3^1=\dfrac{3}{2^2}=\dfrac{3}{4}$

(3) 与式$=(3^2)^{\frac{1}{4}}\times(3^3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=3^1=3$

(4) 与式$=a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{6}}=a^{\frac{5}{3}}=a^{1+\frac{2}{3}}=a\cdot a^{\frac{2}{3}}=a\sqrt[3]{a^2}$

(5) 与式$=a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}=a^1=a$

5 次の式を計算せよ。

(1) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$

(2) $\left(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}\right)$

解答 (1) 1　(2) 5

解説

(1) $\sqrt[3]{3}=a$，$\sqrt[3]{2}=b$ とおくと　$a^3=3$，$b^3=2$

与式$=(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3=3-2=1$

(2) $2^{\frac{1}{4}}=x$，$3^{\frac{1}{4}}=y$ とおくと　$x^2=2^{\frac{1}{2}}$，$x^4=2$，$y^2=3^{\frac{1}{2}}$，$y^4=3$

与式$=(x^2+x^3y+y^2)(x^2-x^3y+y^2)$

$=(x^2+y^2)^2-(x^3y)^2=x^4+2x^2y^2+y^4-x^6y^2$

$=2+2x^2y^2+3-2x^2y^2=5$

6 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+x^{-1}$　　(2) x^2+x^{-2}

解答 (1) 7　(2) 47

解説

(1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ の両辺を 2 乗すると　$x+2+x^{-1}=9$

よって　$x+x^{-1}=7$

(2) $x+x^{-1}=7$ の両辺を 2 乗すると　$x^2+2+x^{-2}=49$

よって　$x^2+x^{-2}=47$

7 (1) 次の式を計算せよ。

(ア) $8^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}\div 8^{\frac{1}{6}}$　　(イ) $(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{2}}b^{-1}$　$(a>0,\ b>0)$

(2) $\sqrt[3]{-27}=$ ア $\boxed{}$，$64^{\frac{2}{3}}=$ イ $\boxed{}$，16 の実数である 4 乗根は ウ $\boxed{}$ である。

(3) $(\sqrt[3]{16}+2\sqrt[6]{4}-3\sqrt[9]{8})^3$ を簡単にせよ。

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{a^9}}\div\sqrt[4]{\left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}}$ を簡単にせよ。

解答 (1) (ア) 4　(イ) a　(2) (ア) -3　(イ) 16　(ウ) ± 2

(3) 2　(4) $a^{-\frac{3}{2}}$

解説

(1) (ア) $8^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}\div 8^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$

(イ) $(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{2}}b^{-1}=a^{-\frac{1}{2}}b^{(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\times a^{\frac{3}{2}}b^{-1}$

$=a^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}b^{1-1}=a^{\frac{2}{2}}b^0=a$

(2) $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-2)^3}=$ ア -3，　$64^{\frac{2}{3}}=(4^3)^{\frac{2}{3}}=4^2=$ イ 16

16 の 4 乗根は $x^4=16$ を満たす数 x である。

$x^4=16$ を変形すると　$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

この方程式の実数解が求めるものであるから　ウ ± 2

(3) $(\sqrt[3]{16}+2\sqrt[6]{4}-3\sqrt[9]{8})^3=(2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2})^3=(\sqrt[3]{2})^3=2$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{a^9}}\div\sqrt[4]{\left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}}=\left(a^{\frac{9}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\div\left(a^{\frac{8}{3}\times\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$

$=a^{\frac{3}{2}}\div a^3=a^{\frac{3}{2}-3}=a^{-\frac{3}{2}}$

8 $a>0$，$b>0$ とする。次の (1) ～ (6) の式を簡単にせよ。また，(7)，(8) の式を計算せよ。

(1) $2^0+2^{-2}-3\cdot 2^{-3}$　　(2) $a^2\times(a^{-1})^3\div a^{-2}$

(3) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^6\div\left\{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{-2}b^{-5}\right\}$　　(4) $\sqrt[4]{16}$，　$\sqrt[4]{625}$，　$\sqrt[5]{-243}$

(5) $27^{\frac{2}{3}}$，　$64^{-\frac{2}{3}}$，　$9^{1.5}$　　(6) $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{6}$，$\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

(7) $(\sqrt[3]{3}+5\sqrt[6]{9}-2\sqrt[9]{27})^3$　　(8) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}\times\sqrt{16}\div\sqrt[3]{8}$

解答 (1) $\dfrac{7}{8}$　(2) a　(3) a^6b　(4) 順に 2，5，-3

(5) 順に 9，$\dfrac{1}{16}$，27　(6) 順に $3\sqrt[3]{2}$，3　(7) 192　(8) 4

解説

(1) $2^0+2^{-2}-3\cdot 2^{-3}=1+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{3}{2^3}=1+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{8}$

(2) $a^2\times(a^{-1})^3\div a^{-2}=a^2\times a^{(-1)\times 3}\div a^{-2}=a^{2-3-(-2)}=a$

(3) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^6\div\left\{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{-2}b^{-5}\right\}=a^{\frac{1}{2}\times 6}b^{\left(-\frac{2}{3}\right)\times 6}\div\left\{a^{\frac{3}{2}\times(-2)}b^{-5}\right\}$

$=a^3b^{-4}\div a^{-3}b^{-5}=a^{3-(-3)}b^{-4-(-5)}=a^6b$

(4) $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$，　$\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$，　$\sqrt[5]{-243}=\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$

(5) $27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$，　$64^{-\frac{2}{3}}=(2^6)^{-\frac{2}{3}}=2^{-4}=\dfrac{1}{16}$，　$9^{1.5}=(3^2)^{1.5}=3^3=27$

(6) $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{9\cdot 6}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}$，

$\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(7) $(\sqrt[3]{3}+5\sqrt[6]{9}-2\sqrt[9]{27})^3=(\sqrt[3]{3}+5\sqrt[6]{3^2}-2\sqrt[9]{3^3})^3$

$=(\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3})^3=(4\sqrt[3]{3})^3=64\cdot 3=192$

(8) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}\times\sqrt{16}\div\sqrt[3]{8}=\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times 16^{\frac{1}{2}}\div 8^{\frac{1}{3}}=\left\{(2^6)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{2}}\div(2^3)^{\frac{1}{3}}$

$=2\times 2^2\div 2=2^{1+2-1}=2^2=4$

9 (1) 次の式を計算せよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(ア) $(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$　　(イ) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$

(ウ) $\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

(2) (ア) $x>0$，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ のとき，$x+x^{-1}$，$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。

(イ) $a>0$，$x>0$，$a^x+a^{-x}=5$ のとき，$a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}$，$a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}$ の値を求めよ。

解答 (1) (ア) -1　(イ) $2(a+b)$　(ウ) $a-b$

(2) (ア) 順に 3，$2\sqrt{5}$　(イ) 順に $\sqrt{7}$，$4\sqrt{7}$

解説

(1) (ア) $(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=\{(\sqrt[4]{2})^2-(\sqrt[4]{3})^2\}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=(\sqrt[4]{2^2}-\sqrt[4]{3^2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=2-3=-1$

(イ) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2=2\left\{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2\right\}=2(a+b)$

(ウ) $\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\left\{\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{6}}\right)^2\right\}\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3=a-b$

(2) (ア) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ の両辺を2乗すると

$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=5$

すなわち　$x+2+x^{-1}=5$

よって　$x+x^{-1}=3$

また　$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^3-3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$=(\sqrt{5})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

別解　$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)(x-1+x^{-1})=\sqrt{5}(3-1)=2\sqrt{5}$

(イ) $a>0$，$x>0$ のとき　$a^{\frac{1}{2}x}>0$，$a^{-\frac{1}{2}x}>0$

よって　$a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}>0$ ……①

$\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)^2=a^x+2+a^{-x}=5+2=7$

①から　$a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}=\sqrt{7}$

また　$a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}=\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3-3a^{\frac{1}{2}x}a^{-\frac{1}{2}x}\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)$

$=(\sqrt{7})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

別解　$a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}=\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)(a^x-1+a^{-x})$

$=\sqrt{7}(5-1)=4\sqrt{7}$

10 次の式を計算せよ。ただし，a≒0，b≒0 とする。

(1) $3^2\times3^{-3}\div3^{-4}$　(2) $5^3\times(5^{-1})^2\div5$　(3) $(-2^{-1})^{-3}\div2^{-3}\times2^4$

解答　(1) 27　(2) 1　(3) -1024

解説

(1) $3^2\times3^{-3}\div3^{-4}=3^{2+(-3)-(-4)}=3^3=27$

(2) $5^3\times(5^{-1})^2\div5=5^3\times5^{-2}\div5=5^{3+(-2)-1}=5^0=1$

(3) $(-2^{-1})^{-3}\div2^{-3}\times2^4=-2^3\div2^{-3}\times2^4=-2^{3-(-3)+4}=-2^{10}=-1024$

11 次の式を計算せよ。ただし，a≒0，b≒0 とする。

(1) $\sqrt[4]{256}$　(2) $\sqrt[3]{216}$　(3) $\sqrt[5]{0.00001}$

解答　(1) 4　(2) 6　(3) 0.1

解説

(1) $\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$

(2) $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$

(3) $\sqrt[5]{0.00001}=\sqrt[5]{0.1^5}=0.1$

12 次の式を計算せよ。ただし，a≒0，b≒0 とする。

(1) $(\sqrt[4]{5})^8$　(2) $\sqrt[4]{4^8}$　(3) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{10}$　(4) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}$

(5) $\dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}$　(6) $\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$　(7) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$　(8) $\sqrt[8]{81}$

解答　(1) 25　(2) 16　(3) $2\sqrt[3]{5}$　(4) 3　(5) 2　(6) $2\sqrt[3]{2}$　(7) 2　(8) $\sqrt{3}$

解説

(1) $(\sqrt[4]{5})^8=\{(\sqrt[4]{5})^4\}^2=5^2=25$

(2) $\sqrt[4]{4^8}=\sqrt[4]{(4^2)^4}=4^2=16$

(3) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{4\cdot10}=\sqrt[3]{2^3\cdot5}=\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$

(4) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\cdot27}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(5) $\dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\dfrac{64}{4}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(6) $\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{48}{3}}=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\cdot2}=2\sqrt[3]{2}$

(7) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}=\sqrt[5\times2]{2^{10}}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$

(8) $\sqrt[8]{81}=\sqrt[8]{3^4}=\sqrt{3}$

13 次の式を計算せよ。ただし，a≒0，b≒0 とする。

(1) $9^{\frac{3}{2}}$　(2) $8^{-\frac{4}{3}}$　(3) $0.04^{1.5}$　(4) $\left(\dfrac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

解答　(1) 27　(2) $\dfrac{1}{16}$　(3) 0.008（$\dfrac{1}{125}$）　(4) $\dfrac{16}{25}$

解説

(1) $9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$

(2) $8^{-\frac{4}{3}}=(2^3)^{-\frac{4}{3}}=2^{-4}=\dfrac{1}{16}$

(3) $0.04^{1.5}=(0.2^2)^{1.5}=0.2^3=0.008$　（$0.008=\dfrac{8}{1000}=\dfrac{1}{125}$）

(4) $\left(\dfrac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^3\right\}^{-\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-2}=\dfrac{16}{25}$

14 次の式を計算せよ。

(1) $6^{\frac{1}{2}}\times36^{\frac{1}{4}}$　(2) $2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{6}}\div2^{\frac{1}{3}}$　(3) $(9^{\frac{2}{3}}\times3^{-2})^{\frac{3}{2}}$　(4) $\left\{\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

解答　(1) 6　(2) 1　(3) $\dfrac{1}{3}$　(4) $\dfrac{5}{4}$

解説

(1) $6^{\frac{1}{2}}\times36^{\frac{1}{4}}=6^{\frac{1}{2}}\times6^{2\cdot\frac{1}{4}}=6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=6^1=6$

(2) $2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{6}}\div2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=2^0=1$

(3) $(9^{\frac{2}{3}}\times3^{-2})^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}\times3^{-2\cdot\frac{3}{2}}=3^2\times3^{-3}=3^{2-3}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

(4) $\left\{\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}=\left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\cdot(-\frac{1}{2})}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-1}=\dfrac{5}{4}$

15 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{6}$　(2) $\sqrt[4]{6}\times\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}$

(3) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$　(4) $2\sqrt[4]{5}+3\sqrt[4]{5}$

(5) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}$　(6) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{512}$

解答　(1) $2\sqrt[3]{6}$　(2) $6\sqrt[4]{2}$　(3) $3\sqrt{2}$　(4) $5\sqrt[4]{5}$　(5) $\sqrt[3]{3}$　(6) $-\sqrt[4]{2}$

解説

(1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{2\cdot4\cdot6}=\sqrt[3]{2^3\cdot6}=2\sqrt[3]{6}$

(2) $\sqrt[4]{6}\times\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}=\sqrt[4]{6\cdot12}\times\sqrt{6}=\sqrt[4]{6^2\cdot2}\times\sqrt{6}$

$=\sqrt{6}\sqrt[4]{2}\times\sqrt{6}=6\sqrt[4]{2}$

(3) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\times\dfrac{1}{\sqrt[4]{6}}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{\dfrac{54}{6}}$

$=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{9}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

(4) $2\sqrt[4]{5}+3\sqrt[4]{5}=(2+3)\sqrt[4]{5}=5\sqrt[4]{5}$

(5) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3^3\cdot3}-\sqrt[3]{2^3\cdot3}=3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}$

(6) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{512}=\sqrt[4]{2^4\cdot2}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{4^4\cdot2}$

$=2\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}-4\sqrt[4]{2}=-\sqrt[4]{2}$

16 次の式を計算せよ。

(1) $(\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{5})(\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{5})$　(2) $\left(5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)$

(3) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})^3$

解答　(1) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$　(2) 8　(3) $8+12\sqrt[3]{2}$

解説

(1) $(\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{5})(\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{5})=(\sqrt[4]{6})^2-(\sqrt[4]{5})^2=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

(2) $\left(5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)=\left(5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2-5^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$=\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3=5+3=8$

(3) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})^3$

$=(\sqrt[3]{4})^3+3(\sqrt[3]{4})^2\cdot\sqrt[3]{2}+3\cdot\sqrt[3]{4}\cdot(\sqrt[3]{2})^2+(\sqrt[3]{2})^3$

$+(\sqrt[3]{4})^3-3(\sqrt[3]{4})^2\cdot\sqrt[3]{2}+3\cdot\sqrt[3]{4}\cdot(\sqrt[3]{2})^2-(\sqrt[3]{2})^3$

$=2\cdot(\sqrt[3]{4})^3+6\cdot\sqrt[3]{4}\cdot(\sqrt[3]{2})^2=2\cdot4+6\cdot2^{\frac{2}{3}}\cdot2^{\frac{2}{3}}$

$=8+6\cdot2^{\frac{4}{3}}=8+6\sqrt[3]{2^4}=8+12\sqrt[3]{2}$

別解　$\sqrt[3]{2}=a$ とおくと　$\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2})^2=a^2$

したがって　$(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})^3=(a^2+a)^3+(a^2-a)^3$

$=\{a(a+1)\}^3+\{a(a-1)\}^3=a^3\{(a+1)^3+(a-1)^3\}$

$=a^3(a^3+3a^2+3a+1+a^3-3a^2+3a-1)$

$=a^3(2a^3+6a)$

ここで，$a^3=2$ であるから　$(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})^3=2(2\cdot2+6\sqrt[3]{2})=8+12\sqrt[3]{2}$

17 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{-216}$　(2) $\sqrt[5]{-32}$

(3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$ (4) $\sqrt[3]{54}\times 2\sqrt[3]{-2}\times\sqrt[3]{16}$

(5) $\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{-3}$

解答 (1) -6 (2) -2 (3) $-\frac{1}{4}$ (4) -24 (5) 0

解説

(1) $\sqrt[3]{-216}=\sqrt[3]{(-6)^3}=-6$

別解 $\sqrt[3]{-216}=-\sqrt[3]{216}=-\sqrt[3]{6^3}=-6$

(2) $\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$

別解 $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}=-\sqrt[5]{2^5}=-2$

(3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{4}\right)^3}=-\frac{1}{4}$

別解 $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=-\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^3}=-\frac{1}{4}$

(4) $\sqrt[3]{54}\times 2\sqrt[3]{-2}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}\times 2\,(-\sqrt[3]{2})\times\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}\times(-2\sqrt[3]{2})\times 2\sqrt[3]{2}$

$=-12(\sqrt[3]{2})^3=-12\cdot 2=-24$

(5) $\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{-3}=-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}=-\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3}-\sqrt[3]{3}$

$=-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=0$

参考 n が奇数のとき $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

18 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$ のとき，$x+x^{-1}$，x^3+x^{-3} の値を求めよ。

解答 $x+x^{-1}=18$，$x^3+x^{-3}=5778$

解説

$x+x^{-1}=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)=3^3-3\cdot 3=18$

$x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})^3-3xx^{-1}(x+x^{-1})=(x+x^{-1})^3-3(x+x^{-1})$

$=18^3-3\cdot 18=5778$

19 $a>0$，$a^{2x}=5$ のとき，$(a^{4x}-a^{-4x})\div(a^x-a^{-x})$ の値を求めよ。

解答 $\frac{156\sqrt{5}}{25}$

解説

$a^{4x}-a^{-4x}=(a^{2x})^2-(a^{-2x})^2=(a^{2x}+a^{-2x})(a^{2x}-a^{-2x})$

$=(a^{2x}+a^{-2x})\{(a^x)^2-(a^{-x})^2\}=(a^{2x}+a^{-2x})(a^x+a^{-x})(a^x-a^{-x})$

よって $(a^{4x}-a^{-4x})\div(a^x-a^{-x})=(a^{2x}+a^{-2x})(a^x+a^{-x})$

$=\left(a^{2x}+\frac{1}{a^{2x}}\right)\left(a^x+\frac{1}{a^x}\right)$

ここで $a>0$，$a^{2x}=5$ から $a^x=\sqrt{5}$

ゆえに 与式$=\left(5+\frac{1}{5}\right)\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{156\sqrt{5}}{25}$

20 $2^x-2^{-x}=3$ のとき，2^x+2^{-x} の値を求めよ。

解答 $\sqrt{13}$

解説

$(2^x+2^{-x})^2=(2^x-2^{-x})^2+4\cdot 2^x 2^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+4=3^2+4=13$

$2^x+2^{-x}>0$ であるから $2^x+2^{-x}=\sqrt{13}$

21 $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=5$ のとき，$a+a^{-1}$ の値を求めよ。

解答 110

解説

$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)=5^3-3\cdot 1\cdot 5=110$

22 次の値を求めよ。

(1) 10^0 (2) 2^{-4} (3) $(-5)^{-3}$ (4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ (5) 0.5^{-4}

解答 (1) 1 (2) $\frac{1}{16}$ (3) $-\frac{1}{125}$ (4) 9 (5) 16

解説

(1) $10^0=1$

(2) $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

(3) $(-5)^{-3}=\frac{1}{(-5)^3}=-\frac{1}{125}$

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{9}}=9$

(5) $0.5^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$

23 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{16}$ (2) $\sqrt[3]{216}$ (3) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ (4) $\sqrt[5]{0.00001}$

解答 (1) 2 (2) 6 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 0.1

解説

(1) $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(2) $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$

(3) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{2}$

(4) $\sqrt[5]{0.00001}=\sqrt[5]{0.1^5}=0.1$

別解 $\sqrt[5]{0.00001}=\sqrt[5]{\frac{1}{100000}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{10}\right)^5}=\frac{1}{10}$

24 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}$ (2) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$ (3) $(\sqrt[6]{4})^3$ (4) $\sqrt[4]{\sqrt{7}}$

解答 (1) 3 (2) $2\sqrt[3]{2}$ (3) 2 (4) $\sqrt[8]{7}$

解説

(1) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times 27}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(2) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{48}{3}}=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

(3) $(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{(2^2)^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$

別解 指数が有理数のときの指数法則を学習済の場合，次のように解答してもよい。

(解 1) $(\sqrt[6]{4})^3=\left(4^{\frac{1}{6}}\right)^3=\left\{(2^2)^{\frac{1}{6}}\right\}^3=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3=2^1=2$

(解 2) $(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4^3}=4^{\frac{3}{6}}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$

(4) $\sqrt[4]{\sqrt{7}}=\sqrt[4]{\sqrt[2]{7}}=\sqrt[4\times 2]{7}=\sqrt[8]{7}$

25 次の値を求めよ。

(1) $8^{\frac{1}{3}}$ (2) $16^{\frac{3}{4}}$ (3) $81^{-\frac{5}{4}}$ (4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$ (5) $0.01^{-\frac{3}{2}}$

解答 (1) 2 (2) 8 (3) $\frac{1}{243}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) 1000

解説

(1) $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

別解 $8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2^1=2$

(2) $16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=(\sqrt[4]{16})^3=(\sqrt[4]{2^4})^3=2^3=8$

別解 $16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$

(3) $81^{-\frac{5}{4}}=\frac{1}{81^{\frac{5}{4}}}=\frac{1}{(\sqrt[4]{81})^5}=\frac{1}{(\sqrt[4]{3^4})^5}=\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243}$

別解 $81^{-\frac{5}{4}}=(3^4)^{-\frac{5}{4}}=3^{-5}=\frac{1}{243}$

(4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{125}{64}}=\sqrt[3]{\left(\frac{5}{4}\right)^3}=\frac{5}{4}$

別解 $\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}}=\frac{5}{4}$

(5) $0.01^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{0.01^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(\sqrt{0.01})^3}=\frac{1}{0.1^3}=\frac{1}{0.001}=1000$

別解 1 $0.01^{-\frac{3}{2}}=(0.1^2)^{-\frac{3}{2}}=0.1^{-3}=\frac{1}{0.1^3}=\frac{1}{0.001}=1000$

別解 2 $0.01^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{3}{2}}=(10^{-2})^{-\frac{3}{2}}=10^3=1000$

26 次の式を計算せよ。

(1) $3^{-\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{5}{3}}$ (2) $4^{\frac{5}{6}}\div 4^{\frac{1}{3}}$ (3) $\left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$

(4) $2^{\frac{5}{6}}\div 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{2}}$ (5) $\sqrt{7}\times\sqrt[3]{7}\times\sqrt[6]{7}$ (6) $\sqrt[3]{5^2}\times\sqrt{5^3}\div\sqrt[6]{5}$

解答 (1) 3 (2) 2 (3) 125 (4) 8 (5) 7 (6) 25

解説

(1) $3^{-\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{5}{3}}=3^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}}=3^1=3$

(2) $4^{\frac{5}{6}}\div 4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$

(3) $\left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}=5^{\frac{4}{3}\times\frac{9}{4}}=5^3=125$

(4) $2^{\frac{5}{6}}\div 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{2}}=2^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}}=2^3=8$

(5) $\sqrt{7}\times\sqrt[3]{7}\times\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{2}}\times 7^{\frac{1}{3}}\times 7^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=7^1=7$

(6) $\sqrt[3]{5^2}\times\sqrt{5^3}\div\sqrt[6]{5}=5^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{3}{2}}\div 5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}}=5^2=25$

27 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{2}\div\sqrt[3]{54}$　(2) $\left(2^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}$　(3) $\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{2}}\div5^{-2}$

(4) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}\times5^{-\frac{1}{3}}\div5^{\frac{1}{2}}$　(5) $\sqrt{7}\times\sqrt[4]{7}\div\sqrt[12]{7^5}$　(6) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{32}}$

解答 (1) $\frac{1}{3}$　(2) $\sqrt{2}$　(3) 3125　(4) 1　(5) $\sqrt[3]{7}$　(6) 2

解説

(1) $\sqrt[3]{2}\div\sqrt[3]{54}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}=\sqrt[3]{\frac{2}{54}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{1}{3}$

(2) $\left(2^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(2^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

別解 $\left(2^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}\times2^{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{8}}\times2^{\frac{3}{8}}=2^{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

(3) $\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{2}}\div5^{-2}=(5^{-1})^{-\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}}\times5^2=5^3\times5^2=5^5=3125$

(4) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}\times5^{-\frac{1}{3}}\div5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{5}{6}}\times5^{-\frac{1}{3}}\div5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}}=5^0=1$

(5) $\sqrt{7}\times\sqrt[4]{7}\div\sqrt[12]{7^5}=7^{\frac{1}{2}}\times7^{\frac{1}{4}}\div7^{\frac{5}{12}}=7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{5}{12}}=7^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{7}$

(6) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{32}}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt[2]{32}}=\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{32}=\sqrt[6]{2\times32}=\sqrt[6]{2^6}=2$

別解 $\sqrt{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{32}}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(32^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}\times(2^5)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}}=2^1=2$

28 次の計算をせよ。

(1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$　(2) $0.09^{1.5}$　(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

(4) $\sqrt{2}\div\sqrt[4]{4}\times\sqrt[12]{32}\div\sqrt[6]{2}$　(5) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$

解答 (1) $\frac{16}{81}$　(2) 0.027　(3) 2　(4) $\sqrt[4]{2}$　(5) $\sqrt{2}$　(6) $3\sqrt[3]{3}$

解説

(1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{4}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(2) $0.09^{1.5}=0.09^{\frac{3}{2}}=(0.3^2)^{\frac{3}{2}}=0.3^{2\times\frac{3}{2}}=0.3^3=0.027$

別解 $0.09^{1.5}=\left(\frac{9}{100}\right)^{\frac{3}{2}}=\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{27}{1000}=0.027$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

別解 $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ であるから　$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2$

(4) $\sqrt{2}\div\sqrt[4]{4}\times\sqrt[12]{32}\div\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}\div2^{\frac{2}{4}}\times2^{\frac{5}{12}}\div2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$

(5) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot3^0=\sqrt{2}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot3}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\frac{3}{3^3}}$

$=2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

$=\left(2+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$

29 次の計算をせよ。

(1) $(3^2)^{-3}\times3^3\div9^{-2}$　(2) $\left(8^{\frac{1}{2}}\times4^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\div\left(4^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$

(3) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{18}$　(4) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}\div\sqrt{3}$

解答 (1) 3　(2) 4　(3) 6　(4) 1

解説

(1) $(3^2)^{-3}\times3^3\div9^{-2}=3^{-6}\times3^3\div(3^2)^{-2}=3^{-6+3-(-4)}=3$

(2) $\left(8^{\frac{1}{2}}\times4^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\div\left(4^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left\{(2^3)^{\frac{1}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{1}{2}}\div\left\{(2^2)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

$=\left(2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\div\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

$=\left(2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\div2^{-1}=(2^2)^{\frac{1}{2}}\times2=2\times2=4$

(3) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{18}=\sqrt[3]{2\times6\times18}=\sqrt[3]{2\times(2\cdot3)\times(2\cdot3^2)}$

$=\sqrt[3]{2^3\times3^3}=\sqrt[3]{6^3}=6$

(4) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}\div\sqrt{3}=3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}\div3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}=3^0=1$

30 次の計算をせよ。

(1) $7^{\frac{2}{3}}\times49^{\frac{1}{6}}$　(2) $5^{-\frac{1}{2}}\times5^{\frac{5}{6}}\div5^{\frac{1}{3}}$　(3) $\left(36^{\frac{3}{4}}\times6^{-3}\right)^{\frac{4}{3}}$

(4) $\left\{\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{7}}\right\}^{\frac{7}{6}}$　(5) $\sqrt[4]{4}\times\sqrt[6]{8}$　(6) $(\sqrt[3]{4})^2\times\sqrt[6]{16}$

解答 (1) 7　(2) 1　(3) $\frac{1}{36}$　(4) $\frac{4}{3}$　(5) 2　(6) 4

解説

(1) $7^{\frac{2}{3}}\times49^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{2}{3}}\times(7^2)^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{2}{3}}\times7^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=7^1=7$

(2) $5^{-\frac{1}{2}}\times5^{\frac{5}{6}}\div5^{\frac{1}{3}}=5^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=5^0=1$

(3) $\left(36^{\frac{3}{4}}\times6^{-3}\right)^{\frac{4}{3}}=\left\{(6^2)^{\frac{3}{4}}\times6^{-3}\right\}^{\frac{4}{3}}=\left(6^{\frac{3}{2}}\times6^{-3}\right)^{\frac{4}{3}}$

$=\left(6^{\frac{3}{2}-3}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(6^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}=6^{-2}=\frac{1}{36}$

別解 $\left(36^{\frac{3}{4}}\times6^{-3}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(36^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}\times(6^{-3})^{\frac{4}{3}}=6^2\times6^{-4}$

$=6^{2-4}=6^{-2}=\frac{1}{36}$

(4) $\left\{\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{7}}\right\}^{\frac{7}{6}}=\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{7}\times\frac{7}{6}}=\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{3^{-1}}{4^{-1}}=\frac{4}{3}$

(5) $\sqrt[4]{4}\times\sqrt[6]{8}=(2^2)^{\frac{1}{4}}\times(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=2^1=2$

(6) $(\sqrt[3]{4})^2\times\sqrt[6]{16}=\left\{(2^2)^{\frac{1}{3}}\right\}^2\times(2^4)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{4}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}=2^2=4$

31 次の式を計算せよ。

(1) $3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{4}{3}}$　(2) $5^{-\frac{1}{3}}\times5^{\frac{4}{3}}$　(3) $16^{\frac{3}{8}}\div16^{-\frac{5}{8}}$

(4) $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}$　(5) $\left(8^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$　(6) $\left\{\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

解答 (1) 9　(2) 5　(3) 16　(4) 81　(5) 4　(6) $\frac{5}{4}$

解説

(1) $3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{4}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=3^2=9$

(2) $5^{-\frac{1}{3}}\times5^{\frac{4}{3}}=5^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=5^1=5$

(3) $16^{\frac{3}{8}}\div16^{-\frac{5}{8}}=16^{\frac{3}{8}-\left(-\frac{5}{8}\right)}=16^1=16$

(4) $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}=3^{\frac{6}{5}\times\frac{10}{3}}=3^4=81$

(5) $\left(8^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}=8^{\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$

(6) $\left\{\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}=\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{4}$

32 次の式を計算せよ。

(1) $2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{6}}$　(2) $\left(3^{\frac{4}{3}}\times3^{-2}\right)^{\frac{9}{2}}$　(3) $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\times4^{\frac{1}{6}}\div4^{\frac{1}{3}}$

(4) $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}$　(5) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[4]{5}\div\sqrt[12]{5}$

解答 (1) $\sqrt[3]{2}$　(2) $\frac{1}{27}$　(3) 2　(4) 3　(5) $\sqrt{5}$

解説

(1) $2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{6}}=2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$

(2) $\left(3^{\frac{4}{3}}\times3^{-2}\right)^{\frac{9}{2}}=\left(3^{\frac{4}{3}-2}\right)^{\frac{9}{2}}=\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}=3^{-\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}}=3^{-3}=\frac{1}{27}$

(3) $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\times4^{\frac{1}{6}}\div4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}}\times4^{\frac{1}{6}}\div4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{2}{3}}\times4^{\frac{1}{6}}\div4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$

(4) $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^1=3$

(5) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[4]{5}\div\sqrt[12]{5}=5^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{4}}\div5^{\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

33 次の式を計算せよ。

(1) $2^5\times2^{-3}$　(2) $(6^2)^4\div6^7$　(3) $(5^2\times3^{-1})^3\times(5^{-3})^2$

解答 (1) 4　(2) 6　(3) $\frac{1}{27}$

解説

(1) $2^5\times2^{-3}=2^{5-3}=2^2=4$

(2) $(6^2)^4\div6^7=6^{2\times4}\div6^7=6^8\div6^7=6^{8-7}=6^1=6$

(3) $(5^2\times3^{-1})^3\times(5^{-3})^2=(5^2)^3\times(3^{-1})^3\times(5^{-3})^2$

$=5^{2\times3}\times3^{-1\times3}\times5^{-3\times2}$

$=3^{-3}\times5^6\times5^{-6}$

$=\frac{5^{6-6}}{3^3}=\frac{5^0}{27}=\frac{1}{27}$

34 次の式を計算せよ。

(1) $8^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}\div 8^{\frac{1}{6}}$　　(2) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}$

解答 (1) 4　(2) 2

解説

(1) $8^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}\div 8^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^1=2$

35 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{-125}$　(2) $\sqrt[5]{-32}$　(3) $\sqrt[3]{-0.001}$

解答 (1) -5　(2) -2　(3) -0.1

解説

(1) $\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$

(2) $\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$

(3) $\sqrt[3]{-0.001}=\sqrt[3]{(-0.1)^3}=-0.1$

別解 $\sqrt[3]{-0.001}=\sqrt[3]{-\dfrac{1}{1000}}=\sqrt[3]{\left(-\dfrac{1}{10}\right)^3}=-\dfrac{1}{10}$

36 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[4]{8}\times 4^{\frac{7}{8}}\div\sqrt{2}$　(2) $\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{5}{6}}\times\sqrt[6]{27}$　(3) $\sqrt[3]{\sqrt{32}}\times\sqrt{8}\div\sqrt[3]{16}$

解答 (1) 4　(2) 9　(3) 2

解説

(1) $\sqrt[4]{8}\times 4^{\frac{7}{8}}\div\sqrt{2}=\sqrt[4]{2^3}\times(2^2)^{\frac{7}{8}}\div\sqrt{2}=2^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{7}{4}}\div 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{7}{4}-\frac{1}{2}}=2^2=4$

(2) $\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{5}{6}}\times\sqrt[6]{27}=\sqrt[3]{3^2}\times 3^{\frac{5}{6}}\times\sqrt[6]{3^3}=3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{5}{6}}\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}=3^2=9$

(3) $\sqrt[3]{\sqrt{32}}\times\sqrt{8}\div\sqrt[3]{16}=\sqrt[3\times 2]{2^5}\times\sqrt{2^3}\div\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{5}{6}}\times 2^{\frac{3}{2}}\div 2^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}=2^1=2$

37 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}$　(2) $\sqrt[3]{54}-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}$

(3) $\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{5}$　(4) $\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

解答 (1) $5\sqrt[3]{3}$　(2) 0　(3) $4\sqrt[3]{5}$　(4) $\dfrac{15}{2}\sqrt[3]{2}$

解説

(1) $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}+\sqrt[3]{2^3\cdot 3}$
$=3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}$
$=(3+2)\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}$

(2) $\sqrt[3]{54}-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^3\cdot 2}$
$=3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}$
$=(3-5+2)\sqrt[3]{2}=0$

(3) $\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{3^3\cdot 5}+\sqrt[3]{2^3\cdot 5}-\sqrt[3]{5}$
$=3\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}$
$=(3+2-1)\sqrt[3]{5}=4\sqrt[3]{5}$

(4) $\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=\sqrt[3]{5^3\cdot 2}+\sqrt[3]{3^3\cdot 2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$
$=5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}}$
$=5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$
$=\left(5+3-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt[3]{2}=\dfrac{15}{2}\sqrt[3]{2}$

参考 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ は次のように変形してもよい。
$\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{8}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

38 $2^x-2^{-x}=1$ のとき，4^x+4^{-x}，8^x-8^{-x} の値を求めよ。

解答 順に 3，4

解説

$4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x-2^{-x})^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=1^2+2\cdot 1=3$

$8^x-8^{-x}=2^{3x}-2^{-3x}=(2^x-2^{-x})^3+3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x-2^{-x})=1^3+3\cdot 1\cdot 1=4$

注意 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$ が成り立つ。

別解 (8^x-8^{-x} の求め方)
$8^x-8^{-x}=2^{3x}-2^{-3x}=(2^x-2^{-x})(2^{2x}+2^x\cdot 2^{-x}+2^{-2x})$
$=(2^x-2^{-x})(4^x+4^{-x}+1)=1\cdot(3+1)=4$

39 $a>0$，$a^{2x}=5$ のとき，$(a^{3x}+a^{-3x})\div(a^x+a^{-x})$ の値を求めよ。

解答 $\dfrac{21}{5}$

解説

$(a^{3x}+a^{-3x})\div(a^x+a^{-x})=\dfrac{(a^x)^3+(a^{-x})^3}{a^x+a^{-x}}$
$=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$
$=a^{2x}-1+a^{-2x}=a^{2x}-1+\dfrac{1}{a^{2x}}$
$=5-1+\dfrac{1}{5}=\dfrac{21}{5}$

40 次の式を計算せよ。

(1) $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}$　(2) $5^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{5}{3}}\div 5^{\frac{1}{6}}$　(3) $\sqrt[3]{2}\div\sqrt[6]{2^5}\times\sqrt{2^3}$

解答 (1) 81　(2) 25　(3) 2

解説

(1) $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}=3^{\frac{6}{5}\times\frac{10}{3}}=3^4=81$

(2) $5^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{5}{3}}\div 5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{1}{6}}=5^2=25$

(3) $\sqrt[3]{2}\div\sqrt[6]{2^5}\times\sqrt{2^3}=2^{\frac{1}{3}}\div 2^{\frac{5}{6}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}}=2^1=2$

41 $2^x+2^{-x}=4$ のとき，4^x+4^{-x}，8^x+8^{-x} の値を求めよ。

解答 $4^x+4^{-x}=14$，$8^x+8^{-x}=52$

解説

$4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}$
$=4^2-2\cdot 1=14$

$8^x+8^{-x}=2^{3x}+2^{-3x}=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})$
$=4^3-3\cdot 1\cdot 4=52$

別解 $8^x+8^{-x}=2^{3x}+2^{-3x}=(2^x+2^{-x})(2^{2x}-2^x\cdot 2^{-x}+2^{-2x})$
$=(2^x+2^{-x})(4^x+4^{-x}-1)$
$=4\cdot(14-1)=52$

42 次の $\boxed{\quad}$ に適する数を入れよ。

(1) $4^3=64$ であるから，$\boxed{\quad}$ は 64 の 3 乗根である。

(2) $2^6=(-2)^6=64$ であるから，2 と -2 は 64 の $\boxed{\quad}$ 乗根である。

(3) $(-2)^3=-8$ であるから，-2 は $\boxed{\quad}$ の3 乗根である。

解答 (1) 4　(2) 6　(3) -8

解説

(1) $4^3=64$ であるから，4 は 64 の 3 乗根である。

(2) $2^6=(-2)^6=64$ であるから，2 と -2 は 64 の 6 乗根である。

(3) $(-2)^3=-8$ であるから，-2 は -8 の 3 乗根である。

43 等式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を用いて，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ の分母を有理化せよ。

解答 $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$

解説

等式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ に，$a=\sqrt[3]{3}$，$b=\sqrt[3]{2}$ を代入すると
$(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3=(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})\{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2\}$

よって　$1=(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})\{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{6}+(\sqrt[3]{2})^2\}$

したがって　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{6}+(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})\{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{6}+(\sqrt[3]{2})^2\}}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$

44 等式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を用いて，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ の分母を有理化せよ。

解答 $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

解説

等式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ に，$a=\sqrt[3]{2}$，$b=1$ を代入すると
$(\sqrt[3]{2})^3-1^3=(\sqrt[3]{2}-1)\{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\cdot 1+1^2\}$

よって　$1=(\sqrt[3]{2}-1)\{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1\}$

したがって　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\dfrac{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1^2}{(\sqrt[3]{2}-1)\{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1^2\}}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$