直線の方程式クイズ

1．次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(2,\ 3)$ を通り，傾きが 2

(2)　点 $(-1,\ -3)$ を通り，傾きが $-\dfrac{2}{3}$

(3)　点 $(2,\ -4)$ を通り，x 軸に垂直

解答　(1)　$y=2x-1$　($2x-y-1=0$ でもよい)

(2)　$y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{11}{3}$　($2x+3y+11=0$ でもよい)

(3)　$x=2$　($x-2=0$ でもよい)

解説

(1)　$y-3=2(x-2)$ から　　$y=2x-1$　($2x-y-1=0$ でもよい)

(2)　$y-(-3)=-\dfrac{2}{3}\{x-(-1)\}$ から　　$y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{11}{3}$　($2x+3y+11=0$ でもよい)

(3)　$x=2$

2．次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　A $(3,\ 5)$，B $(5,\ 1)$　　(2)　A $(-2,\ 1)$，B $(3,\ 6)$

(3)　A $(2,\ -1)$，B $(-3,\ -1)$　　(4)　A $(-3,\ 3)$，B $(-3,\ 1)$

解答　(1)　$y=-2x+11$　($2x+y-11=0$ でもよい)

(2)　$y=x+3$　($x-y+3=0$ でもよい)

(3)　$y=-1$　($y+1=0$ でもよい)

(4)　$x=-3$　($x+3=0$ でもよい)

解説

(1)　$y-5=\dfrac{1-5}{5-3}(x-3)$ から　　$y=-2x+11$

(2)　$y-1=\dfrac{6-1}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$ から　　$y=x+3$

(3)　$y=-1$

(4)　$x=-3$

3．点 $(1,\ 4)$ を通り，直線 $2x+3y+5=0$ に平行な直線 ℓ，垂直な直線 ℓ' の方程式を，それぞれ求めよ。

解答　$\ell : 2x+3y-14=0$，$\ell' : 3x-2y+5=0$

解説

直線 $2x+3y+5=0$ の傾きは $-\dfrac{2}{3}$ である。

よって，直線 ℓ の方程式は

$$y-4=-\frac{2}{3}(x-1)\quad すなわち\quad 2x+3y-14=0$$

直線 ℓ' の傾きを m とすると，$-\dfrac{2}{3}m=-1$ から　$m=\dfrac{3}{2}$

よって，直線 ℓ' の方程式は

$$y-4=\frac{3}{2}(x-1)\quad すなわち\quad 3x-2y+5=0$$

4．点 $(3,\ -2)$ を通り，直線 $3x-4y+1=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式を，それぞれ求めよ。

解答　平行な直線の方程式は　$3x-4y-17=0$，
垂直な直線の方程式は　$4x+3y-6=0$

解説

$3x-4y+1=0$ …… ①　とする。

直線 ① の傾きは $\dfrac{3}{4}$ である。

よって，点 $(3,\ -2)$ を通り，直線 ① に平行な直線の方程式は

$$y+2=\frac{3}{4}(x-3)\quad すなわち\quad 3x-4y-17=0$$

直線 ① に垂直な直線の傾きを m とすると，$\dfrac{3}{4}m=-1$ から　$m=-\dfrac{4}{3}$

よって，点 $(3,\ -2)$ を通り，直線 ① に垂直な直線の方程式は

$$y+2=-\frac{4}{3}(x-3)\quad すなわち\quad 4x+3y-6=0$$

別解　点 $(3,\ -2)$ を通り，直線 $3x-4y+1=0$ に平行な直線の方程式は
$3(x-3)-4(y+2)=0$　すなわち　$3x-4y-17=0$
点 $(3,\ -2)$ を通り，直線 $3x-4y+1=0$ に垂直な直線の方程式は
$-4(x-3)-3(y+2)=0$　すなわち　$4x+3y-6=0$

5．2 直線 $2x+y-1=0$，$x+4y+3=0$ の交点と点 $(-2,\ -2)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$-x+3y+4=0$　($x-3y-4=0$ でもよい)

解説

k を定数として　$k(2x+y-1)+(x+4y+3)=0$　…… ①

とすると，① は 2 直線の交点を通る直線を表す。

この直線が点 $(-2,\ -2)$ を通るとすると，① に $x=-2$，$y=-2$ を代入して

$-7k-7=0$　　ゆえに　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　　$-x+3y+4=0$　($x-3y-4=0$ でもよい)

6．2 直線 $x+2y-3=0$，$4x-3y+10=0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1)　直線 $3x-2y=0$ に平行である。　　(2)　直線 $3x-2y=0$ に垂直である。

解答　(1)　$3x-2y+7=0$　　(2)　$2x+3y-4=0$

解説

2 直線 $x+2y-3=0$，$4x-3y+10=0$ の交点の座標は　$(-1,\ 2)$

また，直線 $3x-2y=0$ の傾きは $\dfrac{3}{2}$ である。

(1)　直線 $3x-2y=0$ に平行な直線の傾きは $\dfrac{3}{2}$ であるから

$$y-2=\frac{3}{2}(x+1)\qquad すなわち\qquad 3x-2y+7=0$$

(2)　直線 $3x-2y=0$ に垂直な直線の傾きは $-\dfrac{2}{3}$ であるから

$$y-2=-\frac{2}{3}(x+1)\qquad すなわち\qquad 2x+3y-4=0$$

別解　2 直線 $x+2y-3=0$，$4x-3y+10=0$ の交点の座標は　$(-1,\ 2)$

(1)　点 $(-1,\ 2)$ を通り，直線 $3x-2y=0$ に平行な直線の方程式は
$3\{x-(-1)\}-2(y-2)=0$
よって　$3x-2y+7=0$

(2)　点 $(-1,\ 2)$ を通り，直線 $3x-2y=0$ に垂直な直線の方程式は
$-2\{x-(-1)\}-3(y-2)=0$
よって　$-2x-3y+4=0$　すなわち　$2x+3y-4=0$

7．次の直線の方程式を求めよ。[各 5 点]

(1)　傾きが 3 で，x 切片が -2　　(2)　傾きが -2 で，点 $(1,\ -5)$ を通る

(3)　点 $(3,\ 4)$ を通り，x 軸に垂直

解答　(1)　$y-0=3\{x-(-2)\}$ から　　$y=3x+6$　($3x-y+6=0$ でもよい)

(2)　$y-(-5)=-2(x-1)$ から　　$y=-2x-3$　($2x+y+3=0$ でもよい)

(3)　$x=3$　($x-3=0$ でもよい)

解説

(1)　$y-0=3\{x-(-2)\}$ から　　$y=3x+6$

(2)　$y-(-5)=-2(x-1)$ から　　$y=-2x-3$

(3)　$x=3$

8．次の直線の方程式を求めよ。[各 5 点]

(1)　2 点 $(3,\ 1)$，$(5,\ -3)$ を通る　　(2)　2 点 $(-8,\ -2)$，$(1,\ 1)$ を通る

(3)　2 点 $(3,\ 0)$，$(0,\ -2)$ を通る　　(4)　2 点 $(-1,\ 3)$，$(-1,\ 1)$ を通る

解答　(1)　$y-1=\dfrac{-3-1}{5-3}(x-3)$ から　　$y=-2x+7$　($2x+y-7=0$ でもよい)

(2)　$y-(-2)=\dfrac{1-(-2)}{1-(-8)}\{x-(-8)\}$ から　$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$　($x-3y+2=0$ でもよい)

(3)　$\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1$　($2x-3y-6=0$ でもよい)

(4)　$x=-1$　($x+1=0$ でもよい)

解説

(1)　$y-1=\dfrac{-3-1}{5-3}(x-3)$ から　　$y=-2x+7$

(2)　$y-(-2)=\dfrac{1-(-2)}{1-(-8)}\{x-(-8)\}$ から　　$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

(3)　$\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1$

(4)　$x=-1$

9．点 $(5,\ 4)$ を通り，直線 $2x-3y+1=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式を求めよ。[16 点]

解答　直線 $2x-3y+1=0$ の傾きは $\dfrac{2}{3}$ であるから，

平行な直線の方程式は，$y-4=\dfrac{2}{3}(x-5)$ より　　$2x-3y+2=0$

垂直な直線の方程式は，$y-4=-\dfrac{3}{2}(x-5)$ より　　$3x+2y-23=0$

解説

直線 $2x-3y+1=0$ の傾きは $\dfrac{2}{3}$ であるから，

平行な直線の方程式は，$y-4=\dfrac{2}{3}(x-5)$ より　　$2x-3y+2=0$

垂直な直線の方程式は，$y-4=-\dfrac{3}{2}(x-5)$ より　　$3x+2y-23=0$

10．2 直線 $x+y+2=0$ と $3x+2y-4=0$ の交点を通り，直線 $x-3y-1=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。[15 点]

解答　$\begin{cases} x+y+2=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases}$ を解くと　　$x=8$，$y=-10$

よって，交点は　$(8,\ -10)$

また，直線 $x-3y-1=0$ の傾きは $\dfrac{1}{3}$ であるから，求める方程式は

$$y-(-10)=-3(x-8)$$

よって　$y=-3x+14$　（$3x+y-14=0$ でもよい）

解説

$\begin{cases} x+y+2=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases}$ を解くと　$x=8$, $y=-10$

よって，交点は　$(8,\ -10)$

また，直線 $x-3y-1=0$ の傾きは $\frac{1}{3}$ であるから，求める方程式は

$$y-(-10)=-3(x-8)$$

よって　$y=-3x+14$

11. (1) 次の直線の方程式を求めよ。

(ア) 点 $(-1,\ 3)$ を通り，傾きが -2　(イ) 点 $(-3,\ 5)$ を通り，x 軸に垂直

(ウ) 点 $(4,\ -6)$ を通り，x 軸に平行

(2) 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(ア) $(1,\ -2)$, $(-3,\ 4)$　(イ) $(3,\ 0)$, $(0,\ -4)$

(ウ) $(4,\ 1)$, $(4,\ 5)$　(エ) $(-2,\ 5)$, $(3,\ 5)$

解答 (1) (ア) $y=-2x+1$ （$2x+y-1=0$ でもよい）

(イ) $x=-3$ （$x+3=0$ でもよい）

(ウ) $y=-6$ （$y+6=0$ でもよい）

(2) (ア) $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ （$3x+2y+1=0$ でもよい）

(イ) $4x-3y=12$ （$4x-3y-12=0$ でもよい）

(ウ) $x=4$ （$x-4=0$ でもよい）

(エ) $y=5$ （$y-5=0$ でもよい）

解説

(1) (ア) $y-3=-2\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=-2x+1$

(イ) 通る点の x 座標が -3 であるから　$x=-3$

(ウ) 通る点の y 座標が -6 であるから　$y=-6$

(2) (ア) $y-(-2)=\frac{4-(-2)}{-3-1}(x-1)$　すなわち　$y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

(イ) x 切片 3，y 切片 -4 であるから　$\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$　すなわち　$4x-3y=12$

(ウ) 2 点の x 座標がともに 4 であるから　$x=4$

(エ) 2 点の y 座標がともに 5 であるから　$y=5$

12. 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(1,\ -2)$ を通り，傾きが 3　(2) 2 点 $(-1,\ 3)$, $(5,\ -1)$ を通る

(3) 2 点 $(-3,\ 5)$, $(-3,\ 1)$ を通る　(4) 2 点 $(2,\ 4)$, $(-6,\ 4)$ を通る

(5) 点 $(5,\ 6)$ を通り y 軸に平行　(6) 2 点 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 4)$ を通る

解答 (1) $y=3x-5$ （$3x-y-5=0$ でもよい）

(2) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ （$2x+3y-7=0$ でもよい）

(3) $x=-3$ （$x+3=0$ でもよい）

(4) $y=4$ （$y-4=0$ でもよい）

(5) $x=5$ （$x-5=0$ でもよい）

(6) $2x-y=-4$ （$2x-y+4=0$ でもよい）

解説

(1) $y-(-2)=3(x-1)$　よって　$y=3x-5$

(2) $y-3=\frac{-1-3}{5-(-1)}\{x-(-1)\}$　よって　$y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$

(3) x 座標がともに -3 であるから　$x=-3$

(4) y 座標がともに 4 であるから　$y=4$

(5) y 軸に平行な直線は，x 軸に垂直である。

通る点の x 座標が 5 であるから　$x=5$

(6) x 切片 -2，y 切片 4 であるから

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1 \quad すなわち \quad 2x-y=-4$$

13. 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(6,\ -4)$ を通り，直線 $3x+y-7=0$ に平行な直線

(2) 点 $(-1,\ 3)$ を通り，直線 $x-5y+2=0$ に垂直な直線

解答 (1) $3x+y-14=0$　(2) $5x+y+2=0$

解説

(1) 直線 $3x+y-7=0$ の傾きは -3 である。

よって，求める直線の方程式は

$y-(-4)=-3(x-6)$　すなわち　$3x+y-14=0$

(2) 直線 $x-5y+2=0$ の傾きは $\frac{1}{5}$ である。

よって，求める直線の傾きを m とすると　$m\cdot\frac{1}{5}=-1$　ゆえに　$m=-5$

よって，求める直線の方程式は

$y-3=-5\{x-(-1)\}$　すなわち　$5x+y+2=0$

14. (1) 点 $(1,\ 2)$ を通り，直線 $2x-3y-4=0$ に平行な直線と垂直な直線を求めよ。

(2) 2 点 A$(1,\ 6)$, B$(3,\ 1)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

解答 (1) 平行な直線 $2x-3y+4=0$，垂直な直線 $3x+2y-7=0$

(2) $4x-10y+27=0$

解説

(1) 直線 $2x-3y-4=0$ の傾きは $\frac{2}{3}$ である。

求める平行な直線の方程式は

$y-2=\frac{2}{3}(x-1)$　すなわち　$2x-3y+4=0$

垂直な直線の傾きを m とすると

$m\cdot\frac{2}{3}=-1$　ゆえに　$m=-\frac{3}{2}$

求める垂直な直線の方程式は

$y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$　すなわち　$3x+2y-7=0$

別解 平行な直線の方程式は

$2(x-1)-3(y-2)=0$　すなわち　$2x-3y+4=0$

垂直な直線の方程式は

$-3(x-1)-2(y-2)=0$　すなわち　$3x+2y-7=0$

(2) 線分 AB の中点の座標は　$\left(2,\ \frac{7}{2}\right)$

垂直二等分線は，この点を通り，直線 AB に垂直であるから

$y-\frac{7}{2}=\frac{2}{5}(x-2)$　すなわち　$4x-10y+27=0$

参考 垂直二等分線上の点 P$(x,\ y)$ は A，B から等距離にあるから，$AP^2=BP^2$ を満たす。

よって　$(x-1)^2+(y-6)^2=(x-3)^2+(y-1)^2$

整理すると　$4x-10y+27=0$

15. 2 直線　$2x-y+1=0$ ……①，$x+y-4=0$ ……②

の交点 A と点 B$(-2,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解答 $2x-3y+7=0$

解説

2 直線①，②は傾きが異なるから 1 点で交わり，k を定数として，次の方程式を考える。

$$k(2x-y+1)+x+y-4=0 \quad ……③$$

③は①，②の交点を通る直線を表す。

③が点 B$(-2,\ 1)$ を通るとき，$x=-2$, $y=1$ を③に代入して

$-4k-5=0$　よって　$k=-\frac{5}{4}$

これを③に代入して　$-\frac{5}{4}(2x-y+1)+x+y-4=0$

整理すると　$2x-3y+7=0$

16. 2 直線 $2x-y-1=0$, $x+5y-17=0$ の交点を通り，直線 $4x+3y-6=0$ に平行な直線と垂直な直線の方程式を求めよ。

解答 平行な直線 $4x+3y-17=0$，垂直な直線 $3x-4y+6=0$

解説

$2x-y-1=0$ ……①，$x+5y-17=0$ ……②　とする。

2 直線①，②は傾きが異なるから 1 点で交わり，k を定数とした方程式

$$k(2x-y-1)+(x+5y-17)=0$$

すなわち　$(2k+1)x+(-k+5)y-k-17=0$ ……③

は①，②の交点を通る直線を表す。

直線③が直線 $4x+3y-6=0$ に平行になるとき　$(2k+1)\cdot3-4(-k+5)=0$

よって　$10k-17=0$　ゆえに　$k=\frac{17}{10}$

これを③に代入して整理すると　$4x+3y-17=0$

直線③が直線 $4x+3y-6=0$ に垂直になるとき　$(2k+1)\cdot4+(-k+5)\cdot3=0$

よって　$5k+19=0$　ゆえに　$k=-\frac{19}{5}$

これを③に代入して整理すると　$3x-4y+6=0$

別解 2 直線①，②の交点の座標は　$(2,\ 3)$

点 $(2,\ 3)$ を通り，直線 $4x+3y-6=0$ に

平行な直線の方程式は　$4(x-2)+3(y-3)=0$　すなわち　$4x+3y-17=0$

垂直な直線の方程式は　$3(x-2)-4(y-3)=0$　すなわち　$3x-4y+6=0$

17. 直線 $x+2y-3=0$ を ℓ とする。次のものを求めよ。

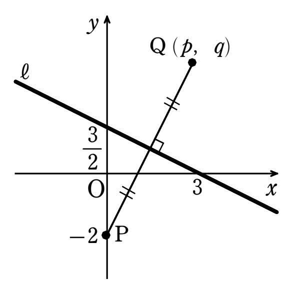
(1) 直線 ℓ に関して，点 P$(0,\ -2)$ と対称な点 Q の座標

(2) 直線 ℓ に関して，直線 $m:3x-y-2=0$ と対称な直線 n の方程式

解答 (1) Q$\left(\frac{14}{5},\ \frac{18}{5}\right)$　(2) $13x-9y-4=0$

解説

(1) Q の座標を $(p,\ q)$ とする。また，$p\neq0$ である。



直線 PQ は ℓ に垂直であるから

$$\frac{q+2}{p}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

ゆえに　$2p-q-2=0$ ……①

線分 PQ の中点 $\left(\frac{p}{2},\ \frac{q-2}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にある

から　$\frac{p}{2}+2\cdot\frac{q-2}{2}-3=0$

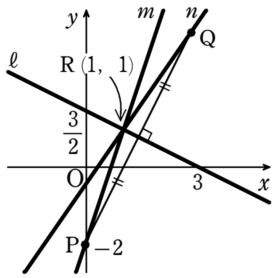
ゆえに　$p+2q-10=0$ ……②

①，②を連立して解くと　$p=\frac{14}{5}$, $q=\frac{18}{5}$　すなわち　Q$\left(\frac{14}{5},\ \frac{18}{5}\right)$

(2) ℓ，m の方程式を連立して解くと　$x=1$，$y=1$

ゆえに，2 直線 ℓ，m の交点 R の座標は　$(1,\ 1)$

また，点 P の座標を直線 m の方程式の左辺に代入すると，$3\cdot 0-(-2)-2=0$ となるから，点 P は直線 m 上にある。



よって，直線 n は 2 点 Q，R を通るから，その方程式は　$\left(\frac{18}{5}-1\right)(x-1)-\left(\frac{14}{5}-1\right)(y-1)=0$

整理して　$13x-9y-4=0$

18. (1)　直線 $y=2x+3$ に関して，点 P$(3,\ 4)$ と対称な点の座標を求めよ。

(2)　直線 $y=2x+3$ に関して，直線 $3x-2y-1=0$ と対称な直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$(-1,\ 6)$　　(2)　$17x-6y+53=0$

解説

(1)　直線 $y=2x+3$ を ℓ とし，直線 ℓ に関して点 P$(3,\ 4)$ と対称な点を Q$(p,\ q)$ とすると，$p\neq 3$ である。

直線 PQ は ℓ に垂直であるから　$\frac{q-4}{p-3}\cdot 2=-1$

ゆえに　$p+2q=11$　…… ①

線分 PQ の中点 $\left(\frac{3+p}{2},\ \frac{4+q}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから　$\frac{4+q}{2}=2\cdot\frac{3+p}{2}+3$

ゆえに　$2p-q=-8$　…… ②

①，② を解いて　$p=-1$，$q=6$

したがって，求める点の座標は　$(-1,\ 6)$

(2)　2 直線の交点の座標を求めると　$(-7,\ -11)$

点 $(3,\ 4)$ は直線 $3x-2y-1=0$ 上にあるから，求める直線は，(1) より 2 点 $(-7,\ -11)$，$(-1,\ 6)$ を通る。

よって，その方程式は　$\{6-(-11)\}\{x-(-7)\}-\{-1-(-7)\}\{y-(-11)\}=0$

すなわち　$17x-6y+53=0$

19. 次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(-2,\ 3)$ を通り，傾きが 2　　(2)　点 $(5,\ -4)$ を通り，傾きが $-\frac{3}{4}$

(3)　点 $(3,\ 6)$ を通り，x 軸に垂直　　(4)　点 $(3,\ -2)$ を通り，x 軸に平行

解答　(1)　$y=2x+7$　（$2x-y+7=0$ でもよい）

(2)　$y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$　（$3x+4y+1=0$ でもよい）

(3)　$x=3$　（$x-3=0$ でもよい）

(4)　$y=-2$　（$y+2=0$ でもよい）

解説

(1)　$y-3=2\{x-(-2)\}$　すなわち　$y=2x+7$

(2)　$y-(-4)=-\frac{3}{4}(x-5)$　すなわち　$y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

(3)　$x=3$

(4)　$y=-2$

20. 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(-4,\ 3)$，B$(6,\ -3)$　　(2)　A$(3,\ -4)$，B$(-1,\ 0)$

(3)　A$(-2,\ 4)$，B$(-2,\ -1)$　　(4)　A$(2,\ 5)$，B$(-3,\ 5)$

(5)　A$(-3,\ 0)$，B$(0,\ 5)$

解答　(1)　$y=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}$　（$3x+5y-3=0$ でもよい）

(2)　$y=-x-1$　（$x+y+1=0$ でもよい）

(3)　$x=-2$　（$x+2=0$ でもよい）

(4)　$y=5$　（$y-5=0$ でもよい）

(5)　$-\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$　（$5x-3y+15=0$ でもよい）

解説

(1)　$y-3=\frac{-3-3}{6-(-4)}\{x-(-4)\}$　すなわち　$y=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}$

(2)　$y-(-4)=\frac{0-(-4)}{-1-3}(x-3)$　すなわち　$y=-x-1$

(3)　2 点の x 座標がともに -2 であるから，求める直線の方程式は　$x=-2$

(4)　2 点の y 座標がともに 5 であるから，求める直線の方程式は　$y=5$

(5)　$\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$　すなわち　$-\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$

21. 次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(6,\ 4)$ を通り，次の直線に平行な直線，垂直な直線

（ア）　$y=3x+2$　　（イ）　$y=-1$　　（ウ）　$x=2$

(2)　点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $3x-5y-12=0$ に平行な直線，垂直な直線

解答　平行な直線，垂直な直線の順に

(1)　（ア）　$y=3x-14$　（$3x-y-14=0$ でもよい），

$y=-\frac{1}{3}x+6$　（$x+3y-18=0$ でもよい）

（イ）　$y=4$，　（$y-4=0$ でもよい）

$x=6$　（$x-6=0$ でもよい）

（ウ）　$x=6$　（$x-6=0$ でもよい），

$y=4$　（$y-4=0$ でもよい）

(2)　$3x-5y+21=0$，$5x+3y+1=0$

解説

(1)　（ア）　直線 $y=3x+2$ の傾きは　3

[1]　平行な直線の方程式は

$y-4=3(x-6)$　すなわち　$y=3x-14$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$3m=-1$　　よって　$m=-\frac{1}{3}$

ゆえに，求める垂直な直線の方程式は

$y-4=-\frac{1}{3}(x-6)$　すなわち　$y=-\frac{1}{3}x+6$

（イ）　平行な直線の方程式は　$y=4$

垂直な直線の方程式は　$x=6$

（ウ）　平行な直線の方程式は　$x=6$

垂直な直線の方程式は　$y=4$

(2)　直線 $3x-5y-12=0$ の傾きは　$\frac{3}{5}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-3=\frac{3}{5}(x+2)$　すなわち　$3x-5y+21=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$\frac{3}{5}m=-1$　　よって　$m=-\frac{5}{3}$

ゆえに，求める垂直な直線の方程式は

$y-3=-\frac{5}{3}(x+2)$　すなわち　$5x+3y+1=0$

別解　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線，垂直な直線が

平行　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

垂直　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

と表されることを利用する。

(2)　[1]　平行な直線の方程式は

$3(x+2)-5(y-3)=0$　すなわち　$3x-5y+21=0$

[2]　垂直な直線の方程式は

$-5(x+2)-3(y-3)=0$　すなわち　$5x+3y+1=0$

22. 2 直線 $8x+7y-19=0$，$3x-5y+6=0$ の交点と点 $(-4,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$4x-27y+43=0$

解説

k を定数として，方程式

$k(8x+7y-19)+(3x-5y+6)=0$　…… ①

を考えると，① は 2 直線 $8x+7y-19=0$，$3x-5y+6=0$ の交点を通る直線を表す。

直線 ① が点 $(-4,\ 1)$ を通るとき　$k\{8\cdot(-4)+7\cdot 1-19\}+3\cdot(-4)-5\cdot 1+6=0$

よって　$k=-\frac{1}{4}$

この k の値を ① に代入して整理すると　$4x-27y+43=0$

23. 2 点 A$(-1,\ 4)$，B$(3,\ 2)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x+1$　（$2x-y+1=0$ でもよい）

解説

直線 AB の傾きは　$\frac{2-4}{3-(-1)}=-\frac{1}{2}$

線分 AB の中点の座標は　$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$　すなわち　$(1,\ 3)$

よって，求める垂直二等分線は，点 $(1,\ 3)$ を通り，傾きが 2 の直線である。

ゆえに　$y-3=2(x-1)$　すなわち　$y=2x+1$

24. 2 直線 $x-y+1=0$，$3x+2y-12=0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1)　直線 $5x-6y-8=0$ に平行である。　　(2)　直線 $5x-6y-8=0$ に垂直である。

解答　(1)　$5x-6y+8=0$　　(2)　$6x+5y-27=0$

解説

k を定数として，方程式

$k(x-y+1)+(3x+2y-12)=0$　…… ①

を考えると，① は 2 直線 $x-y+1=0$，$3x+2y-12=0$ の交点を通る直線を表す。

① を変形すると　$(k+3)x+(-k+2)y+k-12=0$　…… ②

(1)　直線 $5x-6y-8=0$ と平行であるとき　$(k+3)\cdot(-6)-(-k+2)\cdot 5=0$

よって　$k=-28$

この k の値を ② に代入して整理すると　$5x-6y+8=0$

(2)　直線 $5x-6y-8=0$ に垂直であるとき　$(k+3)\cdot 5+(-k+2)\cdot(-6)=0$

よって　$k=-\frac{3}{11}$

この k の値を ② に代入して整理すると　$6x+5y-27=0$

別解　連立方程式 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 3x+2y-12=0 \end{cases}$ を解くと　　$x=2,\ y=3$

よって，2 直線の交点の座標は　　$(2,\ 3)$

(1)　点 $(2,\ 3)$ を通り，直線 $5x-6y-8=0$ に平行な直線の方程式は

$$5(x-2)-6(y-3)=0 \qquad \text{すなわち} \qquad 5x-6y+8=0$$

(2)　点 $(2,\ 3)$ を通り，直線 $5x-6y-8=0$ に垂直な直線の方程式は

$$-6(x-2)-5(y-3)=0 \qquad \text{すなわち} \qquad 6x+5y-27=0$$

25. 直線 $y=2x$ を ℓ とするとき，次のものを求めよ。

(1)　ℓ に関して，点 A $(5,\ 0)$ と対称な点 B の座標

(2)　ℓ に関して，直線 $3x+y=15$ と対称な直線の方程式

解答　(1)　$(-3,\ 4)$　　(2)　$x-3y+15=0$

解説

(1)　点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。

直線 ℓ の傾きは 2 であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから　　$2\cdot\dfrac{q}{p-5}=-1$

ゆえに　　$p+2q=5$　……①

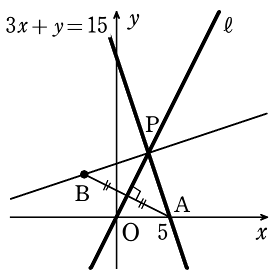
また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+5}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから　　$\dfrac{q}{2}=2\cdot\dfrac{p+5}{2}$

ゆえに　　$2p-q=-10$　……②

方程式 ①，② を連立して解くと　　$p=-3,\ q=4$

したがって，点 B の座標は　　$(-3,\ 4)$

(2)　点 A は直線 $3x+y=15$ 上にある。



$y=2x,\ 3x+y=15$ を連立して解くと

$x=3,\ y=6$

よって，2 直線 ℓ，$3x+y=15$ の交点 P の座標は

$(3,\ 6)$

求める直線は，2 点 P，B を通るから，その方程式は　　$y-6=\dfrac{4-6}{-3-3}(x-3)$

すなわち　　$x-3y+15=0$