点・直線・距離・面積・図形クイズ

$\boxed{1}$ 2点A(1)，B(5) を結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ。

(1)　3：1に内分する点C　　(2)　1：3に内分する点D

(3)　3：1に外分する点E　　(4)　1：3に外分する点F

解答　(1)　4　(2)　2　(3)　7　(4)　-1

解説

求める点の座標を x とする。

(1)　$x=\dfrac{1\cdot 1+3\cdot 5}{3+1}=\dfrac{16}{4}=4$

(2)　$x=\dfrac{3\cdot 1+1\cdot 5}{1+3}=\dfrac{8}{4}=2$

(3)　$x=\dfrac{-1\cdot 1+3\cdot 5}{3-1}=\dfrac{14}{2}=7$

(4)　$x=\dfrac{-3\cdot 1+1\cdot 5}{1-3}=\dfrac{2}{-2}=-1$

$\boxed{2}$ 2点A(-2)，B(6) を結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ。

(1)　3：2に内分する点C　　(2)　3：2に外分する点D

(3)　2：3に外分する点E　　(4)　中点M

解答　(1)　$\dfrac{14}{5}$　(2)　22　(3)　-18　(4)　2

解説

求める点の座標を x とする。

(1)　$x=\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot 6}{3+2}=\dfrac{14}{5}$

(2)　$x=\dfrac{-2\cdot(-2)+3\cdot 6}{3-2}=22$

(3)　$x=\dfrac{-3\cdot(-2)+2\cdot 6}{2-3}=\dfrac{18}{-1}=-18$

(4)　$x=\dfrac{-2+6}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

$\boxed{3}$ 次の2点間の距離を求めよ。

(1)　A(1, -1)，B(4, 3)　　(2)　O(0, 0)，A$(-7, -1)$

解答　(1)　5　(2)　$5\sqrt{2}$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(4-1)^2+\{3-(-1)\}^2}=\sqrt{25}=5$

(2)　$\mathrm{OA}=\sqrt{(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 3点A$(-2, 4)$，B$(-3, -5)$，C$(5, -1)$ について，次のものを求めよ。

(1)　直線BCの方程式　　(2)　線分BCの長さ

(3)　点Aと直線BCの距離　　(4)　△ABCの面積

解答　(1)　$x-2y-7=0$　(2)　$4\sqrt{5}$　(3)　$\dfrac{17\sqrt{5}}{5}$　(4)　34

解説

(1)　$y+5=\dfrac{-1+5}{5+3}(x+3)$ から

$x-2y-7=0$

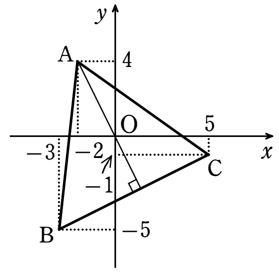
(2)　$\mathrm{BC}=\sqrt{(5+3)^2+(-1+5)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

(3)　点Aと直線BCの距離を d とすると

$d=\dfrac{|-2-2\cdot 4-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{17}{\sqrt{5}}=\dfrac{17\sqrt{5}}{5}$

(4)　△ABCの面積を S とすると

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\dfrac{17}{\sqrt{5}}=34$



$\boxed{5}$ 数直線上の2点A(-4)，B(6) を結ぶ線分ABに対して，次の座標を求めよ。[各5点]

(1)　3：2に内分する点C　　(2)　中点D

(3)　6：1に外分する点E　　(4)　1：6に外分する点F

解答　(1)　点Cの座標を x とすると　$x=\dfrac{2\cdot(-4)+3\cdot 6}{3+2}=2$

(2)　点Dの座標を x とすると　$x=\dfrac{(-4)+6}{2}=1$

(3)　点Eの座標を x とすると　$x=\dfrac{(-1)\cdot(-4)+6\cdot 6}{6-1}=8$

(4)　点Fの座標を x とすると　$x=\dfrac{(-6)\cdot(-4)+1\cdot 6}{1-6}=-6$

解説

(1)　点Cの座標を x とすると　$x=\dfrac{2\cdot(-4)+3\cdot 6}{3+2}=2$

(2)　点Dの座標を x とすると　$x=\dfrac{(-4)+6}{2}=1$

(3)　点Eの座標を x とすると　$x=\dfrac{(-1)\cdot(-4)+6\cdot 6}{6-1}=8$

(4)　点Fの座標を x とすると　$x=\dfrac{(-6)\cdot(-4)+1\cdot 6}{1-6}=-6$

$\boxed{6}$ 次の2点間の距離を求めよ。[各5点]

(1)　A(2, 4)，B(6, 7)　　(2)　A$(1, -2)$，B$(-5, 4)$

解答　(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(6-2)^2+(7-4)^2}=\sqrt{16+9}=5$

(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(-5-1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(6-2)^2+(7-4)^2}=\sqrt{16+9}=5$

(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(-5-1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$

$\boxed{7}$ 3点A(6, 0)，B(5, 2)，C$(4, -1)$ がある。[各8点]

(1)　直線ABの方程式を求めよ。　　(2)　点Cと直線ABの距離を求めよ。

(3)　△ABCの面積を求めよ。

解答　(1)　$y=\dfrac{2-0}{5-6}(x-6)$ より　$y=-2x+12$

(2)　直線ABの方程式は $2x+y-12=0$ より

$\dfrac{|2\cdot 4+(-1)-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(3)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(5-6)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\dfrac{5}{2}$

解説

(1)　$y=\dfrac{2-0}{5-6}(x-6)$ より　$y=-2x+12$

(2)　直線ABの方程式は $2x+y-12=0$ より

$\dfrac{|2\cdot 4+(-1)-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(3)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(5-6)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\dfrac{5}{2}$

$\boxed{8}$ 2点A(-3)，B(6) を結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ。

(1)　2：1に内分する点　　(2)　2：1に外分する点

(3)　1：2に外分する点　　(4)　中点

解答　(1)　3　(2)　15　(3)　-12　(4)　$\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$\dfrac{1\cdot(-3)+2\cdot 6}{2+1}=\dfrac{9}{3}=3$

(2)　$\dfrac{-1\cdot(-3)+2\cdot 6}{2-1}=15$

(3)　$\dfrac{-2\cdot(-3)+1\cdot 6}{1-2}=-12$

(4)　$\dfrac{-3+6}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{9}$ 次の2点間の距離を求めよ。

(1)　A$(1, -1)$，B(3, 2)　　(2)　O(0, 0)，A$(4, -2)$

解答　(1)　$\sqrt{13}$　(2)　$2\sqrt{5}$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

(2)　$\mathrm{OA}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\boxed{10}$ 3点A(1, 3)，B(5, 6)，C$(t, 0)$ について，△ABCが二等辺三角形になるとき，t の値を求めよ。ただし，$t>0$ とする。

解答　$t=\dfrac{51}{8}$，5

解説

△ABCが二等辺三角形になるとき，

[1]　AB＝BC　　[2]　BC＝CA　　[3]　CA＝AB

の3つの場合がありうる。

ここで　$\mathrm{AB}^2=(5-1)^2+(6-3)^2=25$

$\mathrm{BC}^2=(t-5)^2+(0-6)^2=t^2-10t+61$

$\mathrm{CA}^2=(1-t)^2+(3-0)^2=t^2-2t+10$

[1]の場合，$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2$ から　$25=t^2-10t+61$

よって　$t^2-10t+36=0$

判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-5)^2-1\cdot 36=-11$

$D<0$ であるから，この方程式を満たす実数 t は存在しない。

[2]の場合，$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$ から　$t^2-10t+61=t^2-2t+10$

よって　$-8t=-51$　　ゆえに　$t=\dfrac{51}{8}$

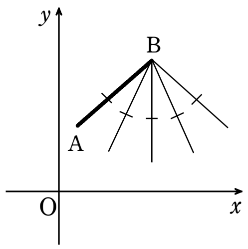
[3] の場合，$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2$ から　$t^2-2t+10=25$

よって　$t^2-2t-15=0$　すなわち　$(t+3)(t-5)=0$

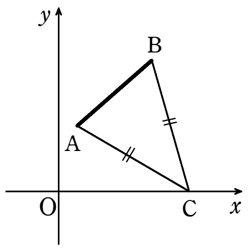
$t>0$ であるから　$t=5$

以上から，求める t の値は　$t=\dfrac{51}{8}$，5

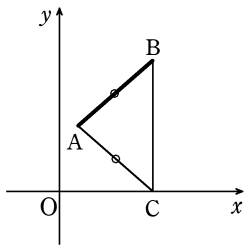
[1]　AB＝BC



[2]　BC＝CA



[3]　CA＝AB



11　2 点 A(-3)，B(5) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

(1)　4：3 に内分する点　　(2)　4：3 に外分する点

(3)　3：4 に外分する点　　(4)　中点

解答　(1)　$\dfrac{11}{7}$　(2)　29　(3)　-27　(4)　1

解説

(1)　$\dfrac{3\cdot(-3)+4\cdot5}{4+3}=\dfrac{11}{7}$

(2)　$\dfrac{-3\cdot(-3)+4\cdot5}{4-3}=29$

(3)　$\dfrac{-4\cdot(-3)+3\cdot5}{3-4}=-27$

(4)　$\dfrac{-3+5}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

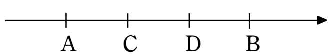
12　2 点 A(-6)，B(9) を結ぶ線分 AB を 3 等分する点を，A に近い方から順に C，D とする。C，D の座標を求めよ。

解答　C，D の順に -1，4

解説

点 C は線分 AB を 1：2 に内分するから，その座標は　$\dfrac{2\cdot(-6)+1\cdot9}{1+2}=-1$

点 D は線分 AB を 2：1 に内分するから，その座標は　$\dfrac{1\cdot(-6)+2\cdot9}{2+1}=4$



13　2 点 A(-5)，B(11) に対して，線分 AB を 5：3 に内分する点を P，7：11 に外分する点を Q とする。線分 PQ の中点の座標を求めよ。

解答　-14

解説

点 P の座標は　$\dfrac{3\cdot(-5)+5\cdot11}{5+3}=5$

点 Q の座標は　$\dfrac{-11\cdot(-5)+7\cdot11}{7-11}=-33$

よって，線分 PQ の中点の座標は　$\dfrac{5+(-33)}{2}=-14$

14　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　(2，3)，(7，5)　　(2)　(1，-2)，(-3，4)

(3)　(0，0)，(-12，-5)

解答　(1)　$\sqrt{29}$　(2)　$2\sqrt{13}$　(3)　13

解説

(1)　$\sqrt{(7-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{29}$

(2)　$\sqrt{(-3-1)^2+\{4-(-2)\}^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

(3)　$\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13$

15　次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　原点，直線 $2x-y-5=0$　　(2)　点 (2，1)，直線 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}$

(3)　点 (2，-3)，直線 $2x+y-3=0$　　(4)　点 (-1，-3)，直線 $y=3x-5$

解答　(1)　$\sqrt{5}$　(2)　1　(3)　$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(4)　$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

解説

(1)　$\dfrac{|-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(2)　$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}$　より　$3x-4y+3=0$　ゆえに　$\dfrac{|3\cdot2-4\cdot1+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

(3)　$\dfrac{|2\cdot2+(-3)-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(4)　$3x-y-5=0$ と変形できるから

$$\frac{|3\cdot(-1)-(-3)-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

16　3 点 (0，8)，(4，0)，(t，t^2) が一直線上にあるとき，t の値を求めよ。

解答　$t=2$，-4

解説

2 点 (0，8)，(4，0) を通る直線の方程式は

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{8}=1$　すなわち　$2x+y-8=0$

点 (t，t^2) がこの直線上にあるから

$t^2+2t-8=0$　　よって　$(t-2)(t+4)=0$

ゆえに　$t=2$，-4

別解　2 点 (0，8)，(4，0) を通る直線の傾きは　$\dfrac{0-8}{4-0}=-2$

$t\neq0$ のとき，2 点 (0，8)，(t，t^2) を通る直線の傾きは　$\dfrac{t^2-8}{t-0}=\dfrac{t^2-8}{t}$

3 点 (0，8)，(4，0)，(t，t^2) が一直線上にあるための条件は，$t\neq0$ で

$\dfrac{t^2-8}{t}=-2$

となることである。両辺に t を掛けて

$t^2-8=-2t$

すなわち　$t^2+2t-8=0$

これを解いて　$t=2$，-4　　これらは $t\neq0$ を満たす。

17　次の点と直線の距離を求めよ。[各 8 点]

(1)　(2，-2)，$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{4}$　　(2)　(-1，2)，$y=-3x+3$

解答　(1)　$\dfrac{|2\cdot2+4\cdot(-2)-7|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\dfrac{|-11|}{\sqrt{20}}=\dfrac{11}{2\sqrt{5}}=\dfrac{11\sqrt{5}}{10}$

(2)　直線の方程式は $3x+y-3=0$ より

$$\frac{|3\cdot(-1)+2-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

解説

(1)　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{4}$　より　$2x+4y-7=0$

$$\frac{|2\cdot2+4\cdot(-2)-7|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{|-11|}{\sqrt{20}}=\frac{11}{2\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{10}$$

(2)　直線の方程式は $3x+y-3=0$ より

$$\frac{|3\cdot(-1)+2-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

18　3 点 (a，-2)，(3，2)，(-1，4) が同じ直線上にあるとき，a の値を求めよ。[15 点]

解答　2 点 (3，2)，(-1，4) を通る直線の方程式は

$$y-2=\frac{4-2}{-1-3}(x-3)$$

よって　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

この直線上に点 (a，-2) があるから

$$-2=-\frac{1}{2}a+\frac{7}{2}$$

ゆえに　$a=11$

解説

2 点 (3，2)，(-1，4) を通る直線の方程式は

$$y-2=\frac{4-2}{-1-3}(x-3)$$

よって　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

この直線上に点 (a，-2) があるから

$$-2=-\frac{1}{2}a+\frac{7}{2}$$

ゆえに　$a=11$

19　2 直線 $2x+5y-3=0$ ……①，$5x+ky-2=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1)　①，② が平行になるとき，k の値を求めよ。　[各 8 点]

(2)　①，② が垂直になるとき，k の値を求めよ。

解答　(1)　① と ② が平行になるとき，$k\neq0$ で傾きが等しいことから

$-\dfrac{2}{5}=-\dfrac{5}{k}$　　よって　$k=\dfrac{25}{2}$

(2)　① と ② が垂直のとき，$k\neq0$ であるから

$\left(-\dfrac{2}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{k}\right)=-1$　　よって　$k=-2$

解説

(1)　① と ② が平行になるとき，$k\neq0$ で傾きが等しいことから

$-\dfrac{2}{5}=-\dfrac{5}{k}$　　よって　$k=\dfrac{25}{2}$

(2)　① と ② が垂直のとき，$k\neq0$ であるから

$\left(-\dfrac{2}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{k}\right)=-1$　　よって　$k=-2$

20　3 直線 ℓ：$x-2y+8=0$，m：$x+y-1=0$，n：$ax+y-5=0$ が，三角形を作らないように定数 a の値を定めよ。[20 点]

解答　ℓ，m の交点 A の座標は，連立方程式 $x-2y+8=0$，$x+y-1=0$ を解いて $(-2,\ 3)$ である。
3 直線 ℓ，m，n が三角形を作らない条件は，n が ℓ または m に平行，または n が ℓ，m の交点 A を通ることである。

[1]　n が ℓ に平行なとき，$-a=\dfrac{1}{2}$ より　　$a=-\dfrac{1}{2}$

[2]　n が m に平行なとき，$-a=-1$ より　　$a=1$

[3]　n が ℓ，m の交点 A を通るとき　　$a\cdot(-2)+3-5=0$

よって　　$a=-1$

以上より　　$a=-1,\ -\dfrac{1}{2},\ 1$

解説

ℓ，m の交点 A の座標は，連立方程式 $x-2y+8=0$，$x+y-1=0$ を解いて $(-2,\ 3)$ である。
3 直線 ℓ，m，n が三角形を作らない条件は，n が ℓ または m に平行，または n が ℓ，m の交点 A を通ることである。

[1]　n が ℓ に平行なとき，$-a=\dfrac{1}{2}$ より　　$a=-\dfrac{1}{2}$

[2]　n が m に平行なとき，$-a=-1$ より　　$a=1$

[3]　n が ℓ，m の交点 A を通るとき　　$a\cdot(-2)+3-5=0$

よって　　$a=-1$

以上より　　$a=-1,\ -\dfrac{1}{2},\ 1$

21　円 $x^2+y^2=a^2$ (ただし，$a>0$) が，直線 $y=x+1$ から切り取る線分の長さが $\sqrt{14}$ であるとき，a の値を求めよ。[20 点]

解答　円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $x-y+1=0$ との距離は

$$\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$a^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2=4$

$a>0$ より　　$a=2$

解説

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $x-y+1=0$ との距離は

$$\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$a^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2=4$

$a>0$ より　　$a=2$

22　次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　原点，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$　　　　(2)　点 $(4,\ -1)$，$2x-3y+5=0$

解答　(1)　$\dfrac{12}{5}$　　(2)　$\dfrac{16}{\sqrt{13}}$　$\left(\dfrac{16\sqrt{13}}{13}\right)$

解説

(1)　$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$　より　$4x+3y-12=0$　ゆえに　$\dfrac{|4\cdot0+3\cdot0-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|-12|}{\sqrt{25}}=\dfrac{12}{5}$

(2)　$\dfrac{|2\cdot4-3\cdot(-1)+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{|16|}{\sqrt{13}}=\dfrac{16}{\sqrt{13}}$

23　2 直線 $(a-2)x+ay+2=0$，$x+(a-2)y+1=0$ が平行になるときは $a=$ ア $\boxed{}$ であり，特に一致する場合は $a=$ イ $\boxed{}$ である。また，垂直になるときは $a=$ ウ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　1，4　　(イ)　4　　(ウ)　-1，2

解説

2 直線が平行になるための条件は　　$(a-2)(a-2)-1\cdot a=0$

整理して　　$a^2-5a+4=0$　　　よって　　$(a-1)(a-4)=0$

したがって　　$a={}^{ア}1,\ 4$

$a=1$ のとき

2 直線は $-x+y+2=0$，$x-y+1=0$ で，一致しない。

$a=4$ のとき

2 直線は $2x+4y+2=0$，$x+2y+1=0$ で，一致する。

したがって　　$a={}^{イ}4$

2 直線が垂直になるための条件は　　$(a-2)\cdot1+a(a-2)=0$

整理して　　$a^2-a-2=0$　　　よって　　$(a+1)(a-2)=0$

したがって　　$a={}^{ウ}-1,\ 2$

24　平面上の 3 点 A $(-2,\ 3)$，B $(1,\ 2)$，C $(k,\ k+9)$ が同一直線上にあるとき，k の値を求めよ。

解答　$k=-5$

解説

(解答 1)　2 点 A，B を通る直線の方程式は

$$y-3=\frac{2-3}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$$

よって　　$x+3y-7=0$

点 C $(k,\ k+9)$ がこの直線上にあるから　　$k+3(k+9)-7=0$

これを解いて　　$k=-5$

(解答 2)　直線 AB は x 軸と垂直ではなく，点 C は A，B のどちらとも一致しないから，直線 AB と直線 AC の傾きが等しくなればよい。

よって　　$\dfrac{2-3}{1-(-2)}=\dfrac{(k+9)-3}{k-(-2)}$

すなわち　　$-(k+2)=3(k+6)$

これを解いて　　$k=-5$

25　3 直線 $x-y=-1$，$3x+2y=12$，$kx-y=k-1$ が三角形を作らないような定数 k の値を求めよ。

解答　$k=-\dfrac{3}{2}$，1，2

解説

$x-y=-1$　…… ①，$3x+2y=12$　…… ②，$kx-y=k-1$　…… ③　とする。

[1]　3 直線が 1 点で交わる場合

2 直線 ①，② の交点の座標は　　$(2,\ 3)$

直線 ③ がこの点を通るから　　$2k-3=k-1$　　　よって　　$k=2$

[2]　少なくとも 2 直線が平行である場合

① と ② は平行でない。

① と ③ が平行のとき　　$1\cdot(-1)-(-1)\cdot k=0$ から

$-1+k=0$　　　よって　　$k=1$

② と ③ が平行のとき　　$3\cdot(-1)-2k=0$ から

$-3-2k=0$　　　よって　　$k=-\dfrac{3}{2}$

以上から，求める k の値は　　$k=-\dfrac{3}{2}$，1，2

26　次の 3 直線が三角形を作らないときの k の値のうち，最も小さい値を求めよ。

$$3x-2y=-4,\quad 2x+y=-5,\quad x+ky=k+2$$

解答　$k=-2$

解説

$3x-2y=-4$ …… ①，　$2x+y=-5$ …… ②，　$x+ky=k+2$ …… ③　とする。

3 直線が三角形を作らないのは，次の [1] か [2] の場合である。

[1]　3 直線が 1 点で交わる場合

①，② の交点の座標は　　$(-2,\ -1)$

直線 ③ がこの点を通るから　　$-2-k=k+2$　　　よって　　$k=-2$

[2]　少なくとも 2 直線が平行である場合

① と ② は平行でない。

① と ③ が平行のとき　　$3\cdot k-1\cdot(-2)=0$　　　よって　　$k=-\dfrac{2}{3}$

② と ③ が平行のとき　　$2\cdot k-1\cdot1=0$　　　よって　　$k=\dfrac{1}{2}$

以上から，k の最も小さい値は　　$k=-2$

27　(1)　点 $(2,\ 1)$ から直線 $kx+y+1=0$ に下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ であるとき，定数 k の値を求めよ。

(2)　2 直線 $5x+4y=20$，$5x+4y=60$ 間の距離を求めよ。

解答　(1)　$k=-4\pm\sqrt{15}$　　(2)　$\dfrac{40}{\sqrt{41}}$

解説

(1)　点 $(2,\ 1)$ と直線 $kx+y+1=0$ の距離が $\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{|k\cdot2+1+1|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\sqrt{3}\quad すなわち\quad 2|k+1|=\sqrt{3(k^2+1)}$$

両辺を 2 乗して　　$4(k+1)^2=3(k^2+1)$

整理すると　　$k^2+8k+1=0$

これを解いて　　$k=-4\pm\sqrt{15}$

(2)　2 直線 $5x+4y=20$，$5x+4y=60$ は平行である。

よって，求める距離は，直線 $5x+4y=20$ 上の点 $(4,\ 0)$ と直線 $5x+4y-60=0$ の距離と同じであるから

$$\frac{|5\cdot4+4\cdot0-60|}{\sqrt{5^2+4^2}}=\frac{40}{\sqrt{41}}$$

28　(1)　x 軸上の点 $(t,\ 0)$ $(t>0)$ から 2 つの直線 $3x-4y+10=0$，$12x+5y+5=0$ に下ろした垂線の長さが等しいとき，t の値を求めよ。

(2)　2 直線 $x-2y+3=0$，$x-2y-1=0$ 間の距離を求めよ。

解答　(1)　$t=5$　　(2)　$\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

解説

(1)　点 $(t,\ 0)$ から 2 直線 $3x-4y+10=0$，$12x+5y+5=0$ に下ろした垂線の長さを，それぞれ d_1，d_2 とすると，$t>0$ であるから

$$d_1=\frac{|3t-4\cdot0+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3t+10}{5},\quad d_2=\frac{|12t+5\cdot0+5|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{12t+5}{13}$$

$d_1=d_2$ とすると　　$\dfrac{3t+10}{5}=\dfrac{12t+5}{13}$

よって　　$13(3t+10)=5(12t+5)$　　　これを解いて　　$t=5$

(2)　2 直線 $x-2y+3=0$，$x-2y-1=0$ は平行である。

よって，直線 $x-2y+3=0$ 上の点 $(-3,\ 0)$ と直線 $x-2y-1=0$ の距離を求めて

$$\frac{|-3-2\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

29 次の3点が一直線上にあるとき，t の値を求めよ。

(1) $(-2,\ 6)$，$(0,\ 3)$，$(4,\ t)$　　(2) $(1,\ 4)$，$(-1,\ t)$，$(t,\ 2)$

解答　(1) $t=-3$　(2) $t=0,\ 5$

解説

(1) 2点 $(-2,\ 6)$，$(0,\ 3)$ を通る直線の方程式は　$y-6=\dfrac{3-6}{0-(-2)}\{x-(-2)\}$

すなわち　$3x+2y-6=0$

点 $(4,\ t)$ がこの直線上にあるから　$3\cdot 4+2\cdot t-6=0$

よって　$t=-3$

(2) 2点 $(1,\ 4)$，$(-1,\ t)$ を通る直線の方程式は　$y-4=\dfrac{t-4}{-1-1}(x-1)$

すなわち　$-2(y-4)=(t-4)(x-1)$

点 $(t,\ 2)$ がこの直線上にあるから　$-2(2-4)=(t-4)(t-1)$

よって　$t^2-5t=0$

これを解いて　$t=0,\ 5$

30 次の直線と，原点および点 $(1,\ 2)$ との距離を，それぞれ求めよ。

(1) $y=3x+1$　(2) $4x+3y=2$　(3) $y=4$　(4) $x=-1$

解答　原点，点 $(1,\ 2)$ の順に

(1) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　(2) $\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{8}{5}$　(3) 4，2　(4) 1，2

解説

(1) $y=3x+1$ から　$3x-y+1=0$

原点との距離は　$\dfrac{|1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

点 $(1,\ 2)$ との距離は　$\dfrac{|3\cdot 1-2+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

(2) $4x+3y=2$ から　$4x+3y-2=0$

原点との距離は　$\dfrac{|-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{25}}=\dfrac{2}{5}$

点 $(1,\ 2)$ との距離は　$\dfrac{|4\cdot 1+3\cdot 2-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{8}{5}$

(3) 原点との距離は　$|4-0|=4$

点 $(1,\ 2)$ との距離は　$|4-2|=2$

(4) 原点との距離は　$|-1-0|=1$

点 $(1,\ 2)$ との距離は　$|-1-1|=2$

31 3直線 $3x-2y+3=0$，$2x-4y+k=0$，$x-ky+5=0$ が1点で交わるように，定数 k の値を定めよ。

解答　$k=-2,\ \dfrac{14}{3}$

解説

$3x-2y+3=0$　……①

$2x-4y+k=0$　……②

$x-ky+5=0$　……③

とおく。

①×2−② から　$4x+6-k=0$　よって　$x=\dfrac{k-6}{4}$

①×2−②×3 から　$8y+6-3k=0$　よって　$y=\dfrac{3k-6}{8}$

ゆえに，2直線①，②の交点の座標は　$\left(\dfrac{k-6}{4},\ \dfrac{3k-6}{8}\right)$

3直線①，②，③が1点で交わるとき，直線③はこの点を通るから

$\dfrac{k-6}{4}-k\cdot\dfrac{3k-6}{8}+5=0$　整理すると　$3k^2-8k-28=0$

左辺を因数分解すると　$(k+2)(3k-14)=0$

これを解いて　$k=-2,\ \dfrac{14}{3}$

32 3直線 $x+3y=2$，$x+y=0$，$ax-2y=-4$ が三角形を作らないような定数 a の値を求めよ。

解答　$a=-\dfrac{2}{3},\ -2,\ 2$

解説

$x+3y=2$　……①

$x+y=0$　……②

$ax-2y=-4$　……③

とする。

2直線①，②は平行ではないから，3直線①，②，③が三角形を作らないとき，次の2つの場合がある。

[1] ③が①または②と平行になる。

③が①と平行になるとき　$1\cdot(-2)-3\cdot a=0$　ゆえに　$a=-\dfrac{2}{3}$

③が②と平行になるとき　$1\cdot(-2)-1\cdot a=0$　ゆえに　$a=-2$

[2] 3直線が1点で交わる。

①，②を連立して解くと　$x=-1,\ y=1$

よって，2直線①，②の交点の座標は　$(-1,\ 1)$

③が点 $(-1,\ 1)$ を通るとき　$a\cdot(-1)-2\cdot 1=-4$

よって　$a=2$

以上から，求める a の値は　$a=-\dfrac{2}{3},\ -2,\ 2$

別解　(上記[1]の解法)

3直線①，②，③の傾きは，それぞれ　$-\dfrac{1}{3},\ -1,\ \dfrac{a}{2}$

③が①と平行になるとき　$\dfrac{a}{2}=-\dfrac{1}{3}$　ゆえに　$a=-\dfrac{2}{3}$

③が②と平行になるとき　$\dfrac{a}{2}=-1$　ゆえに　$a=-2$

33 3点 A$(1,\ 2)$，B$(3,\ 1)$，C$(t,\ -1)$ が一直線上にあるとき，t の値を求めよ。

解答　$t=7$

解説

直線ABの方程式は

$y-2=\dfrac{1-2}{3-1}(x-1)$　すなわち　$x+2y-5=0$

点C$(t,\ -1)$ がこの直線上にあるから

$t+2\cdot(-1)-5=0$　よって　$t=7$

34 2直線 $3x-(a-3)y-6=0$，$(a+1)x+y-1=0$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値をそれぞれ求めよ。

(1) 平行である。　(2) 垂直である。

解答　(1) $a=0,\ 2$　(2) $a=-3$

解説

(1) 2直線が平行であるための必要十分条件は　$3\cdot 1-\{-(a-3)\}(a+1)=0$

すなわち　$a^2-2a=0$

ゆえに　$a(a-2)=0$　よって　$a=0,\ 2$

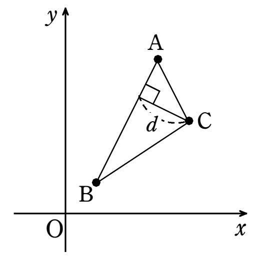
(2) 2直線が垂直であるための必要十分条件は　$3(a+1)+\{-(a-3)\}\cdot 1=0$

すなわち　$2a+6=0$　よって　$a=-3$

35 3点 A$(3,\ 5)$，B$(1,\ 1)$，C$(4,\ 3)$ を頂点とする△ABCの面積 S を求めよ。

解答　4

解説



直線ABの方程式は　$y-5=\dfrac{1-5}{1-3}(x-3)$

すなわち　$2x-y-1=0$

点Cと直線ABの距離を d とすると

$$d=\frac{|2\cdot 4+(-1)\cdot 3-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\dfrac{4}{\sqrt{5}}=4$