三角関数の合成クイズ

1 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\cos\theta$

解答　(1) $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

解説

(1) $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ から

$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

(2) $\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ から

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\left\{\sin\theta\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\theta\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

2 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。[各 10 点]

(1) $\sqrt{6}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

解答　(1) $\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{6}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

(2) $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ であるから

$$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

解説

(1) $\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{6}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

(2) $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ であるから

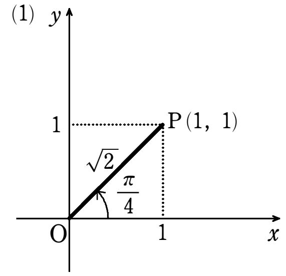
$$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

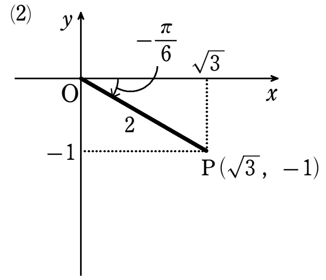
$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

3 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$





解説

4 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$0<\alpha<2\pi$ とする。

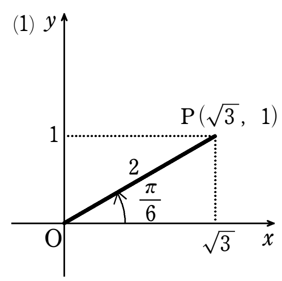
(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\cos\theta$

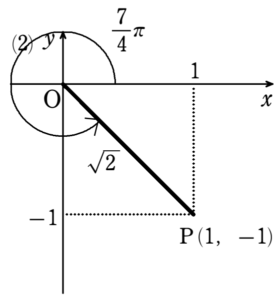
解答　(1) $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{7}{4}\pi\right)$

解説

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{7}{4}\pi\right)$





5 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$0<\alpha<2\pi$ とする。

(1) $\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

解答　(1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(2) $2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{3}\pi\right)$

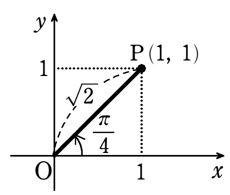
解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ とおくと

$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

図から　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

よって　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

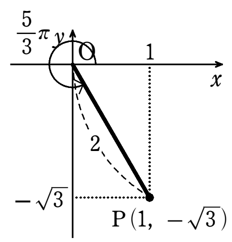


(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ とおくと

$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

図から　$\alpha=\dfrac{5}{3}\pi$

よって　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{3}\pi\right)$



6 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする。

(1) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　　(2) $\cos\theta-\sin\theta$　　(3) $2\sin\theta+\cos\theta$

解答　(1) $2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

(3) $\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$　ただし，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

解説

(1) $\mathrm{P}(1,\ -\sqrt{3})$ とすると　　$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $-\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\cos\theta$

$\mathrm{P}(-1,\ 1)$ とすると　　$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\cos\theta$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$$

(3) $\mathrm{P}(2,\ 1)$ とすると　　$\mathrm{OP}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

また，線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

よって　$2\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

7 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta$　　(2) $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$　　(3) $2\sin\theta+\sqrt{5}\cos\theta$

解答　(1) $2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(2) $2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)$

(3) $3\sin(\theta+\alpha)$　ただし，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

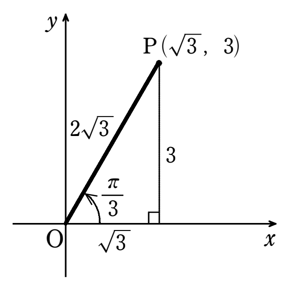
解説

(1) $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 3)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は　$\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

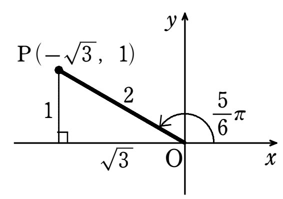


(2) $\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ 1)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は　$\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)$



(3)　P$(2,\ \sqrt{5})$ とすると

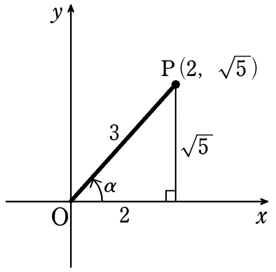
$\mathrm{OP}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$

また，線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

よって　$2\sin\theta+\sqrt{5}\cos\theta=3\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$



8 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$　　(3)　$2\sin\theta+3\cos\theta$

解答　(1)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$　　(2)　$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3)　$\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$　ただし　$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

解説

(1)　$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

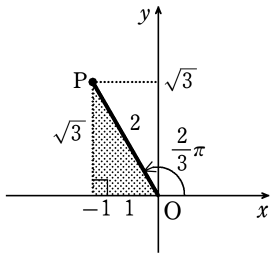
P$(-1,\ \sqrt{3})$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

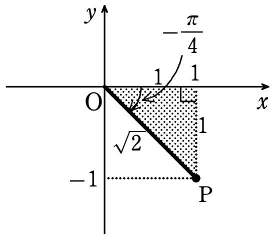


(2)　P$(1,\ -1)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $-\dfrac{\pi}{4}$

よって　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$



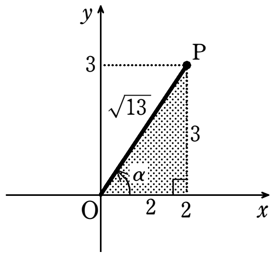
(3)　P$(2,\ 3)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

また，線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

よって　$2\sin\theta+3\cos\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$



9 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$0<\alpha<2\pi$ とする。

(1)　$\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$　　(2)　$\dfrac{1}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　(3)　$4\sin\theta+7\cos\theta$

解答　(1)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)$　　(2)　$\sin\left(\theta+\dfrac{5}{3}\pi\right)$

(3)　$\sqrt{65}\sin(\theta+\alpha)$　ただし，$\sin\alpha=\dfrac{7}{\sqrt{65}}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$

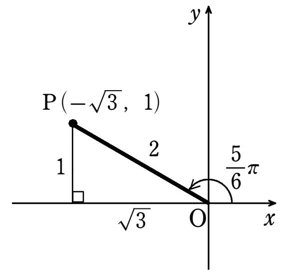
解説

(1)　P$(-\sqrt{3},\ 1)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は　$\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)$

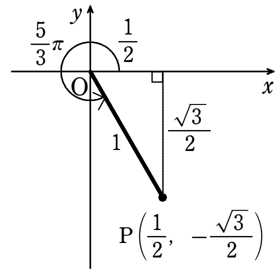


(2)　P$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は　$\dfrac{5}{3}\pi$

よって　$\dfrac{1}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sin\left(\theta+\dfrac{5}{3}\pi\right)$



(3)　P$(4,\ 7)$ とすると

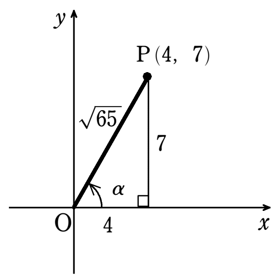
$\mathrm{OP}=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$

また，線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$\sin\alpha=\dfrac{7}{\sqrt{65}}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$

よって　$4\sin\theta+7\cos\theta=\sqrt{65}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{7}{\sqrt{65}}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$



10 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$0<\alpha<2\pi$ とする。

(1)　$\sin\theta-\cos\theta$　　(2)　$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$　　(3)　$5\sin\theta+4\cos\theta$

解答　(1)　$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{7}{4}\pi\right)$　　(2)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

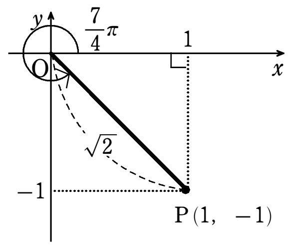
(3)　$\sqrt{41}\sin(\theta+\alpha)$　ただし，$\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$

解説

(1)　P$(1,\ -1)$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

線分 OP と x 軸の正の向きとのなす角は　$\dfrac{7}{4}\pi$

よって　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{7}{4}\pi\right)$



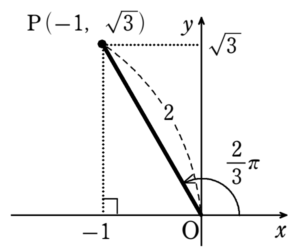
(2)　$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

P$(-1,\ \sqrt{3})$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

線分 OP と x 軸の正の向きとのなす角は　$\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$



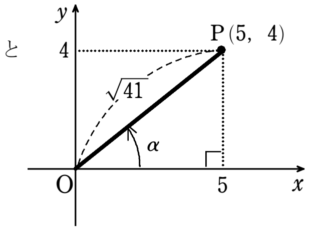
(3)　P$(5,\ 4)$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$

線分 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$

よって　$5\sin\theta+4\cos\theta=\sqrt{41}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$



11 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta$　　(2)　$-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

(3)　$\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　(4)　$\sqrt{6}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta$

解答　(1)　$2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(2)　$2\sin\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)$　　(3)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(4)　$2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

解説

(1)　$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$ であるから

$\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left\{\sin\theta\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\theta\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

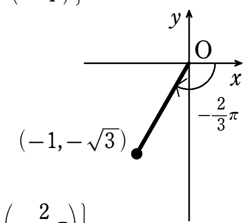
$=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2)　$\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから

$-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\left(-\dfrac{1}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left\{\sin\theta\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)+\cos\theta\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$=2\sin\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)$



(3)　$\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ であるから

$\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(4)　$\sqrt{(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$ であるから

$\sqrt{6}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$

$=2\sqrt{2}\left\{\sin\theta\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

12 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

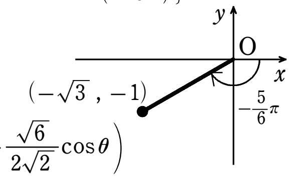
(1)　$-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$　　(2)　$\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta$

解答　(1)　$2\sin\left(\theta-\dfrac{5}{6}\pi\right)$　　(2)　$2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

解説

(1)　$\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$ であるから

$$-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\left\{\sin\theta\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\cos\theta\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$
$$=2\sin\left(\theta-\frac{5}{6}\pi\right)$$



(2) $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\cos\theta\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left\{\sin\theta\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\theta\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

13 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$0<\alpha<2\pi$ とする。

(1) $-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　　(2) $-2\sin\theta+2\cos\theta$

(3) $-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$　　(4) $\sqrt{6}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta$

(5) $3\sin\theta+4\cos\theta$　　(6) $5\sin\theta-12\cos\theta$

解答 (1) $2\sin\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)$　(2) $2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

(3) $2\sin\left(\theta+\frac{7}{6}\pi\right)$　(4) $2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)$

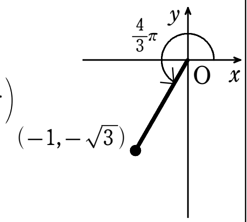
(5) $5\sin(\theta+\alpha)$　ただし $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$

(6) $13\sin(\theta+\alpha)$　ただし $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$，$\cos\alpha=\frac{5}{13}$

解説

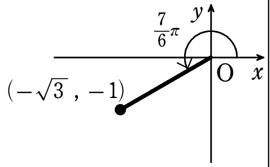
(1) $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ であるから

$$-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\left(-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{4}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)$$



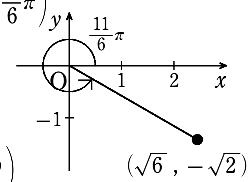
(2) $\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ であるから

$$-2\sin\theta+2\cos\theta=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{3}{4}\pi+\cos\theta\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$$



(3) $\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$ であるから

$$-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{7}{6}\pi+\cos\theta\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{7}{6}\pi\right)$$



(4) $\sqrt{(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{6}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{11}{6}\pi+\cos\theta\sin\frac{11}{6}\pi\right)$$
$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)$$

(5) $\sqrt{3^2+4^2}=5$ であるから

$$3\sin\theta+4\cos\theta=5\left(\frac{3}{5}\sin\theta+\frac{4}{5}\cos\theta\right)$$
$$=5(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$$
$$=5\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$

(6) $\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$ であるから

$$5\sin\theta-12\cos\theta=13\left(\frac{5}{13}\sin\theta-\frac{12}{13}\cos\theta\right)$$
$$=13(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$$
$$=13\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$\sin\alpha=-\frac{12}{13}$

14 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $-\sin\theta+\cos\theta$　(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　(3) $-\sqrt{3}\sin\theta-3\cos\theta$

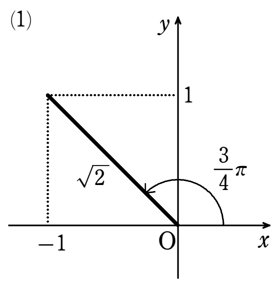
解答 (1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$　(2) $2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$　(3) $2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$

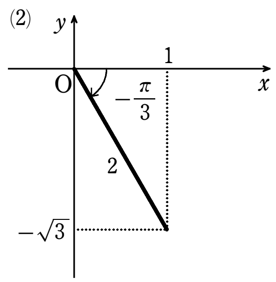
解説

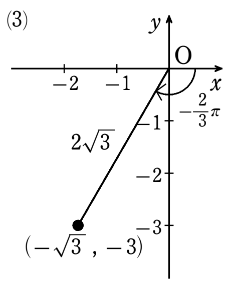
(1) 与式$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

(2) 与式$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

(3) 与式$=2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$







別解 (1) $\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

与式$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\sin\theta+\sin\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

(2) $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ であるから

与式$=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta-\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta\right)=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

(3) $\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$ であるから

与式$=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\sin\theta+\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\cos\theta\right\}=2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$

15 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta-\cos\theta$

(3) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　　(4) $\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$

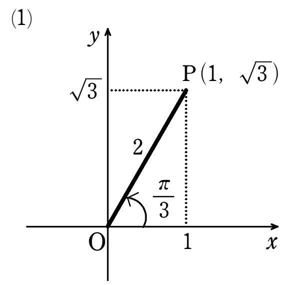
解答 (1) $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$　(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)$

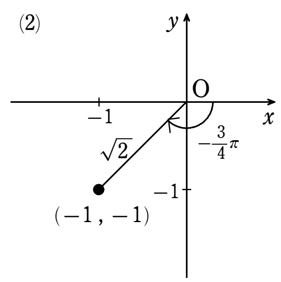
(3) $2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$　(4) $2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

解説

(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

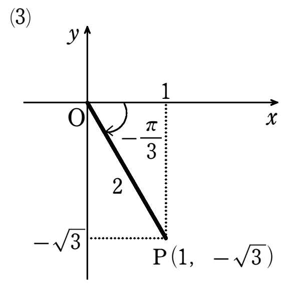
(2) $-\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)$

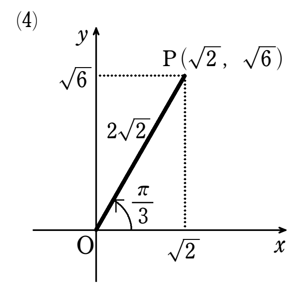




(3) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

(4) $\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$





別解 (1) $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから

与式$=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(2) $\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

与式$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left\{\sin\theta\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+\cos\theta\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)$

(3) $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ であるから

与式$=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

(4) $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$ であるから

$$与式=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

16 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi\leqq\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$　　　　(2)　$-\sin\theta+\cos\theta$

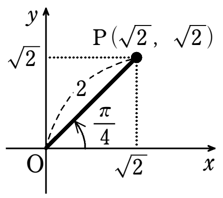
解答　(1)　$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　　(2)　$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

解説

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ とおくと

$r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

図から　　$\alpha=\frac{\pi}{4}$



よって

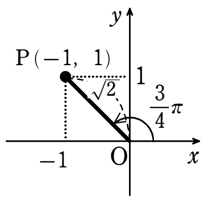
$\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$

$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

(2)　$-\sin\theta+\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ とおくと

$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

図から　　$\alpha=\frac{3}{4}\pi$



よって

$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$