2次関数の決定クイズ

$\boxed{1}$ 放物線 $y=x^2-2x+3$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=x^2-6x+8$

解説

放物線の方程式 $y=x^2-2x+3$ の x を $x-2$，y を $y-(-3)$ でおき換えると

$$y-(-3)=(x-2)^2-2(x-2)+3$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=x^2-6x+8$$

$\boxed{2}$ 次の放物線を，x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　$y=3x^2$　　(2)　$y=-2x^2+1$　　(3)　$y=x^2+3x-4$

解答　(1)　$y=3x^2+18x+29$　　(2)　$y=-2x^2-12x-15$　　(3)　$y=x^2+9x+16$

解説

(1)　放物線の方程式 $y=3x^2$ の x を $x+3$，y を $y-2$ でおき換えると

$$y-2=3(x+3)^2$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=3x^2+18x+29$$

(2)　放物線の方程式 $y=-2x^2+1$ の x を $x+3$，y を $y-2$ でおき換えると

$$y-2=-2(x+3)^2+1$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=-2x^2-12x-15$$

(3)　放物線の方程式 $y=x^2+3x-4$ の x を $x+3$，y を $y-2$ でおき換えると

$$y-2=(x+3)^2+3(x+3)-4$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=x^2+9x+16$$

$\boxed{3}$ 放物線 $y=2x^2-4x+5$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

解答　(1)　$y=-2x^2+4x-5$　　(2)　$y=2x^2+4x+5$　　(3)　$y=-2x^2-4x-5$

解説

(1)　放物線の方程式 $y=2x^2-4x+5$ の y を $-y$ でおき換えると

$$-y=2x^2-4x+5$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=-2x^2+4x-5$$

(2)　放物線の方程式 $y=2x^2-4x+5$ の x を $-x$ でおき換えると

$$y=2(-x)^2-4(-x)+5$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=2x^2+4x+5$$

(3)　放物線の方程式 $y=2x^2-4x+5$ の x を $-x$，y を $-y$ でおき換えると

$$-y=2(-x)^2-4(-x)+5$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=-2x^2-4x-5$$

別解　$y=2x^2-4x+5$ は $y=2(x-1)^2+3$ と変形でき，この放物線の頂点は，点 $(1,\ 3)$ である。

(1)　頂点を x 軸に関して対称移動すると $(1,\ -3)$ となるから，求める放物線の方程式は

$$y=-2(x-1)^2-3$$

すなわち　$y=-2x^2+4x-5$

(2)　頂点を y 軸に関して対称移動すると $(-1,\ 3)$ となるから，求める放物線の方程式は

$$y=2(x+1)^2+3$$

すなわち　$y=2x^2+4x+5$

(3)　頂点を原点に関して対称移動すると $(-1,\ -3)$ となるから，求める放物線の方程式は

$$y=-2(x+1)^2-3$$

すなわち　$y=-2x^2-4x-5$

$\boxed{4}$ x 軸方向に 4，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると放物線 $y=x^2-6x+4$ に重なるような放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=x^2+2x-2$

解説

求める放物線は，放物線 $y=x^2-6x+4$ を x 軸方向に -4，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。

よって，放物線の方程式 $y=x^2-6x+4$ の x を $x+4$，y を $y-2$ でおき換えると

$$y-2=(x+4)^2-6(x+4)+4$$

したがって，求める放物線の方程式は

$$y=x^2+2x-2$$

別解　与えられた放物線の方程式は

$$y=(x-3)^2-5$$

と変形される。これから，この放物線の頂点は $(3,\ -5)$ である。

この頂点を x 軸方向に -4，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると，点 $(-1,\ -3)$ に移る。

よって，求める放物線の方程式は

$$y=(x+1)^2-3\qquad (y=x^2+2x-2 \text{ を答えとしてもよい})$$

別解　与えられた放物線の方程式の x^2 の係数が 1 であるから，求める放物線の方程式は $y=x^2+bx+c$ とおける。

この放物線を x 軸方向に 4，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$$y+2=(x-4)^2+b(x-4)+c$$

すなわち　$y=x^2+(b-8)x-4b+c+14$

この放物線が $y=x^2-6x+4$ と一致するから

$$b-8=-6,\quad -4b+c+14=4$$

この連立方程式を解いて　$b=2$，$c=-2$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=x^2+2x-2$$

$\boxed{5}$ 放物線 $y=2x^2+3x-1$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。[各 10 点]

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

解答　(1)　x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えて　$-y=2x^2+3x-1$　すなわち　$y=-2x^2-3x+1$

(2)　y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えて　$y=2(-x)^2+3(-x)-1$　すなわち　$y=2x^2-3x-1$

(3)　原点に関して対称移動した放物線の方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えて　$-y=2(-x)^2+3(-x)-1$　すなわち　$y=-2x^2+3x+1$

解説

(1)　x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えて

$-y=2x^2+3x-1$　　すなわち　$y=-2x^2-3x+1$

(2)　y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えて

$y=2(-x)^2+3(-x)-1$　　すなわち　$y=2x^2-3x-1$

(3)　原点に関して対称移動した放物線の方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えて　$-y=2(-x)^2+3(-x)-1$　すなわち　$y=-2x^2+3x+1$

$\boxed{6}$ 放物線 $y=2x^2+3x$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。[20 点]

解答　方程式の x，y を，それぞれ $x-3$，$y-(-1)$ でおき換えると，求める方程式が得られる。求める放物線の方程式は

$y-(-1)=2(x-3)^2+3(x-3)$　　すなわち　$y=2x^2-9x+8$

解説

方程式の x，y を，それぞれ $x-3$，$y-(-1)$ でおき換えると，求める方程式が得られる。

求める放物線の方程式は

$y-(-1)=2(x-3)^2+3(x-3)$　　すなわち　$y=2x^2-9x+8$

$\boxed{7}$ 放物線 $y=-2x^2+4x-4$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=-2(x+2)^2-1$ $(y=-2x^2-8x-9)$

解説

$$-2x^2+4x-4=-2(x^2-2x+1^2-1^2)-4$$
$$=-2(x-1)^2-2$$

よって，放物線 $y=-2x^2+4x-4$ の頂点は

点 $(1,\ -2)$

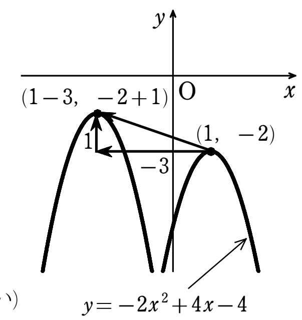
平行移動により，この点は

点 $(1-3,\ -2+1)$　すなわち　点 $(-2,\ -1)$

に移るから，求める放物線の方程式は

$$y=-2\{x-(-2)\}^2-1$$

すなわち　$y=-2(x+2)^2-1$ $(y=-2x^2-8x-9$ でもよい$)$



別解　求める放物線の方程式は

$$y-1=-2\{x-(-3)\}^2+4\{x-(-3)\}-4$$

ゆえに　$y-1=-2(x+3)^2+4(x+3)-4$

よって　$y=-2x^2-8x-9$

$\boxed{8}$ 放物線 $y=x^2-4x$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=(x-4)^2-5$ $(y=x^2-8x+11)$

解説

$$x^2-4x=x^2-4x+2^2-2^2=(x-2)^2-4$$

よって，放物線 $y=x^2-4x$ の頂点は　点 $(2,\ -4)$

平行移動により，この点は　点 $(2+2,\ -4-1)$　すなわち　点 $(4,\ -5)$　に移るから，

求める放物線の方程式は　$y=(x-4)^2-5$

$(y=x^2-8x+11$ でもよい$)$

別解　求める放物線の方程式は　$y-(-1)=(x-2)^2-4(x-2)$

すなわち　$y=x^2-8x+11$

9 (1) 放物線 $y=-x^2+6x-1$ は，放物線 $y=-x^2-10x+2$ をどのように平行移動したものか。

(2) x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると，放物線 $y=4x^2-2x+1$ に移されるような放物線の方程式を求めよ。

解答 (1) x 軸方向に 8，y 軸方向に -19 だけ平行移動したもの

(2) $y=4x^2-10x+5$

解説

(1) $y=-x^2+6x-1$ から　$y=-(x-3)^2+8$　……①

$y=-x^2-10x+2$ から　$y=-(x+5)^2+27$　……②

よって，①，② の頂点の座標はそれぞれ　$(3,\ 8)$，$(-5,\ 27)$

放物線 ② を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したとき，放物線 ① に重なるとすると　$-5+p=3$，$27+q=8$

したがって　$p=8$，$q=-19$

よって，放物線 ① は，放物線 ② を

x 軸方向に 8，y 軸方向に -19 だけ平行移動したもの。

(2) 求める放物線は，放物線 $y=4x^2-2x+1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したもので，その方程式は

$$y-(-2)=4(x-1)^2-2(x-1)+1$$

したがって　$y=4x^2-10x+5$

別解 $y=4x^2-2x+1=4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}$ から，頂点は　点 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$

x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき，頂点は，

点 $\left(\frac{1}{4}+1,\ \frac{3}{4}-2\right)$　すなわち　点 $\left(\frac{5}{4},\ -\frac{5}{4}\right)$ に移る。

よって，求める方程式は

$$y=4\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{5}{4}$$

$(y=4x^2-10x+5$ でもよい$)$

10 ある放物線を原点に関して対称移動し，更に x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，放物線 $y=3x^2-6x+5$ に移るという。もとの放物線の方程式を求めよ。

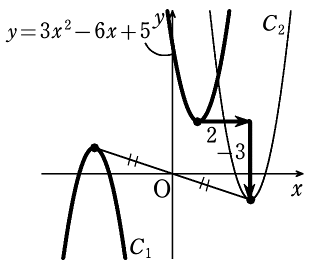
解答 $y=-3x^2-18x-26$

解説

放物線 $y=3x^2-6x+5$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線 C_2 の方程式は

$$y-(-3)=3(x-2)^2-6(x-2)+5$$

すなわち　$y=3x^2-18x+26$



放物線 C_2 を，原点に関して対称移動した放物線 C_1 の方程式は

$$-y=3(-x)^2-18(-x)+26$$

すなわち　$y=-3x^2-18x-26$

これが求めるもとの放物線の方程式である。

別解 $y=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2$ から，放物線 $y=3x^2-6x+5$ の頂点は　点 $(1,\ 2)$

点 $(1,\ 2)$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した点は

点 $(1+2,\ 2-3)$　すなわち　点 $(3,\ -1)$

また，原点に関する対称移動により，点 $(3,\ -1)$ は点 $(-3,\ 1)$ に移り，放物線の x^2 の係数は -3 となる。

したがって，もとの放物線の方程式は

$$y=-3(x+3)^2+1\quad (y=-3x^2-18x-26 \text{ でもよい})$$

11 ある放物線を x 軸に関して対称移動し，続いて x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動し，更に y 軸に関して対称移動すると，放物線 $y=-x^2-x-2$ になった。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答 $y=x^2-3x+6$

解説

放物線 $y=-x^2-x-2$ を y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は

$y=-(-x)^2-(-x)-2$　すなわち　$y=-x^2+x-2$

続いて，この放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線の方程式は

$y-(-2)=-(x-1)^2+(x-1)-2$　すなわち　$y=-x^2+3x-6$

更に，この放物線を x 軸に関して対称移動したものが求める放物線であり，その方程式は　$-y=-x^2+3x-6$　すなわち　$y=x^2-3x+6$

別解 $y=-x^2-x-2=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$ から，頂点は

点 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{7}{4}\right)$

点 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{7}{4}\right)$ を y 軸に関して対称移動すると，点 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{7}{4}\right)$ に移る。

更に，x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，点 $\left(\frac{1}{2}+1,\ -\frac{7}{4}-2\right)$

すなわち，点 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{15}{4}\right)$ に移る。

次に，x 軸に関して対称移動すると，点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{15}{4}\right)$ に移る。

x^2 の係数は 1 となるから，もとの放物線の方程式は

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

$(y=x^2-3x+6$ でもよい$)$

12 次の放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1) $y=-x^2$　(2) $y=2x^2+4x$　(3) $y=3x^2+x-4$

解答 (1) $y=-x^2+2x-3\ (y=-(x-1)^2-2)$　(2) $y=2x^2-4$

(3) $y=3x^2-5x-4\ \left(y=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{73}{12}\right)$

解説

方程式の x，y をそれぞれ $x-1$，$y-(-2)$ でおき換えると，求める方程式が得られる。

(1) 求める放物線の方程式は　$y-(-2)=-(x-1)^2$

すなわち　$y=-x^2+2x-3$

(2) 求める放物線の方程式は　$y-(-2)=2(x-1)^2+4(x-1)$

すなわち　$y=2x^2-4$

(3) 求める放物線の方程式は　$y-(-2)=3(x-1)^2+(x-1)-4$

すなわち　$y=3x^2-5x-4$

別解 (1) 放物線 $y=-x^2$ の頂点 $(0,\ 0)$ が移る点は　$(0+1,\ 0-2)$　すなわち　$(1,\ -2)$

よって，求める放物線の方程式は　$y=-(x-1)^2-2$　$(y=-x^2+2x-3)$

(2) $y=2x^2+4x=2(x+1)^2-2$

この放物線の頂点 $(-1,\ -2)$ が移る点は　$(-1+1,\ -2-2)$　すなわち　$(0,\ -4)$

よって，求める放物線の方程式は　$y=2x^2-4$

(3) $y=3x^2+x-4=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{49}{12}$

この放物線の頂点 $\left(-\frac{1}{6},\ -\frac{49}{12}\right)$ が移る点は　$\left(-\frac{1}{6}+1,\ -\frac{49}{12}-2\right)$

すなわち　$\left(\frac{5}{6},\ -\frac{73}{12}\right)$

よって，求める放物線の方程式は　$y=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{73}{12}$　$(y=3x^2-5x-4)$

13 放物線 $y=x^2-4x+3$ を，次の方向に平行移動して原点を通るようにした放物線の方程式を求めよ。

(1) y 軸方向　(2) x 軸方向

解答 (1) $y=x^2-4x$　(2) $y=x^2-2x$，$y=x^2+2x$

解説

(1) 放物線 $y=x^2-4x+3$ を y 軸方向に q だけ平行移動すると，その方程式は

$$y-q=x^2-4x+3$$

この放物線が原点を通るとすると　$0-q=0^2-4\cdot 0+3$

よって　$-q=3$　ゆえに　$q=-3$

したがって，求める放物線の方程式は　$y-(-3)=x^2-4x+3$

すなわち　$y=x^2-4x$

(2) 放物線 $y=x^2-4x+3$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動すると，その方程式は

$$y=(x-p)^2-4(x-p)+3$$

この放物線が原点を通るとすると　$0=(0-p)^2-4(0-p)+3$

すなわち　$0=p^2+4p+3$

よって　$(p+1)(p+3)=0$

ゆえに　$p=-1,\ -3$

したがって，求める放物線の方程式は

$p=-1$ のとき　$y=(x+1)^2-4(x+1)+3$

$p=-3$ のとき　$y=(x+3)^2-4(x+3)+3$

すなわち　$y=x^2-2x$，$y=x^2+2x$

14 次の直線，放物線を，x 軸，y 軸，原点に関して，それぞれ対称移動して得られる直線，放物線の方程式を求めよ。

(1) $y=-x+1$　(2) $y=2x-5$　(3) $y=\frac{1}{2}x-3$

(4) $y=x^2-1$　(5) $y=-2x^2+x$　(6) $y=x^2-x-6$

解答 x 軸，y 軸，原点の順に

(1) $y=x-1$，$y=x+1$，$y=-x-1$

(2) $y=-2x+5$，$y=-2x-5$，$y=2x+5$

(3) $y=-\frac{1}{2}x+3$，$y=-\frac{1}{2}x-3$，$y=\frac{1}{2}x+3$

(4) $y=-x^2+1$，$y=x^2-1$，$y=-x^2+1$

(5) $y=2x^2-x$，$y=-2x^2-x$，$y=2x^2+x$

(6) $y=-x^2+x+6$，$y=x^2+x-6$，$y=-x^2-x+6$

解説

(1) x 軸に関して対称移動した直線の方程式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えて

$$-y=-x+1$$

すなわち　$y=x-1$

y 軸に関して対称移動した直線の方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えて

$$y=-(-x)+1$$

すなわち　$y=x+1$

原点に関して対称移動した直線の方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えて

$$-y=-(-x)+1$$

すなわち　$y=-x-1$

(2) x 軸に関して対称移動した直線の方程式は　$-y=2x-5$

すなわち　$y=-2x+5$

y 軸に関して対称移動した直線の方程式は　$y=2\cdot(-x)-5$

すなわち　$y=-2x-5$

原点に関して対称移動した直線の方程式は　$-y=2\cdot(-x)-5$

すなわち　$y=2x+5$

(3)　x 軸に関して対称移動した直線の方程式は　$-y=\frac{1}{2}x-3$

すなわち　$y=-\frac{1}{2}x+3$

y 軸に関して対称移動した直線の方程式は　$y=\frac{1}{2}\cdot(-x)-3$

すなわち　$y=-\frac{1}{2}x-3$

原点に関して対称移動した直線の方程式は　$-y=\frac{1}{2}\cdot(-x)-3$

すなわち　$y=\frac{1}{2}x+3$

(4)　x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は　$-y=x^2-1$

すなわち　$y=-x^2+1$

y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は　$y=(-x)^2-1$

すなわち　$y=x^2-1$

原点に関して対称移動した放物線の方程式は　$-y=(-x)^2-1$

すなわち　$y=-x^2+1$

(5)　x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は　$-y=-2x^2+x$

すなわち　$y=2x^2-x$

y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は　$y=-2(-x)^2+(-x)$

すなわち　$y=-2x^2-x$

原点に関して対称移動した放物線の方程式は　$-y=-2(-x)^2+(-x)$

すなわち　$y=2x^2+x$

(6)　x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は　$-y=x^2-x-6$

すなわち　$y=-x^2+x+6$

y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は　$y=(-x)^2-(-x)-6$

すなわち　$y=x^2+x-6$

原点に関して対称移動した放物線の方程式は　$-y=(-x)^2-(-x)-6$

すなわち　$y=-x^2-x+6$

15　x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したら，放物線 $y=2x^2+x-4$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x^2-7x-1$

解説

求める放物線は，放物線 $y=2x^2+x-4$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したものである。

よって　$y-(-3)=2(x-2)^2+(x-2)-4$

すなわち　$y=2x^2-7x-1$

16　ある放物線を，x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，更に x 軸に関して対称移動したら，放物線 $y=x^2-2x+2$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x^2+4x-2$

解説

求める放物線は，放物線 $y=x^2-2x+2$ を x 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

まず，x 軸に関して対称移動すると　$-y=x^2-2x+2$

すなわち　$y=-x^2+2x-2$

次に，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると

$$y-3=-(x-1)^2+2(x-1)-2$$

よって　$y=-x^2+4x-2$

17　次の条件を満たすような放物線の方程式を求めよ。

(1)　放物線 $y=-3x^2+x-1$ を平行移動した曲線で，頂点が点 $(-2,\ 3)$ である。

(2)　放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動した曲線で，2 点 $(2,\ 1)$，$(4,\ 5)$ を通る。

解答　(1)　$y=-3(x+2)^2+3\ (y=-3x^2-12x-9)$　(2)　$y=x^2-4x+5$

解説

(1)　放物線 $y=-3x^2+x-1$ を平行移動した曲線であるから，x^2 の係数は -3 である。

また，頂点が点 $(-2,\ 3)$ であるから，求める放物線の方程式は

$$y=-3(x+2)^2+3\quad (y=-3x^2-12x-9)$$

(2)　放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動した曲線であるから，求める放物線の方程式は

$$y=x^2+bx+c$$

と表される。

これが 2 点 $(2,\ 1)$，$(4,\ 5)$ を通るから　$4+2b+c=1$，$16+4b+c=5$

すなわち　$2b+c=-3$，$4b+c=-11$

これを解いて　$b=-4$，$c=5$

よって，求める放物線の方程式は　$y=x^2-4x+5$

18　ある放物線を，y 軸に関して対称移動し，更に，x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したら，放物線 $y=x^2+6x+10$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=x^2-2x+1$

解説

放物線 $y=x^2+6x+10$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると

$$y-(-1)=(x-2)^2+6(x-2)+10$$

よって　$y=x^2+2x+1$

この放物線を y 軸に関して対称移動したものがもとの放物線である。

ゆえに，求める方程式は　$y=(-x)^2+2(-x)+1$

すなわち　$y=x^2-2x+1$

19　放物線 $y=2x^2+x-1$ を平行移動した曲線で，2 点 $(-1,\ 6)$，$(2,\ 3)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x^2-3x+1$

解説

求める放物線は，放物線 $y=2x^2+x-1$ を平行移動した曲線であるから，その方程式は $y=2x^2+bx+c$ と表される。

これが 2 点 $(-1,\ 6)$，$(2,\ 3)$ を通るから

$$6=2-b+c,\quad 3=8+2b+c$$

すなわち　$b-c=-4$，$2b+c=-5$

これを解いて　$b=-3$，$c=1$

よって　$y=2x^2-3x+1$

20　次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(2,\ 3)$ で，点 $(5,\ -6)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=-2$ で，2 点 $(2,\ -1)$，$(-8,\ 4)$ を通る。

解答　(1)　$y=-(x-2)^2+3\quad (y=-x^2+4x-1)$

(2)　$y=\frac{1}{4}(x+2)^2-5\quad \left(y=\frac{1}{4}x^2+x-4\right)$

解説

(1)　頂点が点 $(2,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-2)^2+3$$

と表される。グラフが点 $(5,\ -6)$ を通るから

$$-6=a(5-2)^2+3$$

これを解くと　$a=-1$

よって　$y=-(x-2)^2+3$　($y=-x^2+4x-1$ を答えとしてもよい)

(2)　軸が直線 $x=-2$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x+2)^2+q$$

と表される。グラフが 2 点 $(2,\ -1)$，$(-8,\ 4)$ を通るから

$$-1=a(2+2)^2+q,\quad 4=a(-8+2)^2+q$$

すなわち　$-1=16a+q$，$4=36a+q$

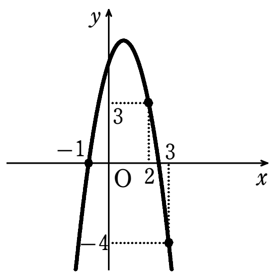
これを解くと　$a=\frac{1}{4}$，$q=-5$

よって　$y=\frac{1}{4}(x+2)^2-5$　$\left(y=\frac{1}{4}x^2+x-4\ \text{を答えとしてもよい}\right)$

21　2 次関数のグラフが，3 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ -4)$ を通るとき，その 2 次関数を求めよ。

解答　$y=-2x^2+3x+5$

解説



求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。グラフが 3 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ -4)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=0 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=3 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=-4 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　$3a+3b=3$

すなわち　$a+b=1$　……④

③−② から　$5a+b=-7$　……⑤

④，⑤ を解いて　$a=-2$，$b=3$

これらを ① に代入して　$c=5$

したがって，求める 2 次関数は　$y=-2x^2+3x+5$

22　2 次関数のグラフが，3 点 $(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$，$(-1,\ 10)$ を通るとき，その 2 次関数を求めよ。

解答　$y=2x^2-5x+3$

解説

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが 3 点 $(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$，$(-1,\ 10)$ を通るから

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=1 & \cdots\cdots ② \\ a-b+c=10 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　$3a+b=1$　……④

②−③ から　$3a+3b=-9$

すなわち　$a+b=-3$　……⑤

④，⑤ を解いて　$a=2$，$b=-5$

これらを ① に代入して　$c=3$

したがって，求める 2 次関数は　$y=2x^2-5x+3$

$\boxed{23}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1)　軸が直線 $x=3$ で，2点 $(0,\ 4)$，$(4,\ -4)$ を通る。

(2)　x 軸と2点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，点 $(2,\ -6)$ を通る。

解答　(1)　$y=(x-3)^2-5$　$(y=x^2-6x+4)$

(2)　$y=2x^2-4x-6$

解説

(1)　軸が直線 $x=3$ であるから，求める2次関数は

$$y=a(x-3)^2+q$$

と表される。グラフが2点 $(0,\ 4)$，$(4,\ -4)$ を通るから

$$4=a(0-3)^2+q,\quad -4=a(4-3)^2+q$$

すなわち　$4=9a+q,\quad -4=a+q$

これを解くと　$a=1,\ q=-5$

よって　$y=(x-3)^2-5$　（$y=x^2-6x+4$ を答えとしてもよい）

(2)　求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが3点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(2,\ -6)$ を通るから

$a-b+c=0$　……①

$9a+3b+c=0$　……②

$4a+2b+c=-6$　……③

②−① から　$8a+4b=0$

すなわち　$2a+b=0$　……④

②−③ から　$5a+b=6$　……⑤

④，⑤ を解いて　$a=2,\ b=-4$

これらを ① に代入して　$c=-6$

したがって，求める2次関数は

$$y=2x^2-4x-6$$

別解　(2)　x 軸と2点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わるから，求める2次関数は

$$y=a(x+1)(x-3)$$

と表される。

グラフが点 $(2,\ -6)$ を通るから

$$-6=a(2+1)(2-3)$$

すなわち　$-6=-3a$

よって　$a=2$

したがって，求める2次関数は

$y=2(x+1)(x-3)$　（$y=2x^2-4x-6$ を答えとしてもよい）

$\boxed{24}$ $x=2$ で最大値8をとり，$x=1$ のとき $y=7$ となる2次関数を求めよ。

解答　$y=-(x-2)^2+8$　$(y=-x^2+4x+4)$

解説

$x=2$ のとき最大値8をとるから，求める2次関数は

$$y=a(x-2)^2+8$$

と表される。ただし，$a<0$ である。

この関数は $x=1$ のとき $y=7$ となるから

$$7=a+8$$

ゆえに　$a=-1$　これは $a<0$ を満たす。

よって，求める2次関数は

$y=-(x-2)^2+8$　（$y=-x^2+4x+4$ を答えとしてもよい）

$\boxed{25}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。[各15点]

(1)　頂点が点 $(1,\ 3)$ で，点 $(3,\ -5)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=2$ で，2点 $(4,\ 2)$，$(1,\ 5)$ を通る。

解答　(1)　頂点が点 $(1,\ 3)$ であるから，求める2次関数は $y=a(x-1)^2+3$ と表される。

そのグラフが点 $(3,\ -5)$ を通るから　$-5=4a+3$　ゆえに　$a=-2$

よって，求める2次関数は

$y=-2(x-1)^2+3$　（$y=-2x^2+4x+1$ を答えとしてもよい）

(2)　軸が直線 $x=2$ であるから，求める2次関数は $y=a(x-2)^2+q$ と表される。

そのグラフが2点 $(4,\ 2)$，$(1,\ 5)$ を通るから

$2=4a+q,\quad 5=a+q$　これを解くと　$a=-1,\ q=6$

よって，求める2次関数は

$y=-(x-2)^2+6$　（$y=-x^2+4x+2$ を答えとしてもよい）

解説

(1)　頂点が点 $(1,\ 3)$ であるから，求める2次関数は $y=a(x-1)^2+3$ と表される。

そのグラフが点 $(3,\ -5)$ を通るから　$-5=4a+3$　ゆえに　$a=-2$

よって，求める2次関数は

$y=-2(x-1)^2+3$　（$y=-2x^2+4x+1$ を答えとしてもよい）

(2)　軸が直線 $x=2$ であるから，求める2次関数は $y=a(x-2)^2+q$ と表される。

そのグラフが2点 $(4,\ 2)$，$(1,\ 5)$ を通るから

$2=4a+q,\quad 5=a+q$　これを解くと　$a=-1,\ q=6$

よって，求める2次関数は

$y=-(x-2)^2+6$　（$y=-x^2+4x+2$ を答えとしてもよい）

$\boxed{26}$ 2次関数のグラフが，3点 $(1,\ 10)$，$(3,\ 0)$，$(4,\ 1)$ を通るとき，その2次関数を求めよ。[20点]

解答　求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

この関数のグラフが3点 $(1,\ 10)$，$(3,\ 0)$，$(4,\ 1)$ を通るから

$$\begin{cases} a+b+c=10 & \cdots\cdots ① \\ 9a+3b+c=0 & \cdots\cdots ② \\ 16a+4b+c=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−①から　$8a+2b=-10$　よって　$4a+b=-5$……④

③−② から　$7a+b=1$　……⑤

⑤−④から　$3a=6$　よって　$a=2$

$a=2$ を ④ に代入して　$8+b=-5$　ゆえに　$b=-13$

$a=2,\ b=-13$ を ① に代入して　$2-13+c=10$　ゆえに　$c=21$

よって，求める2次関数は　$y=2x^2-13x+21$

解説

求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

この関数のグラフが3点 $(1,\ 10)$，$(3,\ 0)$，$(4,\ 1)$ を通るから

$$\begin{cases} a+b+c=10 & \cdots\cdots ① \\ 9a+3b+c=0 & \cdots\cdots ② \\ 16a+4b+c=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−①から　$8a+2b=-10$　よって　$4a+b=-5$……④

③−② から　$7a+b=1$　……⑤

⑤−④から　$3a=6$　よって　$a=2$

$a=2$ を ④ に代入して　$8+b=-5$　ゆえに　$b=-13$

$a=2,\ b=-13$ を ① に代入して　$2-13+c=10$　ゆえに　$c=21$

よって，求める2次関数は　$y=2x^2-13x+21$

$\boxed{27}$ $x=-1$ で最大値4をとり，$x=1$ のとき $y=0$ となる x の2次関数を求めよ。[20点]

解答　$x=-1$ で最大値4をとるから，求める2次関数は

$y=a(x+1)^2+4$　$(a<0)$

とおける。$x=1$ のとき $y=0$ であるから

$0=4a+4$　ゆえに　$a=-1$　これは $a<0$ を満たす。

よって，求める2次関数は

$y=-(x+1)^2+4$　（$y=-x^2-2x+3$ を答えとしてもよい）

解説

$x=-1$ で最大値4をとるから，求める2次関数は

$y=a(x+1)^2+4$　$(a<0)$

とおける。$x=1$ のとき $y=0$ であるから

$0=4a+4$　ゆえに　$a=-1$　これは $a<0$ を満たす。

よって，求める2次関数は

$y=-(x+1)^2+4$　（$y=-x^2-2x+3$ を答えとしてもよい）

$\boxed{28}$ 次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1)　グラフの頂点が点 $(-1,\ 3)$ で，グラフが点 $(1,\ -1)$ を通る。

(2)　グラフが3点 $(-1,\ 5)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通る。

(3)　グラフが x 軸と2点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，点 $(2,\ -9)$ を通る。

解答　(1)　$y=-(x+1)^2+3$　$(y=-x^2-2x+2)$　(2)　$y=x^2-x+3$

(3)　$y=3(x+1)(x-3)$　$(y=3x^2-6x-9)$

解説

(1)　頂点が点 $(-1,\ 3)$ であるから，求める2次関数は

$$y=a(x+1)^2+3$$

と表される。グラフが点 $(1,\ -1)$ を通るから

$-1=a\cdot 2^2+3$　ゆえに　$a=-1$

よって　$y=-(x+1)^2+3$ （$y=-x^2-2x+2$ でもよい）

(2)　求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが3点 $(-1,\ 5)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るから

$$5=a(-1)^2+b(-1)+c,\ 5=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c,\ 9=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c$$

すなわち　$a-b+c=5,\quad 4a+2b+c=5,\quad 9a+3b+c=9$

この連立方程式を解いて　$a=1,\ b=-1,\ c=3$

したがって　$y=x^2-x+3$

(3)　x 軸と2点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わるから，求める2次関数は

$$y=a(x+1)(x-3)$$

と表される。グラフが点 $(2,\ -9)$ を通るから

$-9=a\cdot 3\cdot(-1)$　ゆえに　$a=3$

よって　$y=3(x+1)(x-3)$ （$y=3x^2-6x-9$ でもよい）

$\boxed{29}$ 次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1)　$x=3$ のとき最大値2をとり，$x=-3$ のとき $y=-34$

(2)　グラフが3点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ -4)$ を通る。

(3)　グラフが x 軸と2点 $(-5,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ で交わり，点 $(-3,\ 2)$ を通る。

解答　(1)　$y=-(x-3)^2+2$　$(y=-x^2+6x-7)$　(2)　$y=-2x^2-x+6$

(3)　$y=-(x+5)(x+2)$　$(y=-x^2-7x-10)$

解説

(1)　$x=3$ で最大値2をとるから，求める2次関数は

$$y=a(x-3)^2+2\quad (a<0)$$

と表される。$x=-3$ のとき $y=-34$ であるから　$-34=a(-6)^2+2$

よって　$a=-1$　これは $a<0$ を満たす。

したがって，求める2次関数は

$y=-(x-3)^2+2$ （$y=-x^2+6x-7$ でもよい）

(2)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが 3 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ -4)$ を通るから

$0=4a-2b+c,\quad 3=a+b+c,\quad -4=4a+2b+c$

この連立方程式を解いて　$a=-2$，$b=-1$，$c=6$

したがって，求める 2 次関数は　$y=-2x^2-x+6$

(3)　x 軸と 2 点 $(-5,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ で交わるから，求める 2 次関数は

$y=a(x+5)(x+2)$

と表される。グラフが点 $(-3,\ 2)$ を通るから

$2=a\cdot 2\cdot(-1)$　　ゆえに　$a=-1$

よって　$y=-(x+5)(x+2)$　($y=-x^2-7x-10$ でもよい)

$\boxed{30}$ 次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　グラフの軸が直線 $x=1$ で，グラフが 2 点 $(0,\ 7)$，$(3,\ 11)$ を通る。

(2)　グラフが放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したもので，x 軸と 2 点 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わる。

解答　(1)　$y=\dfrac{4}{3}(x-1)^2+\dfrac{17}{3}$　$\left(y=\dfrac{4}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x+7\right)$

(2)　$y=-2(x+3)(x-1)$　$(y=-2x^2-4x+6)$

解説

(1)　軸が直線 $x=1$ であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x-1)^2+q$

と表される。グラフが 2 点 $(0,\ 7)$，$(3,\ 11)$ を通るから

$7=a(-1)^2+q,\ 11=a\cdot 2^2+q$

すなわち　$7=a+q,\ 11=4a+q$

これを解くと　$a=\dfrac{4}{3},\ q=\dfrac{17}{3}$

よって　$y=\dfrac{4}{3}(x-1)^2+\dfrac{17}{3}$

$\left(y=\dfrac{4}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x+7\right.$ でもよい$\left.\right)$

(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したものであるから，x^2 の係数は -2 である。

また，x 軸と 2 点 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わるから，求める 2 次関数は

$y=-2(x+3)(x-1)$　($y=-2x^2-4x+6$ でもよい)

別解　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したものであるから，x^2 の係数は -2 である。

また，x 軸と 2 点 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わるから，グラフの軸は直線 $x=-1$ である。

よって，求める 2 次関数は　$y=-2(x+1)^2+q$

と表される。グラフが点 $(1,\ 0)$ を通るから

$0=-2\cdot 2^2+q$　　ゆえに　$q=8$

したがって　$y=-2(x+1)^2+8$　($y=-2x^2-4x+6$ でもよい)

$\boxed{31}$ 次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　グラフの軸が直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で，グラフが 2 点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$，$\left(2,\ \dfrac{21}{2}\right)$ を通る。

(2)　グラフが放物線 $y=2x^2$ を平行移動したもので，2 点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を通る。

解答　(1)　$y=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-3$　$\left(y=6x^2-6x-\dfrac{3}{2}\right)$

(2)　$y=2(x-1)(x+2)$　$(y=2x^2+2x-4)$

解説

(1)　軸が直線 $x=\dfrac{1}{2}$ であるから，求める 2 次関数は

$y=a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+q$

と表される。グラフが 2 点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$，$\left(2,\ \dfrac{21}{2}\right)$ を通るから

$3=a\cdot 1^2+q,\ \dfrac{21}{2}=a\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+q$

すなわち　$3=a+q,\ 42=9a+4q$

これを解いて　$a=6,\ q=-3$

したがって　$y=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-3$　$\left(y=6x^2-6x-\dfrac{3}{2}\right.$ でもよい$\left.\right)$

(2)　放物線 $y=2x^2$ を平行移動したものであるから，x の係数は 2 である。

また，グラフが 2 点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を通るから，求める 2 次関数は

$y=2(x-1)(x+2)$　($y=2x^2+2x-4$ でもよい)

別解　放物線 $y=2x^2$ を平行移動したものであるから，x^2 の係数は 2 である。

また，グラフが 2 点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を通るから，グラフの軸は

直線 $x=-\dfrac{1}{2}$ である。よって，求める 2 次関数は

$y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+q$

と表される。グラフが点 $(1,\ 0)$ を通るから

$0=2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+q$　　よって　$q=-\dfrac{9}{2}$

したがって　$y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{2}$　($y=2x^2+2x-4$ でもよい)

$\boxed{32}$ グラフが次の条件を満たすとき，その 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が x 軸上にあって，2 点 $(0,\ 4)$，$(-4,\ 36)$ を通る。

(2)　放物線 $y=2x^2$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=6x-5$ 上にある。

解答　(1)　$y=4(x+1)^2$ $(y=4x^2+8x+4)$，$y=(x-2)^2$ $(y=x^2-4x+4)$

(2)　$y=2x^2-5$，$y=2(x-1)^2+1$ $(y=2x^2-4x+3)$

解説

(1)　頂点が x 軸上にあるから，求める 2 次関数は　$y=a(x-p)^2$　と表される。

グラフが 2 点 $(0,\ 4)$，$(-4,\ 36)$ を通るから

$ap^2=4$ ……①，　$a(p+4)^2=36$ ……②

①×9 と ② から　$9ap^2=a(p+4)^2$

$a\neq 0$ であるから　$9p^2=(p+4)^2$

整理して　$p^2-p-2=0$　　よって　$(p+1)(p-2)=0$

これを解いて　$p=-1,\ 2$

① から　$p=-1$ のとき　$a=4$，　$p=2$ のとき　$a=1$

したがって　$y=4(x+1)^2,\ y=(x-2)^2$

($y=4x^2+8x+4,\ y=x^2-4x+4$ でもよい)

(2)　放物線 $y=2x^2$ を平行移動したもので，頂点が直線 $y=6x-5$ 上にあるから，求める 2 次関数は　$y=2(x-p)^2+6p-5$ ……①　と表される。

グラフが点 $(2,\ 3)$ を通るから　$2(2-p)^2+6p-5=3$

整理して　$p^2-p=0$　　よって　$p=0,\ 1$

$p=0$ のとき，① から　$y=2x^2-5$

$p=1$ のとき，① から　$y=2(x-1)^2+1$　($y=2x^2-4x+3$ でもよい)

$\boxed{33}$ グラフが次の条件を満たすとき，その 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が直線 $y=1$ 上にあって，2 点 $(4,\ -7)$，$(-2,\ -1)$ を通る。

(2)　放物線 $y=2x^2-1$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 1)$ を通り，その頂点が直線 $y=-x+3$ 上にある。

解答　(1)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+1$，$y=-\dfrac{1}{18}(x+8)^2+1$　$\left(y=-\dfrac{1}{18}x^2-\dfrac{8}{9}x-\dfrac{23}{9}\right)$

(2)　$y=2(x-2)^2+1$　$(y=2x^2-8x+9)$，

$y=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$　$(y=2x^2-10x+13)$

解説

(1)　頂点が直線 $y=1$ 上にあるから，求める 2 次関数は $y=a(x-p)^2+1$ と表される。

このグラフが 2 点 $(4,\ -7)$，$(-2,\ -1)$ を通るから

$a(4-p)^2+1=-7$　　すなわち　$a(p-4)^2=-8$ ……①

$a(-2-p)^2+1=-1$　すなわち　$a(p+2)^2=-2$ ……②

① と ②×4 から　$a(p-4)^2=4a(p+2)^2$

$a\neq 0$ であるから　$(p-4)^2=4(p+2)^2$

整理して　$p^2+8p=0$　　よって　$p(p+8)=0$

これを解いて　$p=0,\ -8$

② から　$p=0$ のとき　$a=-\dfrac{1}{2}$，$p=-8$ のとき　$a=-\dfrac{1}{18}$

したがって　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+1,\ y=-\dfrac{1}{18}(x+8)^2+1$

$\left(y=-\dfrac{1}{18}x^2-\dfrac{8}{9}x-\dfrac{23}{9}\right.$ でもよい$\left.\right)$

(2)　放物線 $y=2x^2-1$ を平行移動したもので，頂点が直線 $y=-x+3$ 上にあるから，求める 2 次関数は $y=2(x-p)^2-p+3$ と表される。

このグラフが点 $(2,\ 1)$ を通るから　$1=2(2-p)^2-p+3$

整理すると　$2p^2-9p+10=0$　　よって　$(p-2)(2p-5)=0$

ゆえに　$p=2,\ \dfrac{5}{2}$

したがって，求める 2 次関数は

$p=2$ のとき　$y=2(x-2)^2+1$　($y=2x^2-8x+9$ でもよい)

$p=\dfrac{5}{2}$ のとき　$y=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$　($y=2x^2-10x+13$ でもよい)

$\boxed{34}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(1,\ -2)$ で，点 $(2,\ -3)$ を通る。

(2)　頂点が点 $(-1,\ 3)$ で，点 $(1,\ 11)$ を通る。

解答　(1)　$y=-(x-1)^2-2$ $(y=-x^2+2x-3)$　　(2)　$y=2(x+1)^2+3$ $(y=2x^2+4x+5)$

解説

(1)　頂点が点 $(1,\ -2)$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x-1)^2-2$ と表される。

グラフが点 $(2,\ -3)$ を通るから　$-3=a-2$　　よって　$a=-1$

ゆえに，求める 2 次関数は　$y=-(x-1)^2-2$　$(y=-x^2+2x-3)$

(2)　頂点が点 $(-1,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x+1)^2+3$ と表される。

グラフが点 $(1,\ 11)$ を通るから　$11=4a+3$　　よって　$a=2$

ゆえに，求める 2 次関数は　$y=2(x+1)^2+3$　$(y=2x^2+4x+5)$

$\boxed{35}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　軸が直線 $x=-2$ で，2 点 $(0,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=1$ で，点 $(3,\ -1)$ を通り，y 軸と点 $(0,\ 2)$ で交わる。

解答　(1)　$y=(x+2)^2-1$ $(y=x^2+4x+3)$　　(2)　$y=-(x-1)^2+3$ $(y=-x^2+2x+2)$

解説

(1)　軸が直線 $x=-2$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x+2)^2+q$ と表される。

グラフが 2 点 $(0,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通るから　$3=4a+q,\ 0=a+q$

これを解くと　$a=1,\ q=-1$

よって，求める2次関数は　$y=(x+2)^2-1$　$(y=x^2+4x+3)$

(2) 軸が直線 $x=1$ であるから，求める2次関数は $y=a(x-1)^2+q$ と表される。

グラフが2点 $(3,\ -1)$，$(0,\ 2)$ を通るから　$-1=4a+q$，$2=a+q$

これを解くと　$a=-1$，$q=3$

よって，求める2次関数は　$y=-(x-1)^2+3$　$(y=-x^2+2x+2)$

$\boxed{36}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1) $x=1$ で最小値5をとり，$x=3$ のとき $y=7$ となる。

(2) $x=2$ で最大値4をとり，点 $(1,\ 2)$ を通る。

解答 (1) $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+5\left(y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{11}{2}\right)$

(2) $y=-2(x-2)^2+4\ (y=-2x^2+8x-4)$

解説

(1) $x=1$ で最小値5をとるから，求める2次関数は $y=a(x-1)^2+5$ $(a>0)$ と表される。

$x=3$ のとき $y=7$ であるから　$7=4a+5$　　よって　$a=\dfrac{1}{2}$

これは $a>0$ を満たす。

ゆえに，求める2次関数は　$y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+5$　$\left(y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{11}{2}\right)$

(2) $x=2$ で最大値4をとるから，求める2次関数は $y=a(x-2)^2+4$ $(a<0)$ と表される。

グラフが点 $(1,\ 2)$ を通るから　$2=a+4$　　よって　$a=-2$

これは $a<0$ を満たす。

ゆえに，求める2次関数は　$y=-2(x-2)^2+4$　$(y=-2x^2+8x-4)$

$\boxed{37}$ 2次関数のグラフが次の3点を通るとき，その2次関数を求めよ。

(1) $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$　　(2) $(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$

解答 (1) $y=2x^2-5x+2$　(2) $y=3x^2-2x$

解説

(1) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが3点 $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=9 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=-1 & \cdots\cdots ② \\ 4a+2b+c=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　$2b=-10$　　よって　$b=-5$

③−② から　$3a+b=1$　……④

$b=-5$ を④に代入して　$3a-5=1$　　よって　$a=2$

$a=2$，$b=-5$ を①に代入して　$2+5+c=9$　　よって　$c=2$

したがって，求める2次関数は　$y=2x^2-5x+2$

(2) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが3点 $(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$ を通るから

$$\begin{cases} 4a-2b+c=16 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=1 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=21 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①−② から　$3a-3b=15$　　よって　$a-b=5$　……④

③−② から　$8a+2b=20$　　よって　$4a+b=10$　……⑤

④+⑤ から　$5a=15$　　よって　$a=3$

$a=3$ を④に代入して　$3-b=5$　　よって　$b=-2$

$a=3$，$b=-2$ を②に代入して　$3-2+c=1$　　よって　$c=0$

したがって，求める2次関数は　$y=3x^2-2x$

$\boxed{38}$ (1) 放物線 $y=x^2-3x+4$ を平行移動した曲線で，点 $(2,\ 4)$ を通り，頂点が直線 $y=2x+1$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y=-2x^2+5x$ を平行移動した曲線で，点 $(1,\ -3)$ を通り，頂点が放物線 $y=x^2+4$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

解答 (1) $y=(x-1)^2+3\ (y=x^2-2x+4)$

(2) $y=-2(x+1)^2+5$，$y=-2(x-5)^2+29$

$(y=-2x^2-4x+3,\ y=-2x^2+20x-21)$

解説

(1) 頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるから，その座標は $(p,\ 2p+1)$ とおける。

また，放物線 $y=x^2-3x+4$ を平行移動した曲線であるから，その方程式は

$$y=(x-p)^2+2p+1$$

と表される。これが点 $(2,\ 4)$ を通るから　$4=(2-p)^2+2p+1$

整理して　$p^2-2p+1=0$

よって　$(p-1)^2=0$　　ゆえに　$p=1$

したがって，求める放物線の方程式は　$y=(x-1)^2+3$　$(y=x^2-2x+4)$

(2) 頂点が放物線 $y=x^2+4$ 上にあるから，その座標は $(p,\ p^2+4)$ とおける。

また，放物線 $y=-2x^2+5x$ を平行移動した曲線であるから，その方程式は

$$y=-2(x-p)^2+p^2+4$$

と表される。これが点 $(1,\ -3)$ を通るから　$-3=-2(1-p)^2+p^2+4$

整理して　$p^2-4p-5=0$

よって　$(p+1)(p-5)=0$　　ゆえに　$p=-1,\ 5$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=-2(x+1)^2+5,\quad y=-2(x-5)^2+29$$
$$(y=-2x^2-4x+3,\quad y=-2x^2+20x-21)$$

$\boxed{39}$ 2次関数のグラフが次の条件を満たすとき，その2次関数を求めよ。

(1) 放物線 $y=2x^2+6x+4$ と頂点が同じで，点 $(0,\ -5)$ を通る。

(2) 頂点の x 座標が -3 で，2点 $(-6,\ -8)$，$(1,\ -22)$ を通る。

解答 (1) $y=-2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$　$(y=-2x^2-6x-5)$

(2) $y=-2(x+3)^2+10$　$(y=-2x^2-12x-8)$

解説

(1) $y=2x^2+6x+4=2(x^2+3x)+4=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+4=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

ゆえに，頂点は　点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

よって，求める2次関数は $y=a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$ と表される。

このグラフが点 $(0,\ -5)$ を通るから　$-5=\dfrac{9}{4}a-\dfrac{1}{2}$

これを解いて　$a=-2$

よって　$y=-2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$　($y=-2x^2-6x-5$ でもよい)

(2) 頂点の x 座標が -3 であるから，求める2次関数は $y=a(x+3)^2+q$ と表される。

このグラフが2点 $(-6,\ -8)$，$(1,\ -22)$ を通るから

$$-8=a(-3)^2+q,\quad -22=a\cdot4^2+q$$

すなわち　$9a+q=-8$ ……①，$16a+q=-22$ ……②

①，②を解いて　$a=-2$，$q=10$

よって　$y=-2(x+3)^2+10$　($y=-2x^2-12x-8$ でもよい)

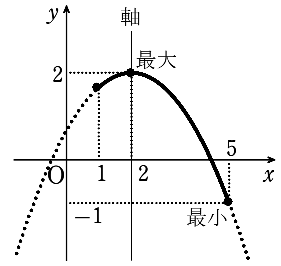
$\boxed{40}$ (1) $1\leqq x\leqq5$ の範囲で $x=2$ のとき最大値2をとり，最小値が -1 である2次関数を求めよ。

(2) 2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が，$f(-1)=f(3)=0$ を満たし，その最大値が4であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答 (1) $y=-\dfrac{1}{3}(x-2)^2+2$ $\left(y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}\right)$　(2) $a=-1$，$b=2$，$c=3$

解説

(1) $1\leqq x\leqq5$ の範囲で $x=2$ のとき最大値2をとるから，この2次関数のグラフは上に凸で，頂点は点 $(2,\ 2)$ である。



よって，求める2次関数は

$y=a(x-2)^2+2$，$a<0$　と表される。

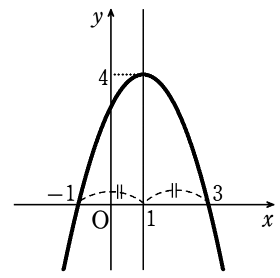
ゆえに，$1\leqq x\leqq5$ の範囲で，y は $x=5$ のとき最小になる。$x=5$ のとき $y=-1$ であるから

$-1=a(5-2)^2+2$　　よって　$a=-\dfrac{1}{3}$

これは $a<0$ を満たす。ゆえに，求める2次関数は

$y=-\dfrac{1}{3}(x-2)^2+2$　$\left(y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}\text{ でもよい}\right)$

(2) $f(-1)=f(3)=0$ であるから，放物線 $y=f(x)$ の軸は，2点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を結ぶ線分の中点 $(1,\ 0)$ を通る。



ゆえに，$f(x)$ は $x=1$ で最大値4をとる。よって，

$f(x)$ は　$f(x)=a(x-1)^2+4$，$a<0$　と表される。

$f(-1)=0$ から　$4a+4=0$

したがって　$a=-1$　　これは $a<0$ を満たす。

ゆえに　$f(x)=-(x-1)^2+4$

よって　$f(x)=-x^2+2x+3$

したがって　$b=2$，$c=3$

別解 $f(-1)=f(3)=0$ であるから，$f(x)=a(x+1)(x-3)$ と表される。

$a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)=a(x-1)^2-4a$ であるから

$$f(x)=a(x-1)^2-4a$$

最大値が4であるから　$a<0$　かつ　$-4a=4$

よって　$a=-1$　　これは $a<0$ を満たす。

したがって　$f(x)=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$

ゆえに　$a=-1$，$b=2$，$c=3$

$\boxed{41}$ 2次関数のグラフが次の3点を通るとき，その2次関数を求めよ。

(1) $(-1,\ 7)$，$(0,\ -2)$，$(1,\ -5)$　　(2) $(1,\ 4)$，$(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$

解答 (1) $y=3x^2-6x-2$　(2) $y=-(x-3)(x+1)\ (y=-x^2+2x+3)$

解説

(1) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

そのグラフが3点 $(-1,\ 7)$，$(0,\ -2)$，$(1,\ -5)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=7 & \cdots\cdots ① \\ c=-2 & \cdots\cdots ② \\ a+b+c=-5 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②を①と③に代入して　$a-b=9$　……④

$a+b=-3$　……⑤

④+⑤ から　$2a=6$　　ゆえに　$a=3$

⑤に代入して　$3+b=-3$　　よって　$b=-6$

したがって，求める2次関数は　$y=3x^2-6x-2$

(2) グラフは x 軸と2点 $(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ で交わるから，求める2次関数は

$$y=a(x-3)(x+1)$$

と表される。そのグラフが点 $(1,\ 4)$ を通るから

$4=-4a$　　ゆえに　　$a=-1$

したがって，求める 2 次関数は　　$y=-(x-3)(x+1)$（$y=-x^2+2x+3$ でもよい）

別解　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

そのグラフが 3 点 $(1,\ 4)$，$(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を通るから

$$\begin{cases} a+b+c=4 & \cdots\cdots ① \\ 9a+3b+c=0 & \cdots\cdots ② \\ a-b+c=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－③ から　　$2b=4$　　よって　　$b=2$

②－① から　　$8a+2b=-4$　　すなわち　　$4a+b=-2$

$b=2$ を代入して　　$4a=-4$　　よって　　$a=-1$

① に $a=-1$，$b=2$ を代入して　　$-1+2+c=4$　　よって　　$c=3$

したがって，求める 2 次関数は　　$y=-x^2+2x+3$