三角方程式クイズ(弧度法)(難)

$\boxed{1}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

解答　$\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

解説

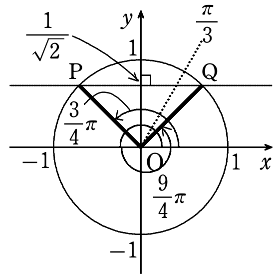
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{3} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

であるから，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

より　$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$



$\boxed{2}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$　　(4)　$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$　(2)　$\theta=\frac{13}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$　(3)　$\theta=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(4)　$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{13}{12}\pi$

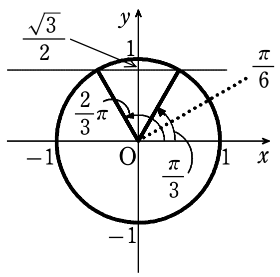
解説

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6} \leqq \theta+\frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$ であるから，

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$

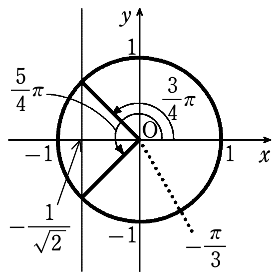


(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{3} \leqq \theta-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ であるから，

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ より

$\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{13}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$

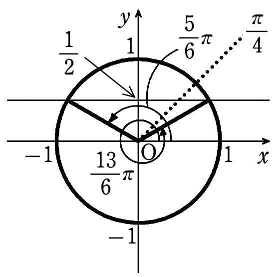


(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき $\frac{\pi}{4} \leqq \theta+\frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ であるから，

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ より

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

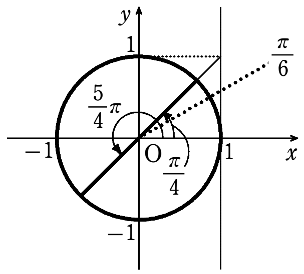


(4)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6} \leqq \theta+\frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$ であるから，

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$ より

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{13}{12}\pi$



$\boxed{3}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos 2x=-3\cos x+1$　　(2)　$\cos 2x<-3\cos x+1$

解答　(1)　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$　(2)　$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

解説

(1)　2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2\cos^2 x-1=-3\cos x+1$$

移項して整理すると

$$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

左辺を変形して　$(\cos x+2)(2\cos x-1)=0$

$\cos x \neq -2$ であるから

$2\cos x-1=0$　すなわち　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(2)　(1) により，与えられた不等式は，次のように変形される。

$$(\cos x+2)(2\cos x-1)<0$$

$\cos x+2>0$ であるから

$2\cos x-1<0$　すなわち　$\cos x<\frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

$\boxed{4}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\cos 2x=4\sin x-1$　　(2)　$\sin 2x=\sin x$

(3)　$\cos 2x \leqq 3\sin x-1$　　(4)　$\cos 2x<\cos x$

解答　(1)　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$　(2)　$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$　(3)　$\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$

(4)　$0<x<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<x<2\pi$

解説

(1)　2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2(1-2\sin^2 x)=4\sin x-1$$

移項して整理すると　$4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

左辺を変形して　$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$

$2\sin x+3 \neq 0$ であるから　$2\sin x-1=0$　すなわち　$\sin x=\frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

(2)　2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2\sin x\cos x=\sin x$$

移項すると　$2\sin x\cos x-\sin x=0$

左辺を変形して　$\sin x(2\cos x-1)=0$

ゆえに　$\sin x=0$　または　$2\cos x-1=0$

すなわち　$\sin x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$x=0,\ \pi$　または　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

したがって　$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$

(3)　2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$1-2\sin^2 x \leqq 3\sin x-1$$

移項して整理すると　$2\sin^2 x+3\sin x-2 \geqq 0$

左辺を変形して　$(\sin x+2)(2\sin x-1) \geqq 0$

$\sin x+2>0$ であるから　$2\sin x-1 \geqq 0$　すなわち　$\sin x \geqq \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$

(4)　2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2\cos^2 x-1<\cos x$$

移項して　$2\cos^2 x-\cos x-1<0$

左辺を変形して　$(2\cos x+1)(\cos x-1)<0$

ゆえに　$-\frac{1}{2}<\cos x<1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$0<x<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<x<2\pi$

$\boxed{5}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos 3x-\cos x=0$ を解け。

解答　$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$

解説

方程式を変形すると　$-2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}=0$

すなわち　$2\sin 2x\sin x=0$　よって　$4\sin^2 x\cos x=0$

ゆえに　$\sin x=0$　または　$\cos x=0$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$

$\boxed{6}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$$

解答　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi$

解説

左辺を変形して　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$　……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{3} \leqq x-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ であるから，① より

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$　　ゆえに　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi$

$\boxed{7}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin x+\cos x=-1$　　(2)　$\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{3}$

解答 (1) $x=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ (2) $x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$

解説

(1) 左辺を変形して $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

よって $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ …… ①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ であるから，① より

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

ゆえに $x=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(2) 左辺を変形して $2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

よって $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …… ①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11}{6}\pi$ であるから，① より

$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$$

ゆえに $x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$

8 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos 2x+\cos x+1=0$ (2) $\sin 2x=\sqrt{3}\cos x$

(3) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$ (4) $\sin 2x-\cos 2x=1$

(5) $\sin x\geqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ (6) $\cos x-\sin x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解答 (1) $x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ (2) $x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(3) $x=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ (4) $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(5) $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi\leqq x<2\pi$ (6) $\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{17}{12}\pi$

解説

(1) 2倍角の公式を用いて，左辺を変形すると $(2\cos^2 x-1)+\cos x+1=0$

整理すると $2\cos^2 x+\cos x=0$

左辺を変形して $\cos x(2\cos x+1)=0$

ゆえに $\cos x=0$ または $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから $x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ または $x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

したがって $x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(2) 2倍角の公式を用いて，左辺を変形すると $2\sin x\cos x=\sqrt{3}\cos x$

移項すると $2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x=0$

左辺を変形して $\cos x(2\sin x-\sqrt{3})=0$

ゆえに $\cos x=0$ または $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから $x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ または $x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

したがって $x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(3) 左辺を変形して $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

よって $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ …… ①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$ であるから，① より

$x+\dfrac{\pi}{6}=\pi,\ 2\pi$ ゆえに $x=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

別解 $\begin{cases}\sqrt{3}\sin x+\cos x=0\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$ から $4\sin^2 x=1$

ゆえに $\sin x=\dfrac{1}{2},\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

または $\sin x=-\dfrac{1}{2},\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x=\dfrac{1}{2},\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$0\leqq x<2\pi$ から $x=\dfrac{5}{6}\pi$

$\sin x=-\dfrac{1}{2},\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$0\leqq x<2\pi$ から $x=\dfrac{11}{6}\pi$

(4) 左辺を変形して $\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

よって $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ …… ①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{15}{4}\pi$ であるから，① より

$$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi$$

ゆえに $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(5) 移項すると $\sin x-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq 0$

左辺を加法定理を用いて変形すると $\sin x-\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq 0$

整理すると $\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\geqq 0$

左辺を変形して $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq 0$ …… ①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ であるから，この範囲で $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ を満たす $x+\dfrac{\pi}{3}$ の値は $x+\dfrac{\pi}{3}=\pi,\ 2\pi$

ゆえに，① から $\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}\leqq\pi,\ 2\pi\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$

したがって $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi\leqq x<2\pi$

(6) $\cos x-\sin x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺に -1 を掛けて $\sin x-\cos x>-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

左辺を変形すると $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)>-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)>-\dfrac{1}{2}$ …… ①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{4}\pi$ であるから，この範囲で $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$ を満たす $x-\dfrac{\pi}{4}$ の値は $x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

ゆえに，① から $-\dfrac{\pi}{6}<x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{6}\pi$

したがって $\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{17}{12}\pi$

9 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin^2 x+\cos x-1=0$ (2) $1\leqq\sqrt{3}\sin x+\cos x\leqq\sqrt{3}$

解答 (1) $x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ (2) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

解説

(1) 左辺を変形すると $2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0$

整理すると $2\cos^2 x-\cos x-1=0$

左辺を変形して $(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$

よって $\cos x=1,\ -\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\cos x=1$ のとき $x=0$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ のとき $x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

ゆえに $x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(2) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから

$$1\leqq 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq\sqrt{3}$$

ゆえに $\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …… ①

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$ であるから，① より

$$\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\leqq x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$$

したがって $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

10 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)<\dfrac{1}{2}$

解答 (1) $\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ (2) $\dfrac{7}{12}\pi<\theta<\dfrac{23}{12}\pi$

解説

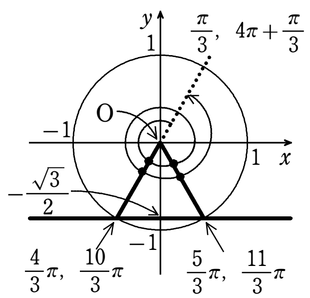
(1) $2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\alpha$ とおくと

$\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …… ①

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha<4\pi+\dfrac{\pi}{3}$

この範囲において，① の解は

$$\alpha=\frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$$



すなわち $2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{10}{3}\pi,\ \dfrac{11}{3}\pi$

ゆえに $\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

(2) $\theta+\frac{\pi}{4}=\alpha$ とおくと　$\sin\alpha<\frac{1}{2}$　……①

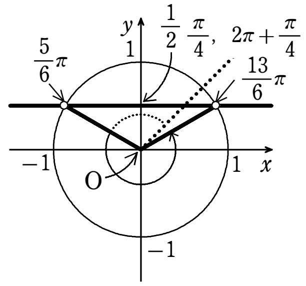
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{4}\leqq\alpha<2\pi+\frac{\pi}{4}$

この範囲において，① の解は

$$\frac{5}{6}\pi<\alpha<\frac{13}{6}\pi$$

すなわち　$\frac{5}{6}\pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{13}{6}\pi$

ゆえに　$\frac{7}{12}\pi<\theta<\frac{23}{12}\pi$



11 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$　　(2) $2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)<\sqrt{3}$

(3) $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$　　(4) $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqq-\sqrt{3}$

解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$　(2) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{13}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi<\theta<2\pi$

(3) $\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$　(4) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{12}\pi\leqq\theta<\frac{5}{4}\pi,\ \frac{17}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

(1) $2\theta-\frac{\pi}{3}=\alpha$ とおくと　$2\cos\alpha=\sqrt{3}$　すなわち　$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

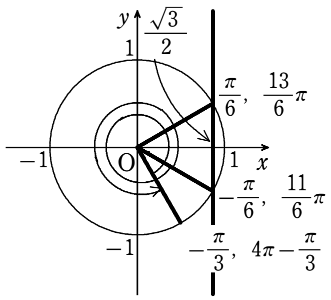
$$-\frac{\pi}{3}\leqq\alpha<4\pi-\frac{\pi}{3}\quad\cdots\cdots①$$

この範囲で $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$$\alpha=-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

すなわち　$2\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$



(2) (1) と同様に考える。

$2\theta-\frac{\pi}{3}=\alpha$ とおき，① の範囲で $2\cos\alpha<\sqrt{3}$ すなわち $\cos\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$$-\frac{\pi}{3}\leqq\alpha<-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi<\alpha<4\pi-\frac{\pi}{3}$$

よって　$-\frac{\pi}{3}\leqq2\theta-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}<2\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{3}<4\pi-\frac{\pi}{3}$

ゆえに　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{13}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi<\theta<2\pi$

(3) $\theta+\frac{\pi}{4}=\alpha$ とおくと　$\tan\alpha=-\sqrt{3}$

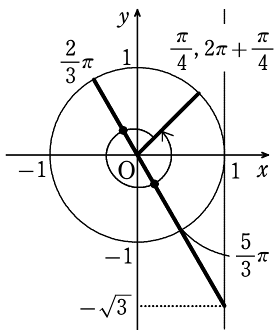
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{4}\leqq\alpha<2\pi+\frac{\pi}{4}$　……②

この範囲で $\tan\alpha=-\sqrt{3}$ を解くと

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

すなわち　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$



(4) (3) と同様に考える。

$\theta+\frac{\pi}{4}=\alpha$ とおき，② の範囲で $\tan\alpha\geqq-\sqrt{3}$ を解くと

$$\frac{\pi}{4}\leqq\alpha<\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi\leqq\alpha<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\leqq\alpha<2\pi+\frac{\pi}{4}$$

よって　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$

ゆえに　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{12}\pi\leqq\theta<\frac{5}{4}\pi,\ \frac{17}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$

12 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta=\tan\theta$

(3) $2\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1>0$　　(4) $\cos\theta<0$ かつ $4\cos^2\theta-1<0$

解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$　(2) $\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$　(3) $0\leqq\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi<\theta<2\pi$

(4) $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

解説

(1) 方程式から　$2(1-\sin^2\theta)-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$

整理すると　$2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta-3=0$

よって　$(\sin\theta+\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$

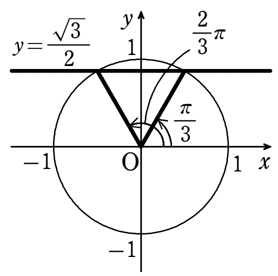
$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

$\sin\theta+\sqrt{3}\neq0$

ゆえに　$2\sin\theta-\sqrt{3}=0$

すなわち　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

これを解いて　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$



(2) 方程式から　$\sqrt{2}\cos\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

すなわち　$\sqrt{2}\cos^2\theta=\sin\theta$

ただし，$\theta\neq\frac{\pi}{2},\ \theta\neq\frac{3}{2}\pi$

よって　$\sqrt{2}(1-\sin^2\theta)=\sin\theta$

整理すると　$\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta-\sqrt{2}=0$

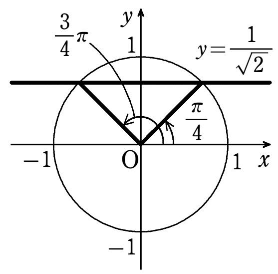
したがって　$(\sin\theta+\sqrt{2})(\sqrt{2}\sin\theta-1)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

$\sin\theta+\sqrt{2}\neq0$

ゆえに　$\sqrt{2}\sin\theta-1=0$　すなわち　$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

これを解いて　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$　$\left(\theta\neq\frac{\pi}{2},\ \theta\neq\frac{3}{2}\pi\ に適する\right)$



別解 方程式より，$\tan\theta$ と $\cos\theta$ の符号は同じであるから，θ は第 1 象限または第 2 象限の角である。……(*)

$\tan\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ を $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1+2\cos^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

両辺に $\cos^2\theta$ を掛けて整理すると　$2\cos^4\theta+\cos^2\theta-1=0$

ゆえに　$(\cos^2\theta+1)(2\cos^2\theta-1)=0$

$\cos^2\theta+1\geqq1$ であるから　$2\cos^2\theta-1=0$

よって　$\cos^2\theta=\frac{1}{2}$　すなわち　$\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

(*) から，求める解は　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

(3) 不等式から　$2(1-\cos^2\theta)+\sqrt{3}\cos\theta+1>0$

整理すると　$2\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta-3<0$

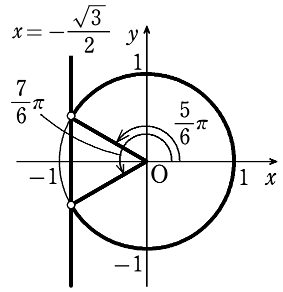
よって　$(\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})<0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから常に $\cos\theta-\sqrt{3}<0$ である。

ゆえに　$2\cos\theta+\sqrt{3}>0$

すなわち　$\cos\theta>-\frac{\sqrt{3}}{2}$

これを解いて　$0\leqq\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi<\theta<2\pi$



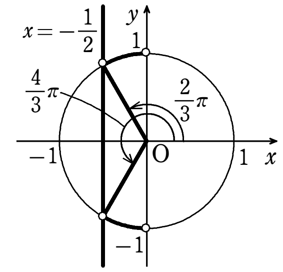
(4) 不等式から

$\cos\theta<0$ かつ $(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)<0$

よって　$\cos\theta<0$ かつ $-\frac{1}{2}<\cos\theta<\frac{1}{2}$

ゆえに　$-\frac{1}{2}<\cos\theta<0$

これを解いて　$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$



13 $0\leqq x<2\pi,\ 0\leqq y<2\pi$ のとき，連立方程式 $\begin{cases}\cos x-\sin y=1\\ \cos y+\sin x=-\sqrt{3}\end{cases}$ を解け。

解答 $x=\frac{5}{3}\pi,\ y=\frac{7}{6}\pi$

解説

$\begin{cases}\cos x-\sin y=1 & \cdots\cdots①\\ \cos y+\sin x=-\sqrt{3} & \cdots\cdots②\end{cases}$ とする。

① から　$\cos x=\sin y+1$　……③

② から　$\sin x=-\cos y-\sqrt{3}$　……④

これらを $\sin^2x+\cos^2x=1$ に代入すると

$$(-\cos y-\sqrt{3})^2+(\sin y+1)^2=1$$

よって　$\cos^2y+2\sqrt{3}\cos y+3+\sin^2y+2\sin y+1=1$

ゆえに　$\sin y=-\sqrt{3}\cos y-2$　……⑤

これを $\sin^2y+\cos^2y=1$ に代入すると

$$(-\sqrt{3}\cos y-2)^2+\cos^2y=1$$

$$4\cos^2y+4\sqrt{3}\cos y+3=0$$

よって　$(2\cos y+\sqrt{3})^2=0$

したがって　$\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　……⑥

よって，④ から　$\sin x=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　……⑦

⑤ から　$\sin y=-\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2=-\frac{1}{2}$　……⑧

⑧ を ③ に代入して　$\cos x=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$　……⑨

$0\leqq x<2\pi$ であるから，⑦，⑨ より　$x=\frac{5}{3}\pi$

$0\leqq y<2\pi$ であるから，⑥，⑧ より　$y=\frac{7}{6}\pi$

参考 三角関数の合成を用いると，⑤ は $2\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=-2$ と変形できて，これから

$\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=-1$　ゆえに　$y+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$

よって，$y=\frac{7}{6}\pi$ が得られる。

このとき，① から　$\cos x=\frac{1}{2}$　② から　$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$x=\frac{5}{3}\pi$

$\boxed{14}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos 2\theta+5\sin\theta-3<0$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(2)　$2\sin 2\theta-2(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)-\sqrt{3}=0$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(3)　$\cos\theta-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+4=0$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

解答　(1)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta\leqq\pi$　(2)　$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{4}{3}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$　(3)　$\theta=\frac{\pi}{3}$

解説

(1)　方程式から　$(1-2\sin^2\theta)+5\sin\theta-3<0$

整理すると　$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2>0$

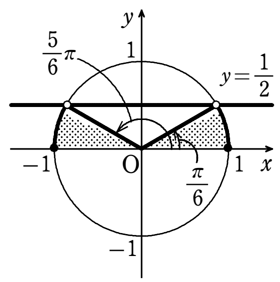
よって　$(\sin\theta-2)(2\sin\theta-1)>0$

$\sin\theta-2<0$ であるから

$2\sin\theta-1<0$　すなわち　$\sin\theta<\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから

$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta\leqq\pi$



(2)　方程式から

$2\cdot2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta-\sqrt{3}=0$

$2\sin\theta(2\cos\theta-1)+\sqrt{3}(2\cos\theta-1)=0$

ゆえに　$(2\sin\theta+\sqrt{3})(2\cos\theta-1)=0$

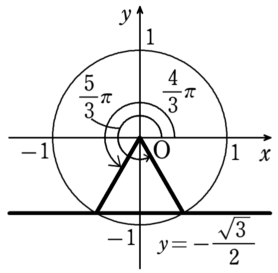
よって　$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$

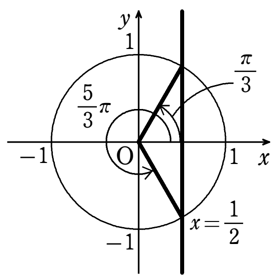
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\theta=\frac{4}{3}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

以上から，解は　$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{4}{3}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$





(3)　方程式から

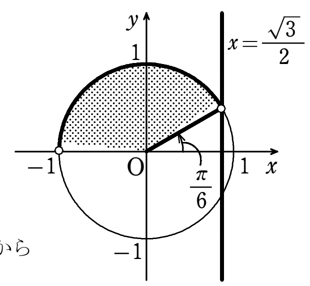
$\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+4=0$

整理すると　$2\cos^2\frac{\theta}{2}-3\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+3=0$

よって　$\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)=0$

$-1\leqq\cos\frac{\theta}{2}\leqq1$　より　$\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\neq0$ であるから

$2\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}=0$



ゆえに　$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$0\leqq\frac{\theta}{2}<\pi$ であるから　$\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{3}$

$\boxed{15}$ $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta=0$$

解答　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{5}{6}\pi$

解説

(左辺)$=(\cos 4\theta+\cos 2\theta)+\cos 3\theta$

$=2\cos\frac{4\theta+2\theta}{2}\cos\frac{4\theta-2\theta}{2}+\cos 3\theta$

$=2\cos 3\theta\cos\theta+\cos 3\theta$

$=\cos 3\theta(2\cos\theta+1)$

よって，与えられた方程式は　$\cos 3\theta(2\cos\theta+1)=0$

ゆえに　$\cos 3\theta=0$　または　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ から　$0\leqq3\theta\leqq3\pi$

この範囲で $\cos 3\theta=0$ を解くと　$3\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{5}{2}\pi$

よって　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{6}\pi$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ を解くと　$\theta=\frac{2}{3}\pi$

したがって，求める解は　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{5}{6}\pi$

別解　$\cos\theta=x$ とおくと

$\cos 4\theta=\cos 2\cdot2\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2x^2-1)^2-1$

よって，左辺は

$2x^2-1-3x+4x^3+2(2x^2-1)^2-1=8x^4+4x^3-6x^2-3x$

$=x(2x+1)(4x^2-3)$

ゆえに，方程式は　$x(2x+1)(4x^2-3)=0$

したがって　$x=0$，$-\frac{1}{2}$，$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

すなわち　$\cos\theta=0$，$-\frac{1}{2}$，$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲でこれを解くと　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{5}{6}\pi$

$\boxed{16}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$　$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

(2)　$\cos 3\theta+\sin 2\theta+\cos\theta>0$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(3)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$　$(0\leqq x\leqq\pi)$

解答　(1)　$x=\frac{2}{5}\pi$　(2)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

(3)　$x=\frac{\pi}{8}$，$\frac{5}{8}\pi$，$\frac{2}{3}\pi$

解説

(1)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=(\sin 4x+\sin x)+(\sin 3x+\sin 2x)$

$=2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{3}{2}x+2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}$

$=2\sin\frac{5}{2}x\left(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2}\right)$

$=2\sin\frac{5}{2}x\cdot2\cos x\cos\frac{x}{2}$

ゆえに，方程式は　$\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}=0$　…… ①

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$ であるから　$\cos x\neq0$，$\cos\frac{x}{2}\neq0$

よって，① から　$\sin\frac{5}{2}x=0$

$0<\frac{5}{2}x<\frac{5}{4}\pi$ であるから，$\sin\frac{5}{2}x=0$ となるのは，$\frac{5}{2}x=\pi$ のときである。

したがって　$x=\frac{2}{5}\pi$

(2)　$\cos 3\theta+\sin 2\theta+\cos\theta=(\cos 3\theta+\cos\theta)+\sin 2\theta$

$=2\cos 2\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=2\cos\theta(\cos 2\theta+\sin\theta)$

$=2\cos\theta(1-2\sin^2\theta+\sin\theta)$

$=-2\cos\theta(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)$

したがって，不等式は

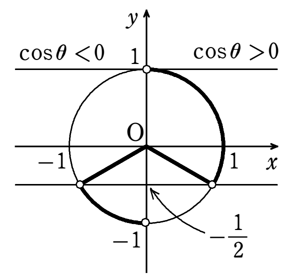
$\cos\theta(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$

ゆえに　「$\cos\theta>0$，$-\frac{1}{2}<\sin\theta<1$」または

「$\cos\theta<0$，$\sin\theta<-\frac{1}{2}$」

よって

$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$



(3)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x=2\sin 2x\cos x+\sin 2x$

$=\sin 2x(2\cos x+1)$

$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=(\cos 3x+\cos x)+\cos 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$

$=\cos 2x(2\cos x+1)$

したがって，方程式は　$\sin 2x(2\cos x+1)=\cos 2x(2\cos x+1)$

よって　$(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0$

ゆえに　$\cos x=-\frac{1}{2}$　…… ①　または　$\sin 2x=\cos 2x$　…… ②

$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で，① を解くと　$x=\frac{2}{3}\pi$

また，$\cos 2x=0$ のとき　$\sin 2x\neq0$ であるから，② は

$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1$　すなわち　$\tan 2x=1$

$0\leqq x\leqq\pi$　すなわち　$0\leqq2x\leqq2\pi$ の範囲で，これを解くと

$2x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{5}{4}\pi$　すなわち　$x=\frac{\pi}{8}$，$\frac{5}{8}\pi$

したがって，求める解は　$x=\frac{\pi}{8}$，$\frac{5}{8}\pi$，$\frac{2}{3}\pi$

$\boxed{17}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=1$　　(2)　$\cos 2\theta+\sin 2\theta+1>0$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{3}$，π　(2)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

解説

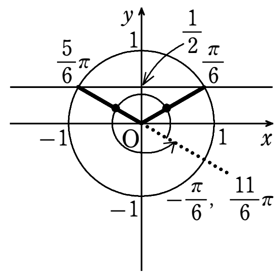
(1) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

よって，方程式は $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から $-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$

ゆえに，①から $\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって $\theta=\frac{\pi}{3},\ \pi$



(2) $\sin2\theta+\cos2\theta=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

よって，不等式は $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から $\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{17}{4}\pi$

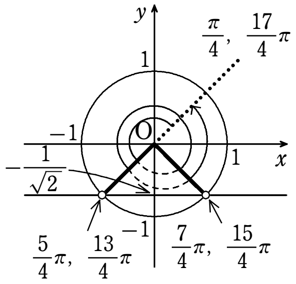
ゆえに，①から

$\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{13}{4}\pi,$

$\frac{15}{4}\pi<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{17}{4}\pi$

したがって

$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$



18 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta<1$

(3) $\sin\theta\leqq\sqrt{3}\cos\theta$

解答 (1) $\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$　(2) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

(3) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

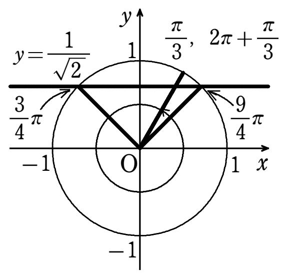
(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

よって，方程式は $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から $\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$

ゆえに，①から $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$

したがって $\theta=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$



(2) $\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta=2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

よって，不等式は $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{2}$ ……①

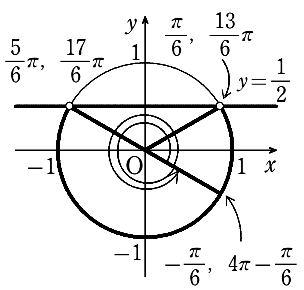
$0\leqq\theta<2\pi$ から $-\frac{\pi}{6}\leqq2\theta-\frac{\pi}{6}<4\pi-\frac{\pi}{6}$

ゆえに，①から

$-\frac{\pi}{6}\leqq2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi,$

$\frac{17}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<4\pi-\frac{\pi}{6}$

したがって $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$



(3) $\sin\theta\leqq\sqrt{3}\cos\theta$ から $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\leqq0$

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，

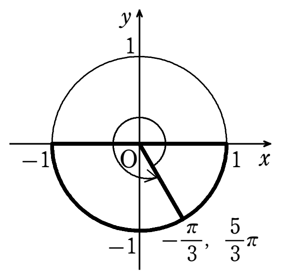
不等式は $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leqq0$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から $-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

ゆえに，①から

$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}\leqq0,\ \pi\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

したがって $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$



19 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$　(4) $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-1$

解答 (1) $\theta=0,\ \frac{5}{3}\pi$　(2) $\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{19}{12}\pi$　(3) $\theta=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$　(4) $\theta=\frac{7}{6}\pi$

解説

(1) $0\leqq\theta<2\pi$ から $-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

よって，方程式 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ から $\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

ゆえに $\theta=0,\ \frac{5}{3}\pi$

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ から $\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$

よって，方程式 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ から $\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$

ゆえに $\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{19}{12}\pi$

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ から $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

よって，方程式 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ から $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

ゆえに $\theta=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(4) $0\leqq\theta<2\pi$ から $-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$

よって，方程式 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ から $\theta-\frac{\pi}{6}=\pi$

ゆえに $\theta=\frac{7}{6}\pi$

20 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$　(2) $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\tan\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

解答 (1) $\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$　(2) $\theta=\frac{\pi}{24},\ \frac{7}{24}\pi,\ \frac{25}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi$

(3) $\theta=\frac{7}{24}\pi,\ \frac{11}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi,\ \frac{35}{24}\pi$

(4) $\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

解説

(1) $0\leqq\theta<2\pi$ から $-\frac{\pi}{3}\leqq2\theta-\frac{\pi}{3}<4\pi-\frac{\pi}{3}$

よって，方程式 $\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ から $2\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi$

ゆえに $\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ から $\frac{\pi}{6}\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}<4\pi+\frac{\pi}{6}$

よって，方程式 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ から $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi$

ゆえに $\theta=\frac{\pi}{24},\ \frac{7}{24}\pi,\ \frac{25}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi$

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ から $\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}<4\pi+\frac{\pi}{4}$

よって，方程式 $\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ から

$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi$

ゆえに $\theta=\frac{7}{24}\pi,\ \frac{11}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi,\ \frac{35}{24}\pi$

(4) $0\leqq\theta<2\pi$ から $\frac{\pi}{3}\leqq2\theta+\frac{\pi}{3}<4\pi+\frac{\pi}{3}$

よって，方程式 $\tan\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ から

$2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi$

ゆえに $\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

21 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$　(2) $2\cos^2\theta-3\sin\theta-3=0$

(3) $2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta<0$　(4) $2\sin^2\theta-4<5\cos\theta$

(5) $2\cos^2\theta\leqq\sin\theta+1$　(6) $\sin\theta<\tan\theta$

解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$　(2) $\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　(3) $0<\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi<\theta<\pi$

(4) $0\leqq\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$　(5) $\theta=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$

(6) $0<\theta<\frac{\pi}{2},\ \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

解説

(1) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$ から $2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta=0$

よって $2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$

ゆえに $(\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)=0$ ……①

$\cos\theta+2\neq0$ であるから，①より $2\cos\theta-1=0$

よって $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(2) $2\cos^2\theta-3\sin\theta-3=0$ から $2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta-3=0$

よって $2\sin^2\theta+3\sin\theta+1=0$

ゆえに　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta+1)=0$

したがって　$\sin\theta=-1,\ -\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\sin\theta=-1$ のとき　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

よって，解は　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(3)　$2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta<0$ から　$\sin\theta(2\sin\theta-\sqrt{3})<0$

よって　$0<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，解は　$0<\theta<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi<\theta<\pi$

(4)　$2\sin^2\theta-4<5\cos\theta$ から　$2(1-\cos^2\theta)-4<5\cos\theta$

よって　$2\cos^2\theta+5\cos\theta+2>0$

ゆえに　$(\cos\theta+2)(2\cos\theta+1)>0$　……①

$\cos\theta+2>0$ であるから，① より　$2\cos\theta+1>0$

よって　$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，解は　$0\leqq\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$

(5)　$2\cos^2\theta\leqq\sin\theta+1$ から　$2(1-\sin^2\theta)\leqq\sin\theta+1$

よって　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geqq0$

ゆえに　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)\geqq0$　……①

$\sin\theta+1\geqq0$ であるから，① より　$\sin\theta+1=0$ または $2\sin\theta-1\geqq0$

よって　$\sin\theta=-1$ または $\sin\theta\geqq\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\sin\theta=-1$ のとき　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

(6)　$\sin\theta<\tan\theta$ から　$\tan\theta\cos\theta<\tan\theta$

よって　$\tan\theta(1-\cos\theta)>0$　……①

$1-\cos\theta\geqq0$ であるから，① より　$\tan\theta>0$ かつ $1-\cos\theta\neq0$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\tan\theta>0$ のとき　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ \pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

$1-\cos\theta\neq0$ のとき　$\theta\neq0$

したがって，解は　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ \pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

22 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\cos2x=\cos x$　　(2)　$\sin2x=\cos x$

(3)　$2\cos2x+4\cos x-1=0$

(4)　$\sin x(1+\cos2x)+\sin2x(1+\cos x)=0$

解答　(1)　$x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$　(2)　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　(3)　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(4)　$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

解説

(1)　$\cos2x=\cos x$ から　$2\cos^2x-1=\cos x$

よって　$2\cos^2x-\cos x-1=0$

ゆえに　$(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$

したがって　$\cos x=1,\ -\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\cos x=1$ のとき　$x=0$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

したがって，解は　$x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(2)　$\sin2x=\cos x$ から　$2\sin x\cos x=\cos x$

よって　$\cos x(2\sin x-1)=0$

ゆえに　$\cos x=0$ または $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\cos x=0$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって，解は　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(3)　$2\cos2x+4\cos x-1=0$ から　$2(2\cos^2x-1)+4\cos x-1=0$

よって　$4\cos^2x+4\cos x-3=0$

ゆえに　$(2\cos x-1)(2\cos x+3)=0$

$2\cos x+3\neq0$ であるから　$2\cos x-1=0$　　よって　$\cos x=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(4)　$\sin x(1+\cos2x)+\sin2x(1+\cos x)=0$ から

$\sin x\{1+(2\cos^2x-1)\}+2\sin x\cos x(1+\cos x)=0$

整理して　$\sin x\cos x(2\cos x+1)=0$

ゆえに　$\sin x=0$　または　$\cos x=0$　または　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\sin x=0$ のとき　$x=0,\ \pi$

$\cos x=0$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

したがって，解は　$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

23 $0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $\cos x+\cos3x=0$ を解け。

解答　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

解説

$\cos x+\cos3x=0$ から　$2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cos\dfrac{x-3x}{2}=0$

すなわち　$2\cos2x\cos x=0$

よって　$\cos2x=0$ または $\cos x=0$

$0\leqq x<2\pi$ から　$0\leqq2x<4\pi$

ゆえに，$\cos2x=0$ から　$2x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$

よって　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

また，$\cos x=0$ から　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

したがって，解は　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

別解　$\cos3x=-3\cos x+4\cos^3x$ であるから　$4\cos^3x-2\cos x=0$

よって　$2\cos x(2\cos^2x-1)=0$

ゆえに　$\cos x=0$ または $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ または $\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$\cos x=0$ から　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

また　$\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$

$\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から　$x=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi$

したがって，解は　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

24 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x=-1$　　(2)　$2(\sin x-\cos x)=\sqrt{6}$

(3)　$\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=-\sqrt{2}$

解答　(1)　$x=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　(2)　$x=\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi$　(3)　$x=\dfrac{17}{24}\pi,\ \dfrac{23}{24}\pi,\ \dfrac{41}{24}\pi,\ \dfrac{47}{24}\pi$

解説

(1)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから，方程式は　$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$

よって　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ であるから，① より　$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

ゆえに　$x=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(2)　$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから，方程式は　$2\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}$

よって　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{4}\pi$ であるから，① より　$x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

ゆえに　$x=\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi$

(3)　$\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから，方程式は

$$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{2}$$

よって　$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{6}\leqq 2x-\frac{\pi}{6}<\frac{23}{6}\pi$ であるから，① より

$$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi$$

ゆえに　$x=\frac{17}{24}\pi,\ \frac{23}{24}\pi,\ \frac{41}{24}\pi,\ \frac{47}{24}\pi$

$\boxed{25}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\sin^2\theta+\cos\theta-2=0$　　(2)　$2\cos^2\theta+2\geqq-7\sin\theta$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　　(2)　$0\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

(1)　$2\sin^2\theta+\cos\theta-2=0$ から　$2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-2=0$

よって　$2\cos^2\theta-\cos\theta=0$　　ゆえに　$\cos\theta(2\cos\theta-1)=0$

したがって　$\cos\theta=0,\ \frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta=0$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

よって，解は　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

(2)　$2\cos^2\theta+2\geqq-7\sin\theta$ から　$2(1-\sin^2\theta)+2\geqq-7\sin\theta$

よって　$2\sin^2\theta-7\sin\theta-4\leqq0$　　ゆえに　$(\sin\theta-4)(2\sin\theta+1)\leqq0$

$\sin\theta-4<0$ であるから　$2\sin\theta+1\geqq0$　　よって　$\sin\theta\geqq-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，解は　$0\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\leqq\theta<2\pi$

$\boxed{26}$ $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=1$

(2)　$\cos^2x-2\cos x-\sin^2x+2\sin x=0$

解答　(1)　$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$　　(2)　$x=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$

解説

(1)　与えられた方程式から　$\frac{1+\cos2x}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sin2x}{2}=1$

よって　$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cos2x=\frac{1}{2}$

ゆえに　$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ から　$\frac{\pi}{6}\leqq 2x+\frac{\pi}{6}<\frac{25}{6}\pi$

よって，① から　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi$

したがって，解は　$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$

別解　与えられた方程式から　$(\cos^2x-1)+\sqrt{3}\sin x\cos x=0$

よって　$-\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0$

ゆえに　$\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$

よって　$\sin x=0$ または $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$

すなわち　$\sin x=0$ または $\tan x=\sqrt{3}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\sin x=0$ のとき　$x=0,\ \pi$

$\tan x=\sqrt{3}$ のとき　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

したがって，解は　$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$

(2)　与えられた方程式から　$\cos^2x-\sin^2x-2(\cos x-\sin x)=0$

よって　$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-2)=0$　……①

$\cos x+\sin x-2=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2$ であり，$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq-1$ から

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\neq0$　，よって　$\cos x-\sin x=0$

変形して　$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$　　ゆえに　$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$　……②

また，$0\leqq x<2\pi$ から　$-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$

よって，② から　$x-\frac{\pi}{4}=0,\pi$　　したがって　$x=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$