2次関数の最大･最小クイズ（数字）

$\boxed{1}$ 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$$y=-x^2-4x-1$$

解答　$x=-2$ で最大値 3，最小値はない

解説

この関数の式を変形すると

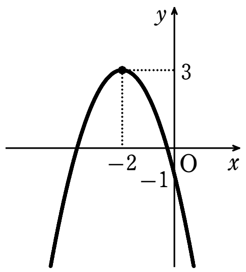
$$y=-(x+2)^2+3$$

よって，この関数は

$x=-2$ で最大値 3

をとる。

また，最小値はない。



$\boxed{2}$ 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2+4x+2$　　(2)　$y=-x^2+6x-4$

(3)　$y=2x^2+4x+3$　　(4)　$y=-2x^2-6x$

解答　(1)　$x=-2$ で最小値 -2，最大値はない

(2)　$x=3$ で最大値 5，最小値はない

(3)　$x=-1$ で最小値 1，最大値はない

(4)　$x=-\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{9}{2}$，最小値はない

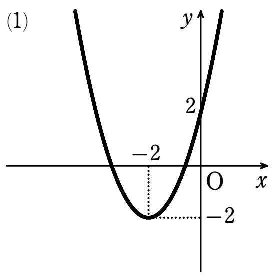
解説

(1)　この関数の式を変形すると

$$y=(x+2)^2-2$$

よって，この関数は $x=-2$ で最小値 -2 をとる。

また，最大値はない。

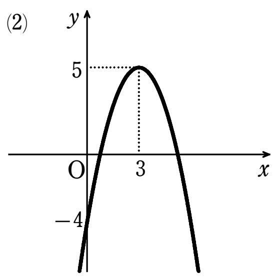


(2)　この関数の式を変形すると

$$y=-(x-3)^2+5$$

よって，この関数は $x=3$ で最大値 5 をとる。

また，最小値はない。

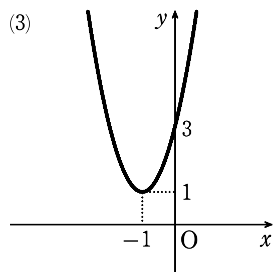


(3)　この関数の式を変形すると

$$y=2(x+1)^2+1$$

よって，この関数は $x=-1$ で最小値 1 をとる。

また，最大値はない。

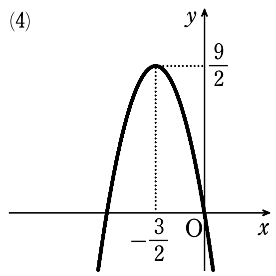


(4)　この関数の式を変形すると

$$y=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

よって，この関数は $x=-\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{9}{2}$ をとる。

また，最小値はない。



$\boxed{3}$ 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=x^2-2x+2\quad(0\leqq x\leqq 3)$$

解答　$x=3$ で最大値 5，$x=1$ で最小値 1

解説

この関数の式は

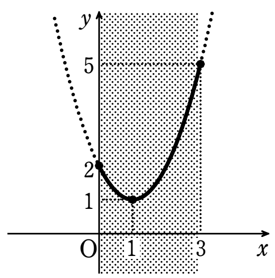
$y=(x-1)^2+1\quad(0\leqq x\leqq 3)$

と変形され，そのグラフは右の図の実線部分である。

よって，この関数は

$x=3$ で最大値 5 をとり，

$x=1$ で最小値 1 をとる。



$\boxed{4}$ 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=-x^2+1\quad(1\leqq x\leqq 3)$　　(2)　$y=2x^2-4x+1\quad(-1\leqq x\leqq 2)$

解答　(1)　$x=1$ で最大値 0，$x=3$ で最小値 -8

(2)　$x=-1$ で最大値 7，$x=1$ で最小値 -1

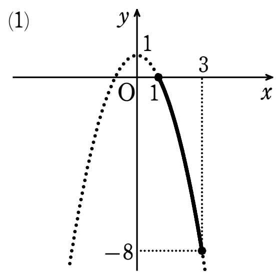
解説

(1)　関数 $y=-x^2+1\ (1\leqq x\leqq 3)$ のグラフは右の図の実線部分である。

よって，この関数は

$x=1$ で最大値 0 をとり，

$x=3$ で最小値 -8 をとる。



(2)　この関数の式は

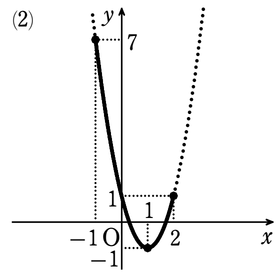
$$y=2(x-1)^2-1\ (-1\leqq x\leqq 2)$$

と変形され，そのグラフは右の図の実線部分である。

よって，この関数は

$x=-1$ で最大値 7 をとり，

$x=1$ で最小値 -1 をとる。



$\boxed{5}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$$y=-x^2+4x+3\quad(1<x<5)$$

解答　$x=2$ で最大値 7，最小値はない

解説

この関数の式は

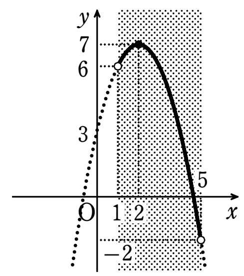
$y=-(x-2)^2+7\quad(1<x<5)$

と変形され，そのグラフは右の図の実線部分である。

よって，この関数は

$x=2$ で最大値 7 をとる。

また，最小値はない。



$\boxed{6}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2+2x\quad(-2<x<1)$　　(2)　$y=-2x^2+3x+1\quad(0<x\leqq 2)$

解答　(1)　$x=-1$ で最小値 -1，最大値はない

(2)　$x=\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{17}{8}$，$x=2$ で最小値 -1

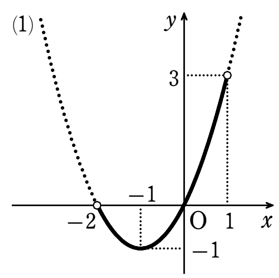
解説

(1)　この関数の式は

$$y=(x+1)^2-1\ (-2<x<1)$$

と変形され，そのグラフは右の図の実線部分である。

よって，この関数は $x=-1$ で最小値 -1 をとる。また，最大値はない。



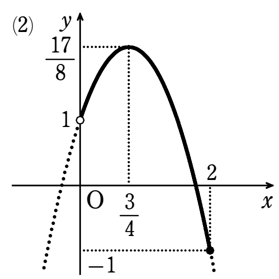
(2)　この関数の式は

$$y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}\ (0<x\leqq 2)$$

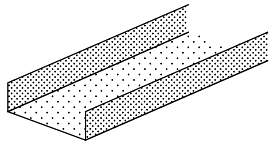
と変形され，そのグラフは右の図の実線部分である。よって，この関数は

$x=\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{17}{8}$，$x=2$ で最小値 -1

をとる。

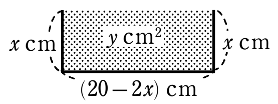


7 幅 20 cm の金属板を，右の図のように，両端から等しい長さだけ直角に折り曲げて，断面が長方形状の水路を作る。
このとき，断面積が最大になるようにするためには，端から何 cm のところで折り曲げればよいか。また，その断面積の最大値を求めよ。

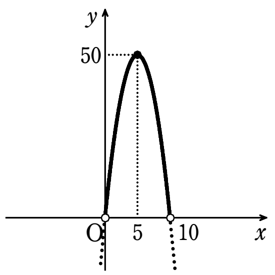


解答　端から 5 cm のところで折り曲げればよい，50 cm^2

解説



折り曲げる部分の長さを x cm，
断面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とする。
底の幅は $(20-2x)$ cm で，
$$x>0,\ 20-2x>0$$
であるから
$$0<x<10 \quad \cdots\cdots ①$$
また，y は
$$y=x(20-2x)$$
$$=-2x^2+20x$$
$$=-2(x-5)^2+50$$



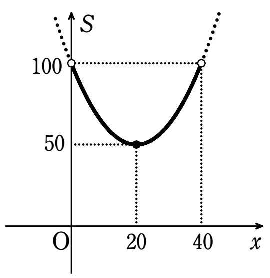
よって，① の範囲の x について，
y は，$x=5$ で最大値 50 をとる。
ゆえに，端から 5 cm のところで折り曲げればよい。
また，断面積の最大値は 50 cm^2 である。

8 長さ 40 cm の針金を 2 つに切り，2 本の針金をそれぞれ折り曲げて，正方形を 2 つ作る。それらの正方形の面積の和を最小にするには，針金をどのように切ればよいか。また，その面積の和の最小値を求めよ。

解答　半分に切ればよい，50 cm^2

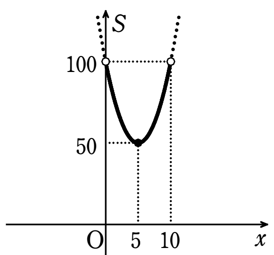
解説

一方の針金の長さを x cm とすると，他方の針金の長さは $(40-x)$ cm となる。
ここで，$x>0$ かつ $40-x>0$ より　　$0<x<40$　$\cdots\cdots$ ①
正方形の面積の和を S とすると，正方形の 1 辺の長さがそれぞれ $\dfrac{x}{4}$，$\dfrac{40-x}{4}$ であるから
$$S=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{40-x}{4}\right)^2$$
$$=\frac{1}{8}(x-20)^2+50$$



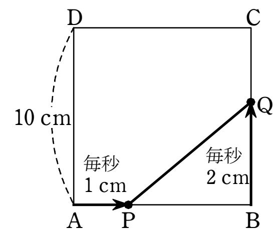
よって，① の範囲の x について，S は $x=20$ で最小値 50 をとる。
このとき，他方の針金の長さも 20 cm になる。
したがって，針金を半分に切ればよい。
また，面積の和の最小値は 50 cm^2 である。

別解　2 つの正方形の 1 辺の長さを，それぞれ x cm，y cm とし，2 つの面積の和を S とすると
$$S=x^2+y^2 \ \cdots\cdots ①,\quad 4x+4y=40 \ \cdots\cdots ②$$
② より　　$y=10-x$
① に代入して
$$S=x^2+(10-x)^2$$
$$=2(x-5)^2+50$$
$x>0$ かつ $y>0$ より　　$0<x<10$
この範囲の x について，S は $x=y=5$ で最小値 50 をとる。



したがって，針金を半分に切ればよい。
また，面積の和の最小値は 50 cm^2 である。

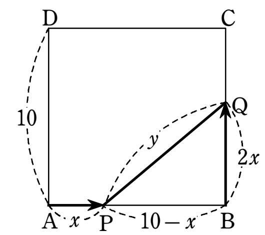
9 1 辺の長さが 10 cm の正方形 ABCD がある。点 P は A を出発して，辺 AB 上を毎秒 1 cm の速さで B に向かって進み，点 Q は，点 P と同時に B を出発して，辺 BC 上を毎秒 2 cm の速さで C に向かって進む。Q が C に達するまでに P，Q 間の距離が最小になるのは，出発してから何秒後か。また，その最小の距離を求めよ。



解答　2 秒後，$4\sqrt{5}$ cm

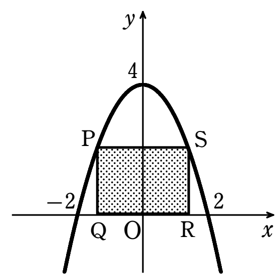
解説

出発してから x 秒後の P，Q 間の距離を y cm とする。
Q は 5 秒後に C に達するから
$$0\leqq x\leqq 5 \quad \cdots\cdots ①$$
このとき，$\mathrm{AP}=x$，$\mathrm{BQ}=2x$ であるから
$$y^2=(10-x)^2+(2x)^2$$
$$=5x^2-20x+100$$
$$=5(x-2)^2+80$$



よって，① の範囲の x について，y^2 は $x=2$ で最小値 80 をとる。
$y>0$ であるから，y^2 が最小となるとき y も最小となる。
ゆえに，y は $x=2$ で最小値 $\sqrt{80}=4\sqrt{5}$ をとる。
したがって，2 秒後に P，Q 間の距離は最小になり，最小の距離は $4\sqrt{5}$ cm である。

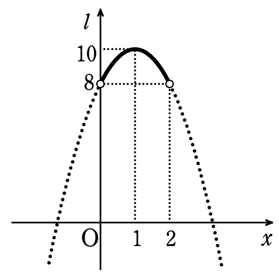
10 放物線 $y=4-x^2$ と x 軸で囲まれた部分に，長方形 PQRS を右の図のように Q，R が x 軸上にあるように内接させる。
この長方形の周の長さが最大となるときの PS の長さを求めよ。



解答　2

解説

点 R の座標を $(x,\ 0)$ とすると，点 Q，S，P の座標は，それぞれ
$$\mathrm{Q}(-x,\ 0),\ \mathrm{S}(x,\ 4-x^2),\ \mathrm{P}(-x,\ 4-x^2)$$
となる。このときグラフより
$$0<x<2$$
長方形 PQRS の周の長さを l とすると
$$l=(\mathrm{QR}+\mathrm{RS})\times 2=(2x+4-x^2)\times 2$$
$$=-2x^2+4x+8=-2(x-1)^2+10$$



よって，$x=1$ のとき，l は最大値 10 をとる。
このとき　　$\mathrm{PS}=2x=2\cdot 1=2$
ゆえに，PS＝2 のとき，長方形 PQRS の周の長さは最大になる。

11 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。[各 10 点]

(1)　$y=x^2-4x+5$　　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x$

解答　(1)　与えられた関数の式を変形すると　　$y=(x-2)^2+1$
よって，$x=2$ で最小値 1 をとる。最大値はない。

(2)　与えられた関数の式を変形すると　　$y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2$
よって，$x=2$ で最大値 2 をとる。最小値はない。

解説

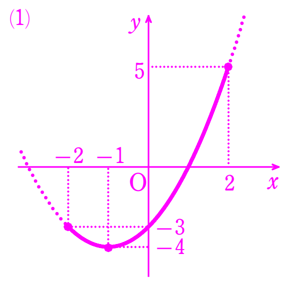
(1)　与えられた関数の式を変形すると　　$y=(x-2)^2+1$
よって，$x=2$ で最小値 1 をとる。最大値はない。

(2)　与えられた関数の式を変形すると　　$y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2$
よって，$x=2$ で最大値 2 をとる。最小値はない。

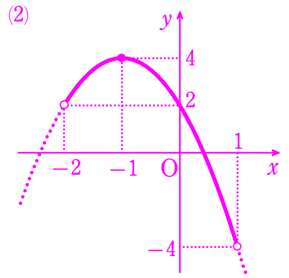
12 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。[各 15 点]

(1)　$y=x^2+2x-3$　$(-2\leqq x\leqq 2)$　　　(2)　$y=-2x^2-4x+2$　$(-2<x<1)$

解答　(1)　与えられた関数の式を変形すると
$$y=(x+1)^2-4 \quad (-2\leqq x\leqq 2)$$
よって，そのグラフは右の図の実線の部分である。したがって
$x=2$　　で最大値 5
$x=-1$ で最小値 -4
をとる。

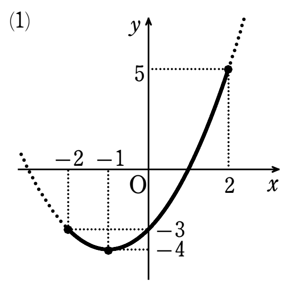


(2)　与えられた関数の式を変形すると
$$y=-2(x+1)^2+4 \quad (-2<x<1)$$
よって，そのグラフは右の図の実線の部分である。したがって
$x=-1$ で最大値 4 をとる。
最小値はない。

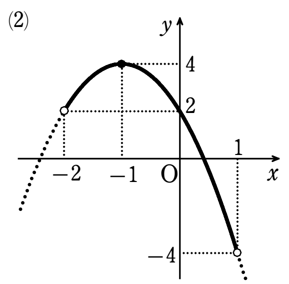


解説

(1)　与えられた関数の式を変形すると
$$y=(x+1)^2-4 \quad (-2\leqq x\leqq 2)$$
よって，そのグラフは右の図の実線の部分である。したがって
$x=2$　　で最大値 5
$x=-1$ で最小値 -4
をとる。



(2)　与えられた関数の式を変形すると
$$y=-2(x+1)^2+4 \quad (-2<x<1)$$
よって，そのグラフは右の図の実線の部分である。したがって
$x=-1$ で最大値 4 をとる。
最小値はない。



13 周囲の長さが 40 cm である長方形の面積を $S\,\mathrm{cm}^2$ とするとき，S の最大値を求めよ。また，このとき，長方形はどのような形か。[20 点]

解答　長方形の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $\dfrac{40-2x}{2}=20-x$ (cm) である。

また，$x>0$，$20-x>0$ であるから　　$0<x<20$

この長方形の面積 S (cm^2) は

$$S=x(20-x)=-(x-10)^2+100$$

$x=10$ は定義域 $0<x<20$ に含まれるから，S は $x=10$ で最大値 100 をとる。

よって，長方形の面積 S の最大値は 100 cm^2 である。

このとき，縦の長さも横の長さも 10 cm になるから，長方形の形は正方形である。

解説

長方形の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $\dfrac{40-2x}{2}=20-x$ (cm) である。

また，$x>0$，$20-x>0$ であるから　　$0<x<20$

この長方形の面積 S (cm^2) は

$$S=x(20-x)=-(x-10)^2+100$$

$x=10$ は定義域 $0<x<20$ に含まれるから，S は $x=10$ で最大値 100 をとる。

よって，長方形の面積 S の最大値は 100 cm^2 である。

このとき，縦の長さも横の長さも 10 cm になるから，長方形の形は正方形である。

14 周の長さが 40 である長方形の対角線の長さ l の最小値を求めよ。[25 点]

解答　長方形の 2 辺の長さを x，y とする。

$2x+2y=40$ であるから　　$y=20-x$

辺の長さは正の数であるから　　$x>0$　かつ　$20-x>0$

すなわち　　$0<x<20$　…… ①

三平方の定理により　　$l^2=x^2+y^2=x^2+(20-x)^2=2x^2-40x+400$

$\qquad=2(x-10)^2+200$

① の範囲の x について，l^2 は $x=10$ で最小値 200 をとる。

$l>0$ であるから，l^2 が最小のとき l も最小となる。

よって，l の最小値は　　$\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

解説

長方形の 2 辺の長さを x，y とする。

$2x+2y=40$ であるから　　$y=20-x$

辺の長さは正の数であるから　　$x>0$　かつ　$20-x>0$

すなわち　　$0<x<20$　…… ①

三平方の定理により　　$l^2=x^2+y^2=x^2+(20-x)^2=2x^2-40x+400$

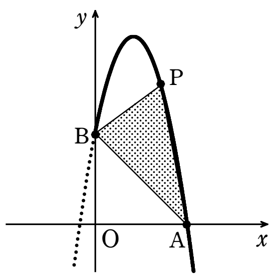
$\qquad=2(x-10)^2+200$

① の範囲の x について，l^2 は $x=10$ で最小値 200 をとる。

$l>0$ であるから，l^2 が最小のとき l も最小となる。

よって，l の最小値は　　$\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

15 関数 $y=-x^2+5x+6$ $(x\geqq 0)$ のグラフと，x 軸，y 軸の交点をそれぞれ A，B とする。このグラフ上の点 P が $x>0$ かつ $y>0$ の範囲を動くとき，△PAB の面積の最大値を求めよ。[25 点]



解答　$-x^2+5x+6=0$ を解くと　　$x=-1,\ 6$

よって，A の座標は　　$(6,\ 0)$

P の座標を

$\qquad(x,\ -x^2+5x+6)\ (0<x<6)$

とする。

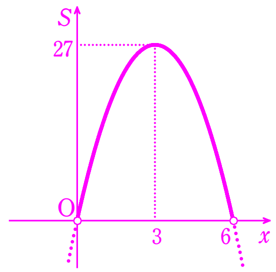
$\qquad$△PAB＝△OAP＋△OBP－△OAB

であるから，△PAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot6\cdot(-x^2+5x+6)+\frac{1}{2}\cdot6\cdot x-\frac{1}{2}\cdot6\cdot6$$

$$=-3x^2+18x=-3(x-3)^2+27$$

よって，$0<x<6$ の範囲で S は $x=3$ で最大値 27 をとる。



解説

$-x^2+5x+6=0$ を解くと　　$x=-1,\ 6$

よって，A の座標は　　$(6,\ 0)$

P の座標を

$\qquad(x,\ -x^2+5x+6)\ (0<x<6)$

とする。

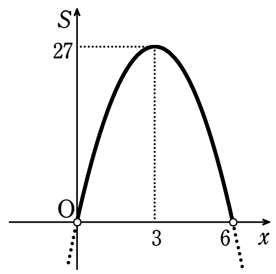
$\qquad$△PAB＝△OAP＋△OBP－△OAB

であるから，△PAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot6\cdot(-x^2+5x+6)+\frac{1}{2}\cdot6\cdot x-\frac{1}{2}\cdot6\cdot6$$

$$=-3x^2+18x=-3(x-3)^2+27$$

よって，$0<x<6$ の範囲で S は $x=3$ で最大値 27 をとる。



16 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=2x^2+3$　　(2)　$y=-(x-3)^2$　　(3)　$y=3(x-1)^2+2$

(4)　$y=x^2+4x+5$　　(5)　$y=-x^2-6x+1$

解答　(1)　$x=0$ で最小値 3，最大値はない　　(2)　$x=3$ で最大値 0，最小値はない

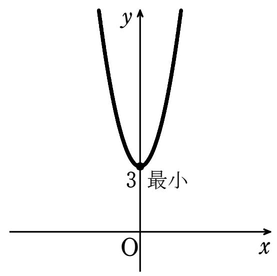
(3)　$x=1$ で最小値 2，最大値はない　　(4)　$x=-2$ で最小値 1，最大値はない

(5)　$x=-3$ で最大値 10，最小値はない

解説

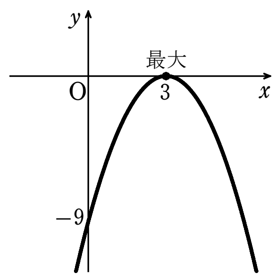
(1)　$y=2x^2+3$ のグラフから

$\qquad x=0$ で最小値 3，最大値はない。



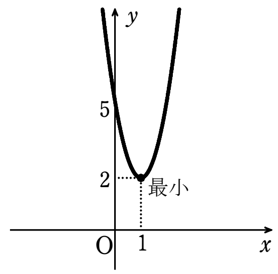
(2)　$y=-(x-3)^2$ のグラフから

$\qquad x=3$ で最大値 0，最小値はない。



(3)　$y=3(x-1)^2+2$ のグラフから

$\qquad x=1$ で最小値 2，最大値はない。



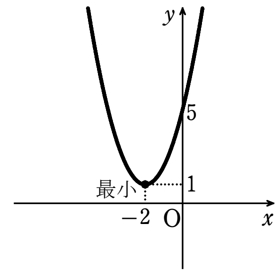
(4)　$y=x^2+4x+5$

$\qquad=(x^2+4x+2^2-2^2)+5$

$\qquad=\{(x+2)^2-2^2\}+5$

$\qquad=(x+2)^2+1$

よって　　$x=-2$ で最小値 1，最大値はない。



(5)　$y=-x^2-6x+1$

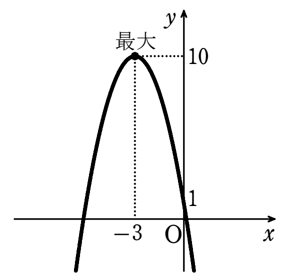
$\qquad=-(x^2+6x)+1$

$\qquad=-(x^2+6x+3^2-3^2)+1$

$\qquad=-\{(x+3)^2-3^2\}+1$

$\qquad=-(x+3)^2+10$

よって　　$x=-3$ で最大値 10，最小値はない。



17 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2+x-1$　　(2)　$y=-x^2+2\sqrt{2}x-2$

解答　(1)　$x=-1$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$，最大値はない

(2)　$x=\sqrt{2}$ で最大値 0，最小値はない

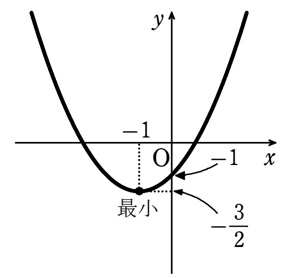
解説

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2+x-1=\dfrac{1}{2}(x^2+2x)-1$

$\qquad=\dfrac{1}{2}(x^2+2x+1^2-1^2)-1$

$\qquad=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-\dfrac{3}{2}$

よって　　$x=-1$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$，最大値はない。

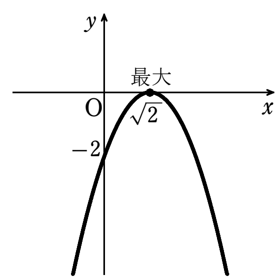


(2)　$y=-x^2+2\sqrt{2}x-2$

$\qquad=-\{x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2\}$

$\qquad=-(x-\sqrt{2})^2$

よって　　$x=\sqrt{2}$ で最大値 0，最小値はない。



18 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2-2x+1$　　(2)　$y=-\sqrt{2}x^2+4x-2$

解答　(1)　$x=3$ で最小値 -2，最大値はない

(2)　$x=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}-2$，最小値はない

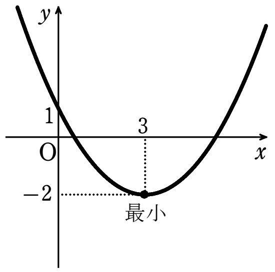
解説

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2-2x+1$

$=\dfrac{1}{3}(x^2-6x)+1$

$=\dfrac{1}{3}(x^2-6x+3^2-3^2)+1$

$=\dfrac{1}{3}(x-3)^2-2$



よって　$x=3$ で最小値 -2，最大値はない。

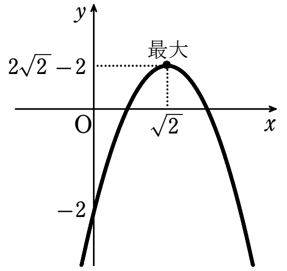
(2)　$y=-\sqrt{2}x^2+4x-2$

$=-\sqrt{2}\left(x^2-\dfrac{4}{\sqrt{2}}x\right)-2$

$=-\sqrt{2}(x^2-2\sqrt{2}x)-2$

$=-\sqrt{2}\{x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2\}-2$

$=-\sqrt{2}(x-\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}-2$



よって　$x=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}-2$，最小値はない。

$\boxed{19}$ 関数 $y=x^2+2x-1$ の定義域として次の範囲をとるとき，各場合について，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$-3\leqq x\leqq 0$　　(2)　$-2<x<1$　　(3)　$0\leqq x\leqq 2$

解答　(1)　$x=-3$ のとき最大値 2，$x=-1$ のとき最小値 -2

(2)　最大値はない，$x=-1$ のとき最小値 -2

(3)　$x=2$ のとき最大値 7，$x=0$ のとき最小値 -1

解説

$y=x^2+2x-1=(x^2+2x+1^2-1^2)-1$

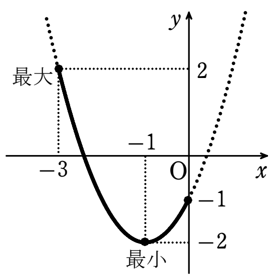
$=(x+1)^2-2$

この関数のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-1$，頂点は点 $(-1,\ -2)$

(1)　$-3\leqq x\leqq 0$ のとき，グラフは図の実線部分のようになるから

$x=-3$ のとき最大値 2，

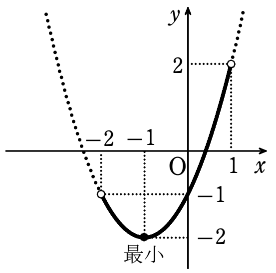
$x=-1$ のとき最小値 -2



(2)　$-2<x<1$ のとき，グラフは図の実線部分のようになるから

最大値はない，

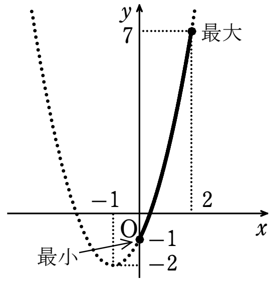
$x=-1$ のとき最小値 -2



(3)　$0\leqq x\leqq 2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになるから

$x=2$ のとき最大値 7，

$x=0$ のとき最小値 -1



$\boxed{20}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=-2x^2-4x+1$　$(-2\leqq x\leqq 1)$　　(2)　$y=4x^2-12x+5$　$\left(-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{7}{2}\right)$

(3)　$y=2x^2-10x+9$　$(0<x<3)$　　(4)　$y=-3x^2+12x-7$　$(x>1)$

解答　(1)　$x=-1$ で最大値 3，$x=1$ で最小値 -5

(2)　$x=-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{7}{2}$ で最大値 12；$x=\dfrac{3}{2}$ で最小値 -4

(3)　$x=\dfrac{5}{2}$ で最小値 $-\dfrac{7}{2}$，最大値はない

(4)　$x=2$ で最大値 5，最小値はない

解説

(1)　$y=-2x^2-4x+1=-2(x^2+2x)+1$

$=-2(x^2+2x+1^2-1^2)+1$

$=-2(x+1)^2+3$

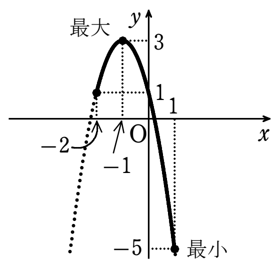
$x=-2$ のとき　　$y=1$

$x=1$　のとき　　$y=-5$

グラフは，図の実線部分である。

よって　　$x=-1$ で最大値 3

$x=1$　で最小値 -5



(2)　$y=4x^2-12x+5=4(x^2-3x)+5$

$=4\left\{x^2-3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+5$

$=4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-4$

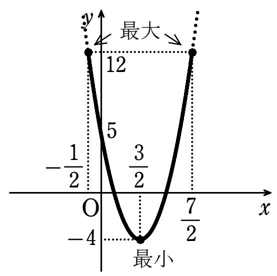
$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき　　$y=12$

$x=\dfrac{7}{2}$　のとき　　$y=12$

グラフは，図の実線部分である。

よって　　$x=-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{7}{2}$ で最大値 12

$x=\dfrac{3}{2}$　　　で最小値 -4



(3)　$y=2x^2-10x+9=2(x^2-5x)+9$

$=2\left\{x^2-5x+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right\}+9$

$=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}$

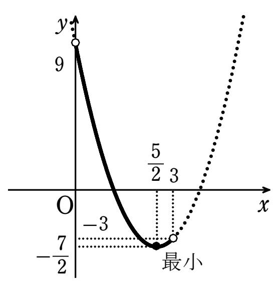
$x=0$ のとき　　$y=9$

$x=3$ のとき　　$y=-3$

グラフは，図の実線部分である。

よって　　$x=\dfrac{5}{2}$ で最小値 $-\dfrac{7}{2}$

最大値はない。



(4)　$y=-3x^2+12x-7=-3(x^2-4x)-7$

$=-3(x^2-4x+2^2-2^2)-7$

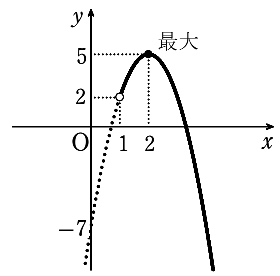
$=-3(x-2)^2+5$

$x=1$ のとき　　$y=2$

グラフは，図の実線部分である。

よって　　$x=2$ で最大値 5

最小値はない。



$\boxed{21}$ 変数 x，y が条件 $x+2y=1$ を満たすとき，次のものを求めよ。

(1)　x^2+y^2 の最小値　　(2)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，x^2+y^2 の最大値

解答　(1)　$x=\dfrac{1}{5}$，$y=\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{5}$　　(2)　$x=1$，$y=0$ のとき最大値 1

解説

(1)　$x+2y=1$ から　　$x=1-2y$　……①

ゆえに　　$x^2+y^2=(1-2y)^2+y^2=5y^2-4y+1$

$=5\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}$　……②

よって，$y=\dfrac{2}{5}$ で最小値 $\dfrac{1}{5}$ をとる。このとき，① から　　$x=\dfrac{1}{5}$

したがって　　$x=\dfrac{1}{5}$，$y=\dfrac{2}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{5}$

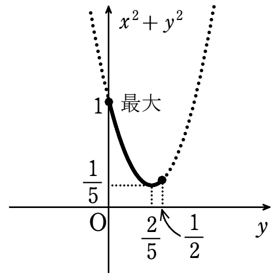
(2)　$x\geqq 0$ であるから，① より　　$1-2y\geqq 0$

$y\geqq 0$ との共通範囲は　　$0\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$　……③

② から，③ の範囲において，x^2+y^2 は $y=0$ で最大値 1 をとる。

このとき，① から　　$x=1$

したがって　　$x=1$，$y=0$ のとき最大値 1



$\boxed{22}$ $x+y=1$，$0\leqq x\leqq 2$ のとき，$x-2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{5}{4}$，$y=-\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$；$x=0$，$y=1$ のとき最小値 -2

解説

$x+y=1$ から　　$y=1-x$　……①

よって　　$x-2y^2=x-2(1-x)^2=-2x^2+5x-2=-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲において，$x-2y^2$ は

$x=\dfrac{5}{4}$ で最大値 $\dfrac{9}{8}$，

$x=0$　で最小値 -2

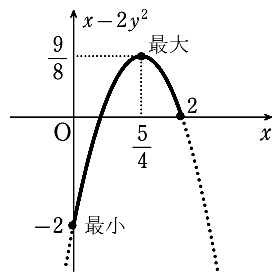
をとる。ここで，① から

$x=\dfrac{5}{4}$ のとき　　$y=-\dfrac{1}{4}$，

$x=0$　のとき　　$y=1$

したがって　　$x=\dfrac{5}{4}$，$y=-\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$；

$x=0$，$y=1$ のとき最小値 -2



$\boxed{23}$ 分速 800 m で北に進む船 A と，分速 600 m で西に進む船 B があり，両船の航路の交点を O とする。現在，A は O の南 2 km，B は O の東 4 km にいる。この 2 隻の船が最も近づくとき，両船間の距離は何 km か。

解答　4 分後に 2 km

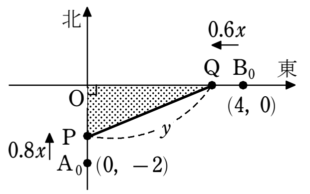
解説

船 A，B の現在の位置を A_0，B_0 とし，x 分後の位置を P，Q とする。ただし，$x\geqq 0$ とする。

$A_0P=0.8x$ (km)，　$B_0Q=0.6x$ (km)

よって，両船間の距離を y km とすると

$$y^2=PQ^2=OP^2+OQ^2$$
$$=|2-0.8x|^2+|4-0.6x|^2$$
$$=(2-0.8x)^2+(4-0.6x)^2$$
$$=x^2-8x+20$$
$$=(x-4)^2+4$$

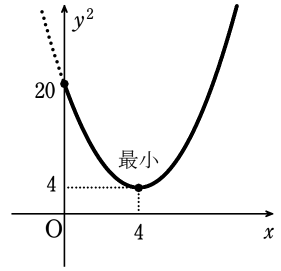


$x\geqq 0$ の範囲で，y^2 は $x=4$ のとき最小値 4 をとる。

$y>0$ であるから，このとき y も最小である。

したがって，y の最小値は　$\sqrt{4}=2$

よって　4 分後に 2 km



24 (1) 関数 $y=x^4-6x^2+10$ の最小値を求めよ。

(2) $-2\leqq x\leqq 1$ のとき，関数 $y=(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)-4$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　(1) $x=\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 1

(2) $x=-1$ のとき最大値 1，$x=-1+\sqrt{3}$ のとき最小値 -8

解説

(1) $x^2=t$ とおくと　$t\geqq 0$

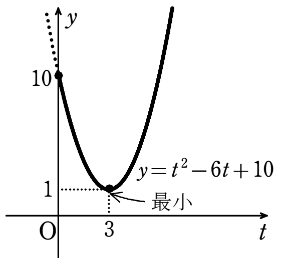
y を t の式で表すと

$$y=t^2-6t+10$$
$$=(t-3)^2+1$$

$t\geqq 0$ の範囲において，y は $t=3$ のとき最小となる。

このとき　$x=\pm\sqrt{3}$

よって　$x=\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 1



(2) $x^2+2x=t$ とおくと

$t=(x+1)^2-1$

$-2\leqq x\leqq 1$ から　$-1\leqq t\leqq 3$　……①

y を t の式で表すと

$$y=t^2-4t-4$$
$$=(t-2)^2-8$$

① の範囲において，y は

$t=-1$ で最大値 1，

$t=2$　で最小値 -8　をとる。

$t=-1$ のとき　$(x+1)^2-1=-1$

ゆえに　$(x+1)^2=0$

よって　$x=-1$

$t=2$ のとき　$(x+1)^2-1=2$

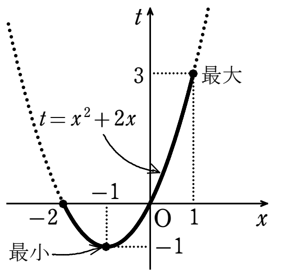
これを解いて　$x=-1\pm\sqrt{3}$

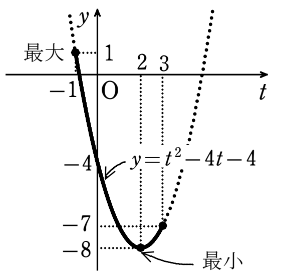
$-2\leqq x\leqq 1$ を満たす解は

$x=-1+\sqrt{3}$

以上から　$x=-1$ のとき最大値 1,

$x=-1+\sqrt{3}$ のとき最小値 -8





25 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=-x^4+6x^2$　　(2) $y=(x^2+2x)(x^2+2x+3)$

(3) $y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$　$(1\leqq x\leqq 5)$

解答　(1) $x=\pm\sqrt{3}$ のとき最大値 9，最小値はない

(2) $x=-1$ のとき最小値 -2，最大値はない

(3) $x=3$ のとき最大値 3，$x=3\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 -6

解説

(1) $x^2=t$ とおくと，t の変域は　$t\geqq 0$

y を t の式で表すと

$$y=-t^2+6t=-(t-3)^2+9$$

$t\geqq 0$ の範囲において，y は $t=3$ で最大値 9 をとる。

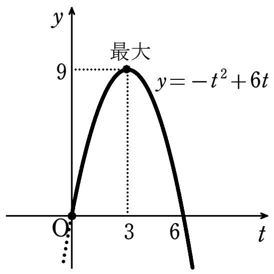
また，最小値はない。

$t=3$ のとき　$x^2=3$

よって　$x=\pm\sqrt{3}$

以上から　$x=\pm\sqrt{3}$ のとき最大値 9,

最小値はない。



(2) $x^2+2x=t$ とおくと　$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$

よって，t の変域は　$t\geqq -1$　……①

y を t の式で表すと

$$y=t(t+3)=t^2+3t=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

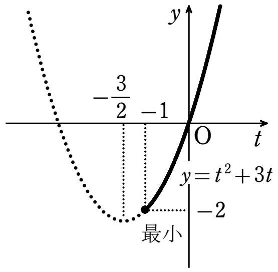
① の範囲において，y は $t=-1$ で最小値 -2 をとる。

また，最大値はない。

$t=-1$ のとき　$x^2+2x=-1$

これを解くと　$x=-1$

以上から　$x=-1$ のとき最小値 -2，最大値はない。



(3) $x^2-6x=t$ とおくと　$t=x^2-6x=(x-3)^2-9$

$1\leqq x\leqq 5$ であるから，t の変域は

$-9\leqq t\leqq -5$　……①

y を t の式で表すと

$$y=t^2+12t+30=(t+6)^2-6$$

① の範囲において，y は

$t=-9$ で最大値 3

$t=-6$ で最小値 -6

をとる。

$t=-9$ のとき　$x^2-6x=-9$

よって　$(x-3)^2=0$

これを解いて　$x=3$

これは $1\leqq x\leqq 5$ を満たす。

$t=-6$ のとき　$x^2-6x=-6$

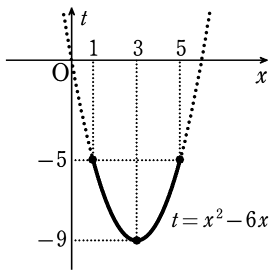
よって　$x^2-6x+6=0$

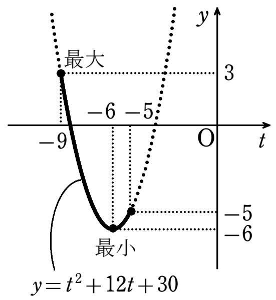
これを解いて　$x=3\pm\sqrt{3}$

これは $1\leqq x\leqq 5$ を満たす。

以上から　$x=3$ のとき最大値 3,

$x=3\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 -6





26 実数 x，y が $x^2+y^2=4$ を満たすとき，$2x+y^2$ の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=1$，$y=\pm\sqrt{3}$ のとき最大値 5；$x=-2$，$y=0$ のとき最小値 -4

解説

$x^2+y^2=4$ から　$y^2=4-x^2$　……①

$y^2\geqq 0$ であるから　$4-x^2\geqq 0$

よって　$-2\leqq x\leqq 2$　……②

$z=2x+y^2$ として，右辺に ① を代入すると

$$z=2x+(4-x^2)=-(x-1)^2+5$$

② の範囲において，z は

$x=1$　で最大 5,

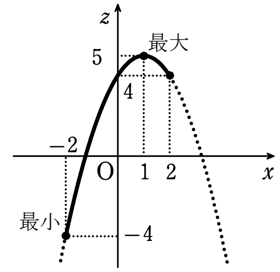
$x=-2$ で最小 -4　をとる。

① から，$x=1$　のとき　$y^2=3$　　ゆえに　$y=\pm\sqrt{3}$

$x=-2$ のとき　$y^2=0$　　ゆえに　$y=0$

したがって　$x=1$，$y=\pm\sqrt{3}$ のとき最大 5；

$x=-2$，$y=0$ のとき最小値 -4



27 実数 x，y が $2x^2+y^2=8$ を満たすとき，x^2+y^2-6x の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=-2$，$y=0$ のとき最大値 16；$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -8

解説

$2x^2+y^2=8$ から　$y^2=8-2x^2$　……①

$y^2\geqq 0$ であるから　$8-2x^2\geqq 0$

ゆえに　$(x+2)(x-2)\leqq 0$

よって　$-2\leqq x\leqq 2$　……②

$z=x^2+y^2-6x$ として，① を代入すると

$$z=x^2+(8-2x^2)-6x=-x^2-6x+8$$
$$=-(x+3)^2+17$$

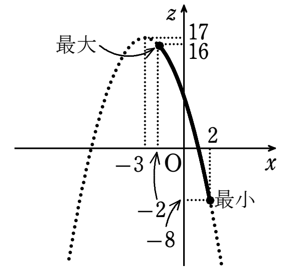
② の範囲において，z は

$x=-2$ で最大値 16，$x=2$ で最小値 -8　をとる。

① から，$x=\pm 2$ のとき　$y^2=0$　　ゆえに　$y=0$

したがって　$x=-2$，$y=0$ のとき最大値 16；

$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -8



28 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=x^2-4x-4$　　(2) $y=-x^2+2x-3$　　(3) $y=3x^2+12x-6$

(4) $y=2x^2-4x+5$　　(5) $y=2(x-1)(x+4)$　　(6) $y=-\frac{1}{2}x^2+x$

解答　(1) $x=2$ で最小値 -8，最大値はない

(2) $x=1$ で最大値 -2，最小値はない

(3) $x=-2$ で最小値 -18，最大値はない

(4) $x=1$ で最小値 3，最大値はない

(5) $x=-\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{25}{2}$，最大値はない

(6) $x=1$ で最大値 $\frac{1}{2}$，最小値はない

解説

(1) $y=x^2-4x-4=\{(x-2)^2-2^2\}-4=(x-2)^2-8$

よって，$x=2$ で最小値 -8　をとる。

最大値はない。

(2) $y=-x^2+2x-3=-(x^2-2x)-3=-\{(x-1)^2-1^2\}-3=-(x-1)^2-2$

よって，$x=1$ で最大値 -2　をとる。

最小値はない。

(3) $y=3x^2+12x-6=3(x^2+4x)-6=3\{(x+2)^2-2^2\}-6=3(x+2)^2-18$

よって，$x=-2$ で最小値 -18　をとる。

最大値はない。

(4) $y=2x^2-4x+5=2(x^2-2x)+5=2\{(x-1)^2-1^2\}+5=2(x-1)^2+3$

よって，$x=1$ で最小値 3 をとる。

最大値はない。

(5) $y=2(x-1)(x+4)=2(x^2+3x-4)=2(x^2+3x)-8=2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-8$

$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$

よって，$x=-\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{25}{2}$ をとる。

最大値はない。

(6) $y=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x^2-2x)=-\frac{1}{2}\{(x-1)^2-1^2\}=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$

よって，$x=1$ で最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

最小値はない。

29 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=-x^2$ $(-2\leqq x\leqq 3)$　(2) $y=x^2+4x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$

(3) $y=x^2+2x-3$ $(-3\leqq x\leqq 1)$　(4) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$ $(-2\leqq x\leqq 5)$

解答 (1) $x=0$ で最大値 0，$x=3$ で最小値 -9

(2) $x=1$ で最大値 5，$x=-1$ で最小値 -3

(3) $x=-3$，1 で最大値 0，$x=-1$ で最小値 -4

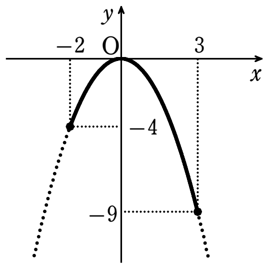
(4) $x=2$ で最大値 1，$x=-2$ で最小値 -7

解説

(1) グラフは図の実線部分である。

したがって　$x=0$ で最大値 0,

$x=3$ で最小値 -9 をとる。



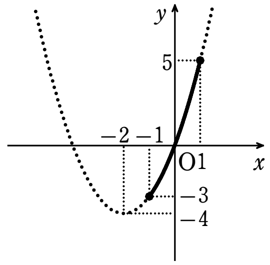
(2) 関数の式を変形すると

$y=(x+2)^2-4$ $(-1\leqq x\leqq 1)$

よって，そのグラフは図の実線部分である。

したがって　$x=1$ で最大値 5,

$x=-1$ で最小値 -3 をとる。



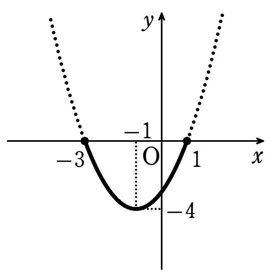
(3) 関数の式を変形すると

$y=(x+1)^2-4$ $(-3\leqq x\leqq 1)$

よって，そのグラフは図の実線部分である。

したがって　$x=-3$，1 で最大値 0,

$x=-1$ で最小値 -4 をとる。



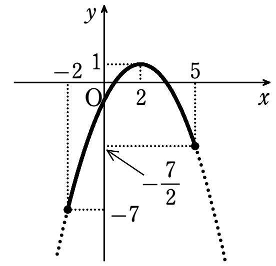
(4) 関数の式を変形すると

$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ $(-2\leqq x\leqq 5)$

よって，そのグラフは図の実線部分である。

したがって　$x=2$ で最大値 1,

$x=-2$ で最小値 -7 をとる。



30 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=-2x^2-4x+1$ $(-2\leqq x<1)$　(2) $y=x^2+3x+3$ $(0<x\leqq 2)$

(3) $y=3(x+1)(x-2)$ $(0<x\leqq 3)$　(4) $y=2x^2-x-2$ $(-1<x<2)$

解答 (1) $x=-1$ で最大値 3，最小値はない　(2) $x=2$ で最大値 13，最小値はない

(3) $x=3$ で最大値 12，$x=\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{27}{4}$

(4) $x=\frac{1}{4}$ で最小値 $-\frac{17}{8}$，最大値はない

解説

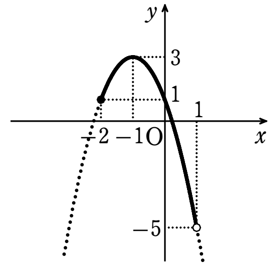
(1) 関数の式を変形すると

$y=-2(x+1)^2+3$ $(-2\leqq x<1)$

よって，グラフは図の実線部分である。

したがって，$x=-1$ で最大値 3 をとる。

最小値はない。



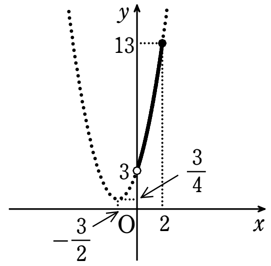
(2) 関数の式を変形すると

$y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ $(0<x\leqq 2)$

よって，グラフは図の実線部分である。

したがって，$x=2$ で最大値 13 をとる。

最小値はない。



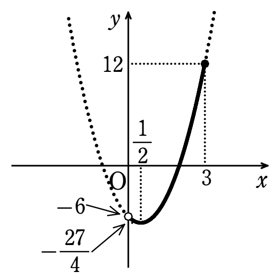
(3) 関数の式を変形すると

$y=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{27}{4}$ $(0<x\leqq 3)$

よって，グラフは図の実線部分である。

したがって，$x=3$ で最大値 12,

$x=\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{27}{4}$ をとる。



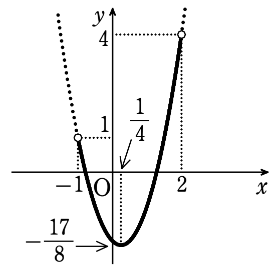
(4) 関数の式を変形すると

$y=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$ $(-1<x<2)$

よって，グラフは図の実線部分である。

したがって，$x=\frac{1}{4}$ で最小値 $-\frac{17}{8}$ をとる。

最大値はない。



31 k は定数とする。2 次関数 $y=x^2+2kx+k$ の最小値を m とする。

(1) m は k の関数である。m を k の式で表せ。

(2) k の関数 m の最大値とそのときの k の値を求めよ。

解答 (1) $m=-k^2+k$　(2) $k=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$

解説

(1) $y=x^2+2kx+k=(x+k)^2-k^2+k$

よって，y は $x=-k$ で最小値 $-k^2+k$ をとるから　$m=-k^2+k$

(2) $m=-k^2+k=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

よって，m は $k=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

32 周囲の長さが 24 cm である長方形について，次の問いに答えよ。

(1) この長方形の面積の最大値を求めよ。また，このとき，長方形はどのような形か。

(2) この長方形の対角線を 1 辺とする正方形の面積の最小値を求めよ。

解答 (1) 36 cm^2，正方形　(2) 72 cm^2

解説

(1) 長方形の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $\frac{24-2x}{2}=12-x$ (cm) である。

また，$x>0$，$12-x>0$ であるから　$0<x<12$

この長方形の面積を y cm^2 とすると

$y=x(12-x)=-x^2+12x=-(x-6)^2+36$

$0<x<12$ から，y は $x=6$ で最大値 36 をとる。

よって，長方形の面積の最大値は 36 cm^2 である。

このとき，縦の長さも横の長さも 6 cm になるから，長方形の形は正方形である。

(2) 長方形の対角線の長さを z cm とすると　$z^2=x^2+(12-x)^2$

よって，正方形の面積を S cm^2 とすると

$S=z^2=x^2+(12-x)^2=2x^2-24x+144=2(x-6)^2+72$

$0<x<12$ から，S は $x=6$ で最小値 72 をとる。

よって，正方形の面積の最小値は　72 cm^2

33 点 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ は，放物線 $y=x^2$ 上の点で，2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(4,\ 16)$ の間にある。このとき，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積の最大値を求めよ。

解答 $x=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{125}{8}$

解説

点 P を通り x 軸と垂直な直線と，線分 AB との交点を Q とする。直線 AB の方程式は

$y-1=\frac{16-1}{4-(-1)}\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=3x+4$

よって，点 Q の座標は　$(x,\ 3x+4)$

ゆえに　$\mathrm{PQ}=3x+4-x^2$

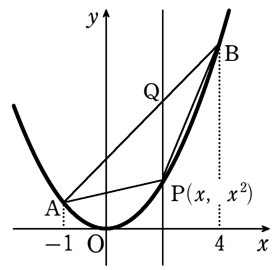
したがって，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積を S とすると

$S=\triangle\mathrm{APQ}+\triangle\mathrm{BPQ}$

$=\frac{1}{2}\times\mathrm{PQ}\times[\{x-(-1)\}+(4-x)]$

$=\frac{1}{2}\times(3x+4-x^2)\times 5=\frac{5}{2}(-x^2+3x+4)$

$=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{125}{8}$



また，定義域は $-1<x<4$ である。

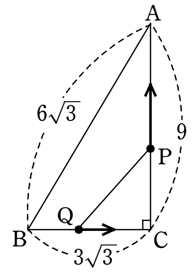
よって，△APB の面積は $x=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{125}{8}$ をとる。

34 $\angle C=90^\circ$，$CA=9$，$AB=6\sqrt{3}$ の △ABC がある。点 P は頂点 C から A まで，辺 CA 上を毎秒 3 の速さで進む。点 Q は P と同時に頂点 B を出発し，頂点 C まで辺 BC 上を毎秒 $\sqrt{3}$ の速さで進む。このとき，P，Q 間の距離の最小値を求めよ。

解答　$\frac{9}{2}$

解説

出発してから t 秒後の P，Q 間の距離を y とする。



$BC=\sqrt{AB^2-CA^2}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-9^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

よって　$CQ=3\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t$

また　$CP=3t$

ゆえに　$y^2=CP^2+CQ^2=(3t)^2+(3\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t)^2$

$=12t^2-18t+27=12\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{81}{4}$

定義域は，$0\leqq\sqrt{3}\,t\leqq3\sqrt{3}$，$0\leqq3t\leqq9$ から　$0\leqq t\leqq3$

よって，$t=\frac{3}{4}$ で y^2 は最小値 $\frac{81}{4}$ をとる。

$y>0$ であるから，このとき y も最小となり，$t=\frac{3}{4}$ で y は最小値 $\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$ をとる。

したがって，P，Q 間の距離の最小値は　$\frac{9}{2}$

35 (1)　$2x+y=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(2)　$x+2y+3=0$ のとき，xy の最大値を求めよ。

解答　(1)　$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$　　(2)　$x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$

解説

(1)　$2x+y=1$ から　$y=1-2x$

よって　$x^2+y^2=x^2+(1-2x)^2=5x^2-4x+1=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$

ゆえに，$x=\frac{2}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。

このとき　$y=1-2\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

したがって　$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$

(2)　$x+2y+3=0$ から　$x=-2y-3$

よって　$xy=(-2y-3)y=-2y^2-3y=-2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

ゆえに，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。

このとき　$x=-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)-3=-\frac{3}{2}$

したがって　$x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$

36 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$x+y=4$ のとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。また，x^2+2y^2 の最大値と最小値を求めよ。

解答　$0\leqq x\leqq4$；$x=0$，$y=4$ で最大値 32；$x=\frac{8}{3}$，$y=\frac{4}{3}$ で最小値 $\frac{32}{3}$

解説

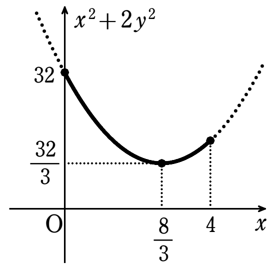
$x+y=4$ から　$y=4-x$　……①

$y\geqq0$ から　$4-x\geqq0$　　よって　$x\leqq4$

$x\geqq0$ と合わせて　$0\leqq x\leqq4$　……②

また　$x^2+2y^2=x^2+2(4-x)^2=3x^2-16x+32$

$=3\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\frac{32}{3}$



よって，② の範囲の x について x^2+2y^2 は

$x=0$ で最大値 32，$x=\frac{8}{3}$ で最小値 $\frac{32}{3}$

をとる。

ここで，① から　$x=0$ のとき $y=4$，$x=\frac{8}{3}$ のとき $y=\frac{4}{3}$

以上から，x^2+2y^2 は

$x=0$，$y=4$ で最大値 32；$x=\frac{8}{3}$，$y=\frac{4}{3}$ で最小値 $\frac{32}{3}$

をとる。

37 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=-2x^4+4x^2+3$

(2)　$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$

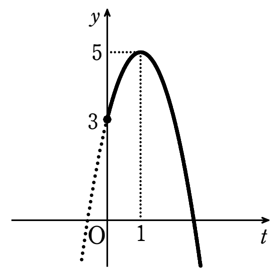
解答　(1)　$x=\pm1$ で最大値 5，最小値はない　　(2)　$x=1$ で最小値 -4，最大値はない

解説

(1)　$x^2=t$ とおくと　$t\geqq0$

また　$y=-2x^4+4x^2+3=-2t^2+4t+3$

$=-2(t-1)^2+5$



このグラフは，図の実線部分のようになる。

よって，y は $t=1$ で最大値 5 をとる。

最小値はない。

$t=1$ のとき　$x^2=1$

よって　$x=\pm1$

したがって，y は $x=\pm1$ で最大値 5 をとる。

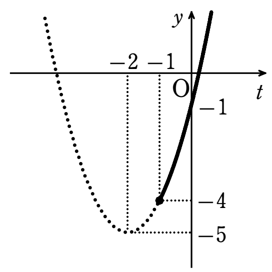
最小値はない。

(2)　$x^2-2x=t$ とおくと　$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$

よって　$t\geqq-1$

また　$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1=t^2+4t-1$

$=(t+2)^2-5$



このグラフは，図の実線部分のようになる。

よって，y は $t=-1$ で最小値 -4 をとる。

最大値はない。

$t=-1$ のとき　$x^2-2x=-1$

よって　$(x-1)^2=0$　　ゆえに　$x=1$

したがって，y は $x=1$ で最小値 -4 をとる。

最大値はない。

38 $x^2+y^2=1$ のとき，x^2-y^2+2x の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=1$，$y=0$ で最大値 3；$x=-\frac{1}{2}$，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

解説

$x^2+y^2=1$ から　$y^2=1-x^2$

$y^2\geqq0$ であるから　$1-x^2\geqq0$　　よって　$-1\leqq x\leqq1$

このとき　$x^2-y^2+2x=x^2-(1-x^2)+2x=2x^2+2x-1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

よって，x^2-y^2+2x は，$x=1$ で最大値 3，$x=-\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$ をとる。

また，$y^2=1-x^2$ であるから

$x=1$ のとき $y=0$，$x=-\frac{1}{2}$ のとき $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$x=1$，$y=0$ で最大値 3

$x=-\frac{1}{2}$，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

39 x の 2 次関数 $y=2x^2+4mx+3m$ がある。

(1)　この 2 次関数の最小値 l を，m の式で表せ。

(2)　m の値を変化させて，(1) における最小値 l が最も大きくなるときの m の値と，そのときの l の値を求めよ。

解答　(1)　$l=-2m^2+3m$　　(2)　$m=\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$

解説

(1)　$y=2(x+m)^2-2m^2+3m$

よって，y は $x=-m$ で最小値 $-2m^2+3m$ をとる。

したがって　$l=-2m^2+3m$

(2)　$l=-2\left(m-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

よって，l は $m=\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。

40 x の 2 次関数 $y=2x^2-4kx+4k+3$ の最小値を $M(k)$ とする。[各 10 点]

(1) $M(k)$ を求めよ。

(2) $M(k)$ の最大値を求めよ。

解答　(1)　$y=2x^2-4kx+4k+3=2(x^2-2kx+k^2)-2k^2+4k+3$

$=2(x-k)^2-2k^2+4k+3$

したがって　$M(k)=-2k^2+4k+3$

(2)　$M(k)=-2k^2+4k+3=-2(k^2-2k+1)+2+3=-2(k-1)^2+5$

よって，$M(k)$ は $k=1$ で最大値 5 をとる。

解説

(1)　$y=2x^2-4kx+4k+3=2(x^2-2kx+k^2)-2k^2+4k+3$

$=2(x-k)^2-2k^2+4k+3$

したがって　$M(k)=-2k^2+4k+3$

(2)　$M(k)=-2k^2+4k+3=-2(k^2-2k+1)+2+3=-2(k-1)^2+5$

よって，$M(k)$ は $k=1$ で最大値 5 をとる。