点の座標クイズ

1．2点 A$(-3,\ 4)$，B$(1,\ -4)$ を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

(1)　3 : 2 に内分する点 C　　(2)　3 : 2 に外分する点 D
(3)　2 : 3 に外分する点 E　　(4)　中点 M

解答　(1)　$\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$　(2)　$(9,\ -20)$　(3)　$(-11,\ 20)$　(4)　$(-1,\ 0)$

解説
求める点の座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　$x=\dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot 1}{3+2}=\dfrac{-3}{5}=-\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{2\cdot 4+3\cdot(-4)}{3+2}=\dfrac{-4}{5}=-\dfrac{4}{5}$

よって，点 C の座標は　$\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$

(2)　$x=\dfrac{-2\cdot(-3)+3\cdot 1}{3-2}=9$，$y=\dfrac{-2\cdot 4+3\cdot(-4)}{3-2}=-20$

よって，点 D の座標は　$(9,\ -20)$

(3)　$x=\dfrac{-3\cdot(-3)+2\cdot 1}{2-3}=\dfrac{11}{-1}=-11$，$y=\dfrac{-3\cdot 4+2\cdot(-4)}{2-3}=\dfrac{-20}{-1}=20$

よって，点 E の座標は　$(-11,\ 20)$

(4)　$x=\dfrac{-3+1}{2}=-1$，$y=\dfrac{4+(-4)}{2}=0$

よって，中点 M の座標は　$(-1,\ 0)$

2．次の3点 A，B，C を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ。

(1)　A$(-2,\ 5)$，B$(1,\ -3)$，C$(7,\ 1)$
(2)　A$(3,\ -6)$，B$(-4,\ 5)$，C$(-8,\ -4)$

解答　(1)　$(2,\ 1)$　(2)　$\left(-3,\ -\dfrac{5}{3}\right)$

解説
△ABC の重心の座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　$x=\dfrac{(-2)+1+7}{3}=2$，$y=\dfrac{5+(-3)+1}{3}=1$

よって，△ABC の重心の座標は　$(2,\ 1)$

(2)　$x=\dfrac{3+(-4)+(-8)}{3}=-3$，$y=\dfrac{(-6)+5+(-4)}{3}=-\dfrac{5}{3}$

よって，△ABC の重心の座標は　$\left(-3,\ -\dfrac{5}{3}\right)$

3．点 A$(-1,\ 3)$ に関して，点 P$(1,\ -1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解答　$(-3,\ 7)$

解説
点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 A は線分 PQ の中点であるから

$$-1=\frac{1+x}{2},\qquad 3=\frac{-1+y}{2}$$

これを解いて　$x=-3$，$y=7$
よって，Q の座標は　$(-3,\ 7)$

4．点 A$(3,\ 1)$ に関して，点 P$(-2,\ 5)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解答　$(8,\ -3)$

解説
点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 A は線分 PQ の中点であるから

$$3=\frac{-2+x}{2},\qquad 1=\frac{5+y}{2}$$

これを解いて　$x=8$，$y=-3$
よって，Q の座標は　$(8,\ -3)$

5．2点 A$(-1,\ 2)$，B$(3,\ 8)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{17}{2},\ 0\right)$

解説
点 P が x 軸上にあるから，その座標は $(x,\ 0)$ とおける。

$$AP^2=(x+1)^2+(0-2)^2=x^2+2x+5$$
$$BP^2=(x-3)^2+(0-8)^2=x^2-6x+73$$

AP$=$BP から　$AP^2=BP^2$
よって　$x^2+2x+5=x^2-6x+73$
これを解いて　$x=\dfrac{17}{2}$　　ゆえに　$\left(\dfrac{17}{2},\ 0\right)$

6．2点 A$(-3,\ 3)$，B$(4,\ -2)$ を2つの頂点とし，点 G$(3,\ 1)$ を重心とする △ABC の頂点 C の座標を求めよ。

解答　$(8,\ 2)$

解説
頂点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 G が △ABC の重心であるから

$$\frac{-3+4+x}{3}=3,\qquad \frac{3-2+y}{3}=1$$

よって　$x=8$，$y=2$　　ゆえに　$(8,\ 2)$

7．4点 A$(-3,\ 2)$，B$(2,\ -2)$，C$(4,\ 3)$，D を頂点とする平行四辺形 ABCD について，次の点の座標を求めよ。

(1)　対角線 AC の中点 M　　(2)　頂点 D

解答　(1)　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$　(2)　$(-1,\ 7)$

解説

(1)　中点 M の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2},\qquad y=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$$

よって，中点 M の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

(2)　頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると，対角線 BD の中点の座標は

$$\left(\frac{x+2}{2},\ \frac{y-2}{2}\right)$$

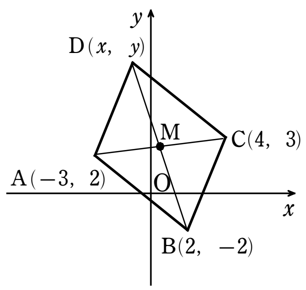
(1) より，対角線 AC の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

平行四辺形 ABCD の対角線 BD，AC の中点は一致するから

$$\frac{x+2}{2}=\frac{1}{2},\qquad \frac{y-2}{2}=\frac{5}{2}$$

ゆえに　$x=-1$，$y=7$　　答　$(-1,\ 7)$

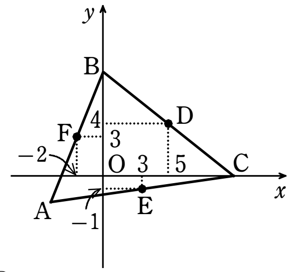


8．三角形の各辺の中点の座標が $(5,\ 4)$，$(3,\ -1)$，$(-2,\ 3)$ であるとき，この三角形の3つの頂点の座標を求めよ。

解答　$(-4,\ -2)$，$(0,\ 8)$，$(10,\ 0)$

解説
三角形の3つの頂点を A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D$(5,\ 4)$，E$(3,\ -1)$，F$(-2,\ 3)$ とする。

$$\begin{cases}\dfrac{x_2+x_3}{2}=5\\[2mm] \dfrac{y_2+y_3}{2}=4\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x_3+x_1}{2}=3\\[2mm] \dfrac{y_3+y_1}{2}=-1\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2\\[2mm] \dfrac{y_1+y_2}{2}=3\end{cases}$$



すなわち

$$\begin{cases}x_2+x_3=10 & \cdots\cdots ①\\ x_3+x_1=6 & \cdots\cdots ②\\ x_1+x_2=-4 & \cdots\cdots ③\end{cases}\qquad \begin{cases}y_2+y_3=8 & \cdots\cdots ④\\ y_3+y_1=-2 & \cdots\cdots ⑤\\ y_1+y_2=6 & \cdots\cdots ⑥\end{cases}$$

(①＋②＋③)÷2，(④＋⑤＋⑥)÷2 から

$$x_1+x_2+x_3=6,\quad y_1+y_2+y_3=6$$

よって　$x_1=-4$，$x_2=0$，$x_3=10$
　　　　$y_1=-2$，$y_2=8$，$y_3=0$

したがって，3つの頂点の座標は　$(-4,\ -2)$，$(0,\ 8)$，$(10,\ 0)$

別解　三角形の3つの頂点を A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ とする。
四角形 DEAF，DEFB，DCEF は平行四辺形となるから，それぞれの対角線の中点は一致する。

$$\begin{cases}\dfrac{5+x_1}{2}=\dfrac{3+(-2)}{2}\\[2mm] \dfrac{4+y_1}{2}=\dfrac{-1+3}{2}\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{5+(-2)}{2}=\dfrac{3+x_2}{2}\\[2mm] \dfrac{4+3}{2}=\dfrac{-1+y_2}{2}\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{5+3}{2}=\dfrac{-2+x_3}{2}\\[2mm] \dfrac{4+(-1)}{2}=\dfrac{3+y_3}{2}\end{cases}$$

よって　$\begin{cases}x_1=-4\\ y_1=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=0\\ y_2=8\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=10\\ y_3=0\end{cases}$

9．3点 A$(-2,\ 2)$，B$(4,\ -1)$，C$(-6,\ 5)$ について，次の点の座標を求めよ。[各5点]

(1)　線分 AB の中点　　(2)　線分 AB を 1 : 2 に内分する点
(3)　線分 AB を 1 : 2 に外分する点　　(4)　△ABC の重心
(5)　点 $(5,\ 2)$ に関して，点 C と対称な点

解答　求める点の座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　$x=\dfrac{-2+4}{2}=1$，$y=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

(2)　$x=\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot 4}{1+2}=0$，$y=\dfrac{2\cdot 2+1\cdot(-1)}{1+2}=1$　　よって　$(0,\ 1)$

(3)　$x=\dfrac{-2\cdot(-2)+1\cdot 4}{1-2}=-8$，$y=\dfrac{-2\cdot 2+1\cdot(-1)}{1-2}=5$　　よって　$(-8,\ 5)$

(4)　$x=\dfrac{-2+4-6}{3}=-\dfrac{4}{3}$，$y=\dfrac{2-1+5}{3}=2$　　よって　$\left(-\dfrac{4}{3},\ 2\right)$

(5)　$\dfrac{x-6}{2}=5$，$\dfrac{y+5}{2}=2$ から　$x=16$，$y=-1$　　よって　$(16,\ -1)$

解説
求める点の座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　$x=\dfrac{-2+4}{2}=1$，$y=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

(2)　$x=\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot 4}{1+2}=0$，$y=\dfrac{2\cdot 2+1\cdot(-1)}{1+2}=1$　　よって　$(0,\ 1)$

(3)　$x=\dfrac{-2\cdot(-2)+1\cdot 4}{1-2}=-8$，$y=\dfrac{-2\cdot 2+1\cdot(-1)}{1-2}=5$　　よって　$(-8,\ 5)$

(4) $x=\dfrac{-2+4-6}{3}=-\dfrac{4}{3}$，$y=\dfrac{2-1+5}{3}=2$　　よって　$\left(-\dfrac{4}{3},\ 2\right)$

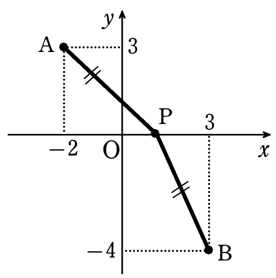
(5) $\dfrac{x-6}{2}=5$，$\dfrac{y+5}{2}=2$ から　$x=16$，$y=-1$　　よって　$(16,\ -1)$

10. (1) 2点 A$(-2,\ 3)$，B$(3,\ -4)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。
(2) 3点 A$(9,\ 10)$，B$(-5,\ 8)$，C$(-7,\ 2)$ から等距離にある点 P の座標を求めよ。

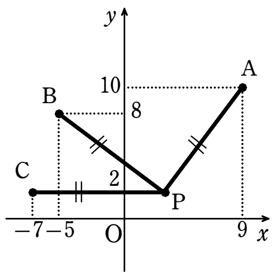
解答　(1)　P$\left(\dfrac{6}{5},\ 0\right)$　　(2)　P$(3,\ 2)$

解説

(1)　P$(x,\ 0)$ とすると，AP$=$BP　すなわち　AP$^2=$BP^2
から　$\{x-(-2)\}^2+(0-3)^2=(x-3)^2+\{0-(-4)\}^2$
ゆえに　$x^2+4x+4+9=x^2-6x+9+16$
これを解いて　$x=\dfrac{6}{5}$
よって　P$\left(\dfrac{6}{5},\ 0\right)$



(2)　P$(x,\ y)$ とすると，AP$=$BP　すなわち　AP$^2=$BP^2
から　$(x-9)^2+(y-10)^2=\{x-(-5)\}^2+(y-8)^2$
整理して　$7x+y-23=0$　……①
また，AP$=$CP　すなわち　AP$^2=$CP^2 から
$(x-9)^2+(y-10)^2=\{x-(-7)\}^2+(y-2)^2$
整理して　$2x+y-8=0$　……②
①，② を連立して解くと　$x=3$，$y=2$
よって　P$(3,\ 2)$



11. (1) 2点 A$(-4,\ 3)$，B$(6,\ 8)$ から等距離にある y 軸上の点 P の座標を求めよ。
(2) 3点 A$(1,\ 2)$，B$(-6,\ 3)$，C$(-3,\ 4)$ から等距離にある点 P の座標を求めよ。

解答　(1)　$\left(0,\ \dfrac{15}{2}\right)$　　(2)　$(-3,\ -1)$

解説

(1)　P$(0,\ y)$ とおくと，AP$=$BP　すなわち　AP$^2=$BP^2 から
$\{0-(-4)\}^2+(y-3)^2=(0-6)^2+(y-8)^2$
ゆえに　$16+(y-3)^2=36+(y-8)^2$　　整理して　$2y=15$
これを解いて　$y=\dfrac{15}{2}$　　よって　P$\left(0,\ \dfrac{15}{2}\right)$

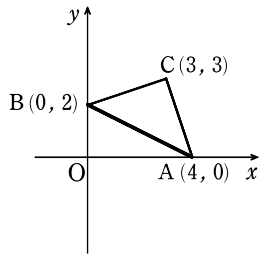
(2)　P$(x,\ y)$ とおくと，AP$=$BP　すなわち　AP$^2=$BP^2 から
$(x-1)^2+(y-2)^2=\{x-(-6)\}^2+(y-3)^2$
整理して　$7x-y+20=0$　……①
また，AP$=$CP　すなわち　AP$^2=$CP^2 から
$(x-1)^2+(y-2)^2=\{x-(-3)\}^2+(y-4)^2$
整理して　$2x-y+5=0$　……②
①，② を連立して解くと　$x=-3$，$y=-1$
よって　P$(-3,\ -1)$

12. 4点 A$(4,\ 0)$，B$(0,\ 2)$，C$(3,\ 3)$，D について，次の問いに答えよ。
(1) △ABC はどのような形の三角形か。
(2) △ABD が正三角形になるとき，点 D の座標を求めよ。

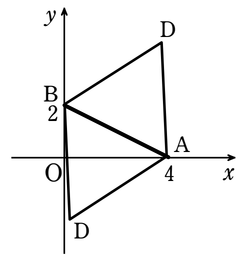
解答　(1)　∠C$=90°$ の直角二等辺三角形
(2)　$(2+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$，$(2-\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})$

解説

(1)　AB$^2=(0-4)^2+(2-0)^2=20$
BC$^2=(3-0)^2+(3-2)^2=10$
CA$^2=(4-3)^2+(0-3)^2=10$
したがって　BC$=$CA，BC$^2+$CA$^2=$AB^2
よって，△ABC は ∠C$=90°$ の直角二等辺三角形である。



(2)　D$(x,\ y)$ とする。
△ABD が正三角形であるための条件は
BD$=$AD$=$AB
BD$^2=$AD^2 から　$x^2+(y-2)^2=(x-4)^2+y^2$
よって　$y=2x-3$　……①
AD$^2=$AB^2 から　$(x-4)^2+y^2=20$　……②
① を ② に代入すると　$(x-4)^2+(2x-3)^2=20$
整理すると　$x^2-4x+1=0$
これを解いて　$x=2\pm\sqrt{3}$
このとき，① から　$y=2(2\pm\sqrt{3})-3=1\pm2\sqrt{3}$　(複号同順)
よって，D の座標は　$(2+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$，$(2-\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})$



13. A$(-2,\ 5)$，B$(6,\ -3)$，C$(1,\ 7)$ とするとき，次の点の座標を求めよ。
(1) 線分 BC を 3 : 2 に内分する点 P　　(2) 線分 CA を 3 : 2 に外分する点 Q
(3) 線分 AB の中点 R　　(4) △PQR の重心 G
(5) 点 A に関して，点 B と対称な点 S

解答　(1)　$(3,\ 3)$　　(2)　$(-8,\ 1)$　　(3)　$(2,\ 1)$　　(4)　$\left(-1,\ \dfrac{5}{3}\right)$
(5)　$(-10,\ 13)$

解説

(1)　点 P の座標は，$\left(\dfrac{2\cdot6+3\cdot1}{3+2},\ \dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot7}{3+2}\right)$ から　$(3,\ 3)$

(2)　点 Q の座標は，$\left(\dfrac{-2\cdot1+3\cdot(-2)}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot7+3\cdot5}{3-2}\right)$ から　$(-8,\ 1)$

(3)　点 R の座標は，$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{5-3}{2}\right)$ から　$(2,\ 1)$

(4)　(1)～(3) の結果により，△PQR の重心 G の座標は
$\left(\dfrac{3-8+2}{3},\ \dfrac{3+1+1}{3}\right)$ から　$\left(-1,\ \dfrac{5}{3}\right)$

(5)　点 A は線分 BS の中点と一致する。
点 S の座標を $(x,\ y)$ とすると　$-2=\dfrac{6+x}{2}$，$5=\dfrac{-3+y}{2}$
これを解いて　$x=-10$，$y=13$
したがって，点 S の座標は　$(-10,\ 13)$

14. A$(-2,\ -3)$，B$(3,\ 7)$，C$(5,\ 2)$ とするとき，次の点の座標を求めよ。
(1) 線分 AB を 4 : 1 に内分する点 P　　(2) 線分 BC を 2 : 3 に外分する点 Q
(3) 線分 CA の中点 R　　(4) △ABC の重心 G
(5) 点 A に関して，点 B と対称な点 S

解答　(1)　$(2,\ 5)$　　(2)　$(-1,\ 17)$　　(3)　$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$　　(4)　$(2,\ 2)$
(5)　$(-7,\ -13)$

解説

(1)　$\left(\dfrac{1\cdot(-2)+4\cdot3}{4+1},\ \dfrac{1\cdot(-3)+4\cdot7}{4+1}\right)$　　よって　P$(2,\ 5)$

(2)　$\left(\dfrac{-3\cdot3+2\cdot5}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot7+2\cdot2}{2-3}\right)$　　よって　Q$(-1,\ 17)$

(3)　$\left(\dfrac{5-2}{2},\ \dfrac{2-3}{2}\right)$　　よって　R$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(4)　$\left(\dfrac{-2+3+5}{3},\ \dfrac{-3+7+2}{3}\right)$　　よって　G$(2,\ 2)$

(5)　点 A は線分 BS の中点と一致する。
点 S の座標を $(x,\ y)$ とすると，線分 BS の中点の座標は　$\left(\dfrac{3+x}{2},\ \dfrac{7+y}{2}\right)$
よって　$-2=\dfrac{3+x}{2}$，$-3=\dfrac{7+y}{2}$　　これを解いて　$x=-7$，$y=-13$
したがって，点 S の座標は　$(-7,\ -13)$

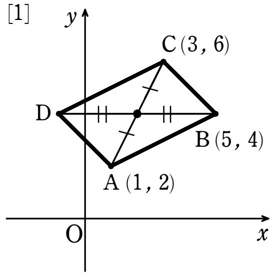
15. 3点 A$(1,\ 2)$，B$(5,\ 4)$，C$(3,\ 6)$ を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を求めよ。

解答　$(-1,\ 4)$，$(7,\ 8)$，$(3,\ 0)$

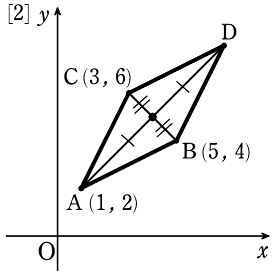
解説

残りの頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とする。
平行四辺形の頂点の順序は，次の 3 つの場合がある。
[1]　ABCD　　[2]　ABDC　　[3]　ADBC

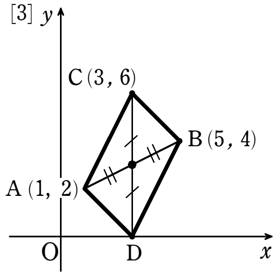
[1] の場合，対角線は AC，BD であり，それぞれの中点を M，N とすると
M$\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{2+6}{2}\right)$，　N$\left(\dfrac{5+x}{2},\ \dfrac{4+y}{2}\right)$
M，N の座標が一致するから
$\dfrac{4}{2}=\dfrac{5+x}{2}$，　$\dfrac{8}{2}=\dfrac{4+y}{2}$
これを解いて　$x=-1$，$y=4$

[1]


[2] の場合，対角線は AD，BC であり，同様にして
$\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{8}{2}$，　$\dfrac{2+y}{2}=\dfrac{10}{2}$
これを解いて　$x=7$，$y=8$

[2]


[3] の場合，対角線は AB，CD であり，同様にして
$\dfrac{6}{2}=\dfrac{3+x}{2}$，　$\dfrac{6}{2}=\dfrac{6+y}{2}$
これを解いて　$x=3$，$y=0$

[3]


以上から，D の座標は
$(-1,\ 4)$，$(7,\ 8)$，$(3,\ 0)$

16. 3点 A$(-2,\ 2)$，B$(1,\ 4)$，C$(3,\ 0)$ を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を求めよ。

解答　$(0,\ -2)$，$(6,\ 2)$，$(-4,\ 6)$

解説

残りの頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とする。

平行四辺形の頂点の順序は，次の 3 つの場合がある。

[1]　ABCD　　[2]　ABDC　　[3]　ADBC

[1] の場合　対角線は AC，BD であり，それぞれの中点を M，N とすると

$$\mathrm{M}\left(\frac{-2+3}{2},\ \frac{2+0}{2}\right),\quad \mathrm{N}\left(\frac{1+x}{2},\ \frac{4+y}{2}\right)$$

M，N の座標が一致するから　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+x}{2}$，$\dfrac{2}{2}=\dfrac{4+y}{2}$

これを解いて　$x=0$，$y=-2$

[2] の場合　対角線は AD，BC であり，同様にして

$\dfrac{-2+x}{2}=\dfrac{4}{2}$，$\dfrac{2+y}{2}=\dfrac{4}{2}$　　よって　$x=6$，$y=2$

[3] の場合　対角線は AB，CD であり，同様にして

$\dfrac{-1}{2}=\dfrac{3+x}{2}$，$\dfrac{6}{2}=\dfrac{0+y}{2}$　　よって　$x=-4$，$y=6$

以上から，D の座標は　$(0,\ -2)$，$(6,\ 2)$，$(-4,\ 6)$

17. 平面上に 3 点 A$(2,\ 3)$，B$(1,\ 2)$，C$(3,\ 1)$ をとる。このとき，三角形 ABC の内心の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{8+\sqrt{10}}{6},\ \dfrac{16-\sqrt{10}}{6}\right)$

解説

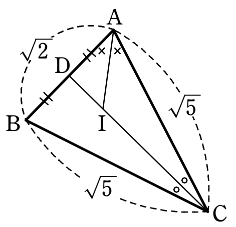
$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2}$，

$\mathrm{BC}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$，

$\mathrm{CA}=\sqrt{(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$ である。

△ABC の内心を I とする。

直線 CI と線分 AB の交点を D とすると，点 D は線分 AB の中点であるから，点 D の座標は　$\left(\dfrac{2+1}{2},\ \dfrac{3+2}{2}\right)$



すなわち　$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

また，$\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であり，点 I は線分 DC を $\dfrac{\sqrt{2}}{2}:\sqrt{5}$ すなわち $\sqrt{2}:2\sqrt{5}$ に内分する。

したがって，点 I の x 座標は

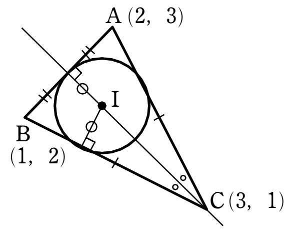
$$\frac{2\sqrt{5}\cdot\frac{3}{2}+\sqrt{2}\cdot 3}{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3\{2\cdot 5+(-1+2)\sqrt{5}\sqrt{2}-2\}}{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{8+\sqrt{10}}{6}$$

また，点 I の y 座標は

$$\frac{2\sqrt{5}\cdot\frac{5}{2}+\sqrt{2}\cdot 1}{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{(5\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$
$$=\frac{10\cdot 5+(-5+2)\sqrt{5}\sqrt{2}-2}{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{48-3\sqrt{10}}{18}=\frac{16-\sqrt{10}}{6}$$

よって，求める内心の座標は　$\left(\dfrac{8+\sqrt{10}}{6},\ \dfrac{16-\sqrt{10}}{6}\right)$

別解　$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{5}$ であるから，△ABC の内心を I とすると，直線 CI は，辺 AB の垂直二等分線である。



ゆえに，直線 CI の方程式は，

$y-1=-(x-3)$　すなわち　$y=-x+4$

よって，I の座標は $(t,\ -t+4)$ と表すことができる。ただし，$\dfrac{3}{2}<t<3$ とする。

ここで，直線 AB の方程式は

$y-3=1\cdot(x-2)$　すなわち　$x-y+1=0$

また，直線 BC の方程式は

$y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$　すなわち　$x+2y-5=0$

点 I と直線 AB の距離と，点 I と直線 BC の距離は等しいから

$$\frac{|t-(-t+4)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|t+2(-t+4)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

両辺を 2 乗して　$\dfrac{(2t-3)^2}{2}=\dfrac{(-t+3)^2}{5}$

ゆえに　$6t^2-16t+9=0$　　よって　$t=\dfrac{8\pm\sqrt{10}}{6}$

$\dfrac{3}{2}<t<3$ であるから　$t=\dfrac{8+\sqrt{10}}{6}$

ゆえに，求める内心の座標は　$\left(\dfrac{8+\sqrt{10}}{6},\ \dfrac{16-\sqrt{10}}{6}\right)$

18. 2 点 A$(-4,\ 2)$，B$(3,\ -8)$ を結ぶ線分 AB に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　3 : 1 に内分する点　　(2)　2 : 3 に内分する点

(3)　3 : 1 に外分する点　　(4)　2 : 3 に外分する点

(5)　中点

解答　(1)　$\left(\dfrac{5}{4},\ -\dfrac{11}{2}\right)$　(2)　$\left(-\dfrac{6}{5},\ -2\right)$　(3)　$\left(\dfrac{13}{2},\ -13\right)$

(4)　$(-18,\ 22)$　(5)　$\left(-\dfrac{1}{2},\ -3\right)$

解説

(1)　$\left(\dfrac{1\cdot(-4)+3\cdot 3}{3+1},\ \dfrac{1\cdot 2+3\cdot(-8)}{3+1}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{5}{4},\ -\dfrac{11}{2}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{3\cdot(-4)+2\cdot 3}{2+3},\ \dfrac{3\cdot 2+2\cdot(-8)}{2+3}\right)$　すなわち　$\left(-\dfrac{6}{5},\ -2\right)$

(3)　$\left(\dfrac{-1\cdot(-4)+3\cdot 3}{3-1},\ \dfrac{-1\cdot 2+3\cdot(-8)}{3-1}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{13}{2},\ -13\right)$

(4)　$\left(\dfrac{-3\cdot(-4)+2\cdot 3}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot 2+2\cdot(-8)}{2-3}\right)$　すなわち　$(-18,\ 22)$

(5)　$\left(\dfrac{-4+3}{2},\ \dfrac{2+(-8)}{2}\right)$　すなわち　$\left(-\dfrac{1}{2},\ -3\right)$

19. 次の 3 点を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。

(1)　$(-1,\ 0)$，$(1,\ 2\sqrt{3})$，$(2,\ \sqrt{3})$　　(2)　$(-1,\ -1)$，$(1,\ 1)$，$(-1,\ 3)$

解答　(1)　$\left(\dfrac{2}{3},\ \sqrt{3}\right)$　(2)　$\left(-\dfrac{1}{3},\ 1\right)$

解説

(1)　$\left(\dfrac{-1+1+2}{3},\ \dfrac{0+2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{2}{3},\ \sqrt{3}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{-1+1+(-1)}{3},\ \dfrac{-1+1+3}{3}\right)$　すなわち　$\left(-\dfrac{1}{3},\ 1\right)$

20. (1)　点 A$(-2,\ 1)$ に関して，点 P$(3,\ -4)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

(2)　点 A$(3,\ 2)$ に関して，原点 O と対称な点 Q の座標を求めよ。

解答　(1)　$(-7,\ 6)$　(2)　$(6,\ 4)$

解説

点 Q の座標を $(x,\ y)$ とおく。

(1)　点 A は線分 PQ の中点であるから　$-2=\dfrac{3+x}{2}$，$1=\dfrac{-4+y}{2}$

これを解いて　$x=-7$，$y=6$

よって，点 Q の座標は　$(-7,\ 6)$

(2)　点 A は線分 OQ の中点であるから　$3=\dfrac{0+x}{2}$，$2=\dfrac{0+y}{2}$

これを解いて　$x=6$，$y=4$

よって，点 Q の座標は　$(6,\ 4)$

21. 次の点の座標を求めよ。

(1)　2 点 A$(-5,\ 2)$，B$(3,\ -5)$ から等距離にある x 軸上の点

(2)　2 点 A$(2,\ -3)$，B$(5,\ -2)$ から等距離にある y 軸上の点

(3)　2 点 A$(1,\ 1)$，B$(4,\ -2)$ から等距離にある $y=3x-1$ 上の点

解答　(1)　$\left(\dfrac{5}{16},\ 0\right)$　(2)　$(0,\ 8)$　(3)　$(-1,\ -4)$

解説

(1)　求める点を P$(x,\ 0)$ とする。

AP＝BP であるから　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(x+5)^2+(0-2)^2=(x-3)^2+(0+5)^2$

これを解いて　$x=\dfrac{5}{16}$

ゆえに，求める座標は　$\left(\dfrac{5}{16},\ 0\right)$

(2)　求める点を P$(0,\ y)$ とする。

AP＝BP であるから　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(0-2)^2+(y+3)^2=(0-5)^2+(y+2)^2$

これを解いて　$y=8$

ゆえに，求める座標は　$(0,\ 8)$

(3)　求める点を P$(x,\ 3x-1)$ とする。

AP＝BP であるから　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(x-1)^2+\{(3x-1)-1\}^2=(x-4)^2+\{(3x-1)+2\}^2$

これを解いて　$x=-1$

このとき　$3x-1=-4$

ゆえに，求める座標は　$(-1,\ -4)$

22. 2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(4,\ 5)$ を 2 つの頂点とし，点 G$(3,\ 2)$ を重心とする △ABC の頂点 C の座標を求めよ。

解答　$(6,\ -1)$

解説

点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 G は △ABC の重心であるから

$$3=\frac{-1+4+x}{3},\quad 2=\frac{2+5+y}{3}$$

これを解いて　$x=6$，$y=-1$

よって，頂点 C の座標は　$(6,\ -1)$

23. 3 点 A$(2,\ -2)$，B$(-2,\ 2)$，C を頂点とする三角形が正三角形になるとき，点 C の座標を求めよ。

解答　$(2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$，$(-2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$

解説

点 C の座標を $(x,\ y)$ とする。

△ABC は正三角形であるから　$AB=BC=CA$

よって　$AB^2=BC^2=CA^2$

$AB^2=BC^2$ から　$(-2-2)^2+(2+2)^2=(x+2)^2+(y-2)^2$

ゆえに　$(x+2)^2+(y-2)^2=32$　…… ①

$BC^2=CA^2$ から　$(x+2)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y+2)^2$

ゆえに　$y=x$　…… ②

② を ① に代入して整理すると　$x^2=12$

これを解いて　$x=\pm 2\sqrt{3}$

② から　$x=2\sqrt{3}$ のとき　$y=2\sqrt{3}$

$x=-2\sqrt{3}$ のとき　$y=-2\sqrt{3}$

したがって，点 C の座標は　$(2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$，$(-2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$

24. 3 点 A$(3,\ 5)$，B$(2,\ -2)$，C$(-6,\ 2)$ から等距離にある点の座標を求めよ。

解答　$(-1,\ 2)$

解説

求める点を P$(x,\ y)$ とする。

$AP=BP=CP$ から　$AP^2=BP^2=CP^2$

$AP^2=BP^2$ から　$(x-3)^2+(y-5)^2=(x-2)^2+(y+2)^2$

よって　$x+7y-13=0$　…… ①

$BP^2=CP^2$ から　$(x-2)^2+(y+2)^2=(x+6)^2+(y-2)^2$

よって　$2x-y+4=0$　…… ②

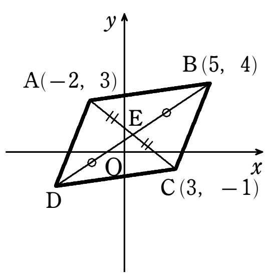
①，② から　$x=-1$，$y=2$

したがって，求める座標は　$(-1,\ 2)$

25. 4 点 A$(-2,\ 3)$，B$(5,\ 4)$，C$(3,\ -1)$，D を頂点とする平行四辺形 ABCD がある。対角線 AC，BD の交点および頂点 D の座標を求めよ。

解答　対角線の交点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，D$(-4,\ -2)$

解説



対角線の交点を E とおく。

点 E は対角線 AC の中点であるから，

その座標は　$\left(\dfrac{-2+3}{2},\ \dfrac{3+(-1)}{2}\right)$

すなわち　$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

また，点 E は対角線 BD の中点でもあるから，

点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\frac{5+x}{2}=\frac{1}{2},\quad \frac{4+y}{2}=1$$

よって　$x=-4$，$y=-2$

ゆえに，点 D の座標は　$(-4,\ -2)$

26. 三角形の各辺の中点の座標が $(-1,\ -1)$，$(0,\ 1)$，$(2,\ -2)$ であるとき，この三角形の 3 つの頂点の座標を求めよ。

解答　$(1,\ -4)$，$(-3,\ 2)$，$(3,\ 0)$

解説

3 つの頂点を A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ とし，辺 AB，BC，CA の中点が，それぞれ $(-1,\ -1)$，$(0,\ 1)$，$(2,\ -2)$ であるとする。

このとき，x 座標について　$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-1$，$\dfrac{x_2+x_3}{2}=0$，$\dfrac{x_3+x_1}{2}=2$

よって　$x_1+x_2=-2$，$x_2+x_3=0$，$x_3+x_1=4$　…… ①

辺々加えると　$2(x_1+x_2+x_3)=2$

ゆえに　$x_1+x_2+x_3=1$

これと ① から　$x_3=3$，$x_1=1$，$x_2=-3$

また，y 座標について　$\dfrac{y_1+y_2}{2}=-1$，$\dfrac{y_2+y_3}{2}=1$，$\dfrac{y_3+y_1}{2}=-2$

よって　$y_1+y_2=-2$，$y_2+y_3=2$，$y_3+y_1=-4$　…… ②

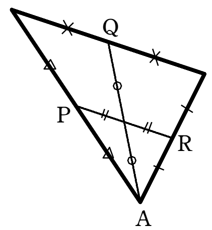
辺々加えると　$2(y_1+y_2+y_3)=-4$

ゆえに　$y_1+y_2+y_3=-2$

これと ② から　$y_3=0$，$y_1=-4$，$y_2=2$

よって，求める 3 つの頂点の座標は　$(1,\ -4)$，$(-3,\ 2)$，$(3,\ 0)$

別解　P$(-1,\ -1)$，Q$(0,\ 1)$，R$(2,\ -2)$ とおき，中点が点 Q である辺に対する頂点を A$(x,\ y)$ とする。



線分 AQ の中点と線分 PR の中点が一致するから

$$\frac{x+0}{2}=\frac{-1+2}{2},\quad \frac{y+1}{2}=\frac{-1-2}{2}$$

よって　$x=1$，$y=-4$

ゆえに　A$(1,\ -4)$

線分 AP，AR を $2:1$ に外分する点が残りの 2 つの頂点である。その座標は順に

$$\left(\frac{-1\cdot 1+2\cdot(-1)}{2-1},\ \frac{-1\cdot(-4)+2\cdot(-1)}{2-1}\right),$$

$$\left(\frac{-1\cdot 1+2\cdot 2}{2-1},\ \frac{-1\cdot(-4)+2\cdot(-2)}{2-1}\right)$$

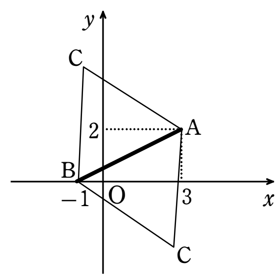
すなわち　$(-3,\ 2)$，$(3,\ 0)$

以上から，求める 3 つの頂点の座標は　$(1,\ -4)$，$(-3,\ 2)$，$(3,\ 0)$

27. 3 点 A$(3,\ 2)$，B$(-1,\ 0)$，C を頂点とする三角形が正三角形になるとき，点 C の座標を求めよ。

解答　$(1+\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})$，$(1-\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$

解説



点 C の座標を $(x,\ y)$ とする。

△ABC は正三角形であるから　$AB=BC=CA$

よって　$AB^2=BC^2=CA^2$

$AB^2=BC^2$ から　$4^2+2^2=(x+1)^2+y^2$

ゆえに　$x^2+y^2+2x-19=0$　…… ①

$BC^2=CA^2$ から　$(x+1)^2+y^2=(x-3)^2+(y-2)^2$

ゆえに　$y=-2x+3$　…… ②

② を ① に代入して整理すると　$x^2-2x-2=0$

これを解くと　$x=1\pm\sqrt{3}$

② から　$x=1+\sqrt{3}$ のとき　$y=1-2\sqrt{3}$

$x=1-\sqrt{3}$ のとき　$y=1+2\sqrt{3}$

したがって，点 C の座標は　$(1+\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})$，$(1-\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$

28. 直線 $3x-y+1=0$ 上の点で，2 点 A$(4,\ -5)$，B$(2,\ -3)$ から等距離にある点の座標を求めよ。

解答　$(-4,\ -11)$

解説

求める点を P$(a,\ b)$ とする。

点 P は，直線 $3x-y+1=0$ 上にあるから　$3a-b+1=0$　…… ①

$AP=BP$ であるから　$AP^2=BP^2$

よって　$(a-4)^2+(b+5)^2=(a-2)^2+(b+3)^2$

これを整理すると　$a-b-7=0$　…… ②

①，② から　$a=-4$，$b=-11$

したがって，求める点の座標は　$(-4,\ -11)$

29. 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(5,\ 2)$，B を頂点とする三角形 OAB の垂心が H$(3,\ 1)$ であるとする。

(1)　直線 AB，OB の傾きを求めよ。　(2)　点 B の座標を求めよ。

解答　(1)　順に -3，-2　(2)　$(17,\ -34)$

解説

(1)　直線 OH の傾きは　$\dfrac{1-0}{3-0}=\dfrac{1}{3}$

OH⊥AB であるから，直線 AB の傾きを m とすると　$m\times\dfrac{1}{3}=-1$

よって　$m=-3$

直線 AH の傾きは　$\dfrac{1-2}{3-5}=\dfrac{1}{2}$

AH⊥OB であるから，直線 OB の傾きを n とすると　$n\times\dfrac{1}{2}=-1$

よって　$n=-2$

(2)　直線 AB の方程式は，(1) から　$y-2=-3(x-5)$

すなわち　$y=-3x+17$　…… ①

直線 OB の方程式は，(1) から　$y=-2x$　…… ②

点 B は 2 直線 AB，OB の交点である。

①，② を連立して解くと　$x=17$，$y=-34$

よって，点 B の座標は　$(17,\ -34)$

30. 直線 $\ell : y=x+1$ と 2 点 A$(1,\ 1)$，B$(3,\ 1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　ℓ に関して B と対称な点 C の座標を求めよ。

(2)　点 P が ℓ 上を動くとき，AP＋BP の最小値とそのときの点 P の座標を求めよ。

解答　(1)　$(0,\ 4)$　(2)　P$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{7}{4}\right)$ のとき最小値 $\sqrt{10}$

解説

(1)　点 C の座標を $(p,\ q)$ とする。

直線 ℓ の傾きは 1 であり，直線 BC は ℓ に垂直であるから　$1\cdot\dfrac{q-1}{p-3}=-1$

よって　$p+q=4$　…… ①

また，線分 BC の中点が直線 ℓ 上にあるから　$\dfrac{q+1}{2}=\dfrac{p+3}{2}+1$

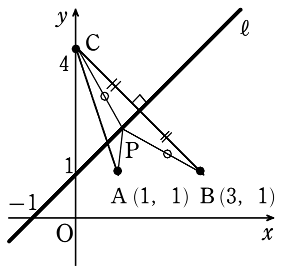
よって　$p-q=-4$　……②

①，② を連立して解くと　$p=0$，$q=4$

したがって，点 C の座標は　$(0,\ 4)$

(2)　BP=CP であるから　AP+BP=AP+CP

よって，AP+BP が最小になるのは，3 点 A，P，C が一直線上にあるとき，すなわち点 P が直線 ℓ と直線 AC の交点と一致するときである。



直線 AC の方程式は　$y-4=\dfrac{1-4}{1-0}(x-0)$

すなわち　$y=-3x+4$

$y=x+1$ と $y=-3x+4$ を連立して解くと

$x=\dfrac{3}{4}$，$y=\dfrac{7}{4}$

よって，AP+BP が最小となる点 P の座標は

$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{7}{4}\right)$ であり，このとき

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{AC}=\sqrt{(0-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$$

31. 直線 $2x-y-3=0$ に関して点 A $(1,\ 4)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

解答　$(5,\ 2)$

解説

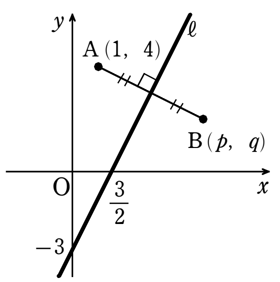
直線 $2x-y-3=0$ を ℓ とし，点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。

直線 ℓ の傾きは 2 であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから

$2\cdot\dfrac{q-4}{p-1}=-1$

ゆえに

$p+2q-9=0$　……①



線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+1}{2},\ \dfrac{q+4}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$2\cdot\dfrac{p+1}{2}-\dfrac{q+4}{2}-3=0$

ゆえに　$2p-q-8=0$　……②

方程式 ①，② を連立させて解くと

$p=5$，$q=2$

したがって，点 B の座標は　$(5,\ 2)$

32. 次の直線に関して，点 A $(3,\ 1)$ と対称な点の座標を求めよ。

(1)　$y=x$　　　(2)　$4x-6y+7=0$

解答　(1)　$(1,\ 3)$　　(2)　$(1,\ 4)$

解説

(1)　直線 $y=x$ を ℓ とし，ℓ に関して点 A $(3,\ 1)$ と対称な点を B $(p,\ q)$ とする。

直線 ℓ の傾きは 1 であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから

$1\cdot\dfrac{q-1}{p-3}=-1$

ゆえに　$p+q-4=0$　……①

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+3}{2},\ \dfrac{q+1}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$\dfrac{q+1}{2}=\dfrac{p+3}{2}$

ゆえに　$p-q+2=0$　……②

方程式 ①，② を連立させて解くと

$p=1$，$q=3$

したがって，点 B の座標は　$(1,\ 3)$

(2)　直線 $4x-6y+7=0$ を ℓ とし，ℓ に関して点 A $(3,\ 1)$ と対称な点を B $(p,\ q)$ とする。

直線 ℓ の傾きは $\dfrac{2}{3}$ であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから

$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{q-1}{p-3}=-1$

すなわち　$3p+2q-11=0$　……①

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+3}{2},\ \dfrac{q+1}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$4\cdot\dfrac{p+3}{2}-6\cdot\dfrac{q+1}{2}+7=0$

ゆえに　$2p-3q+10=0$　……②

方程式 ①，② を連立させて解くと

$p=1$，$q=4$

したがって，点 B の座標は　$(1,\ 4)$

33. k は定数とする。直線 $(2k+1)x+(k+4)y-k+3=0$ は，k の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を求めよ。また，この直線が点 $(-1,\ 1)$ を通るように，k の値を定めよ。

解答　定点の座標は $(1,\ -1)$，$k=3$

解説

$(2k+1)x+(k+4)y-k+3=0$　……①　とする。

① を k について整理すると　$k(2x+y-1)+(x+4y+3)=0$

ゆえに，① は，次の 2 直線の交点を通る。

$2x+y-1=0$，$x+4y+3=0$

これを連立させて解くと　$x=1$，$y=-1$

よって，求める定点の座標は　$(1,\ -1)$

また，① に $x=-1$，$y=1$ を代入すると　$-(2k+1)+(k+4)-k+3=0$

よって　$k=3$

34. 直線 $y=-2x+2$ に関して，点 A$(2,\ 0)$ と対称な点 B の座標を求めよ。[18 点]

解答　点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

線分 AB は直線に垂直であるから

$-2\cdot\dfrac{b}{a-2}=-1$　　よって　$a-2b=2$　……①

線分 AB の中点は，直線上の点であるから

$\dfrac{b}{2}=-2\cdot\dfrac{a+2}{2}+2$　　よって　$2a+b=0$　……②

①，② を解いて　$a=\dfrac{2}{5}$，$b=-\dfrac{4}{5}$

したがって　$\mathrm{B}\left(\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$

解説

点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

線分 AB は直線に垂直であるから

$-2\cdot\dfrac{b}{a-2}=-1$　　よって　$a-2b=2$　……①

線分 AB の中点は，直線上の点であるから

$\dfrac{b}{2}=-2\cdot\dfrac{a+2}{2}+2$　　よって　$2a+b=0$　……②

①，② を解いて　$a=\dfrac{2}{5}$，$b=-\dfrac{4}{5}$

したがって　$\mathrm{B}\left(\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$

35. k がどのような値をとっても，方程式 $(3+k)x+(3-2k)y=1-k$ の表す直線は，k の値に無関係な定点を通る。この定点の座標を求めよ。

解答　$\left(-\dfrac{1}{9},\ \dfrac{4}{9}\right)$

解説

$(3+k)x+(3-2k)y=1-k$ を k について整理すると

$k(x-2y+1)+3x+3y-1=0$　……①

k がどのような値をとっても ① が成り立つための条件は

$x-2y+1=0$，　$3x+3y-1=0$

これを解くと　$x=-\dfrac{1}{9}$，$y=\dfrac{4}{9}$

よって，求める定点の座標は　$\left(-\dfrac{1}{9},\ \dfrac{4}{9}\right)$

36. 定数 k がどんな値をとっても，$(k+3)x-(k-4)y=5k+1$　……①　の表す直線はある定点を通る。この定点の座標を求めよ。

解答　$(3,\ -2)$

解説

① を k について整理すると

$k(x-y-5)+(3x+4y-1)=0$　……①′

k がどんな値をとっても ①′ が成り立つための条件は

$x-y-5=0$，　$3x+4y-1=0$

これを解くと　$x=3$，$y=-2$

よって，求める定点の座標は　$(3,\ -2)$

別解　$k=-3$ としてみると　　$7y=-14$　すなわち　$y=-2$　……②

$k=4$　としてみると　　$7x=21$　　すなわち　$x=3$　……③

この 2 直線 ②，③ の交点の座標は　$(3,\ -2)$

逆に，$(3,\ -2)$ が ① を満たすかどうかは

（左辺）$=(k+3)\cdot3-(k-4)\cdot(-2)=5k+1$，　（右辺）$=5k+1$

で成り立つ。すなわち，① は常に定点 $(3,\ -2)$ を通る。

37. 直線 $x+2y-3=0$ を ℓ とする。次のものを求めよ。

(1)　直線 ℓ に関して，点 P$(0,\ -2)$ と対称な点 Q の座標

(2)　直線 ℓ に関して，直線 $m：3x-y-2=0$ と対称な直線 n の方程式

解答　(1)　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$　　(2)　$13x-9y-4=0$

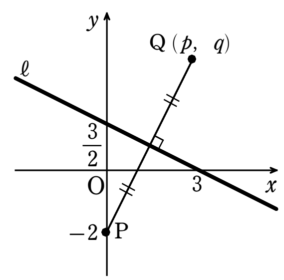
解説

(1)　Q の座標を $(p,\ q)$ とする。また，$p\neq0$ である。

直線 PQ は ℓ に垂直であるから

$\dfrac{q+2}{p}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

ゆえに　$2p-q-2=0$　……①



線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{q-2}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$\dfrac{p}{2}+2\cdot\dfrac{q-2}{2}-3=0$

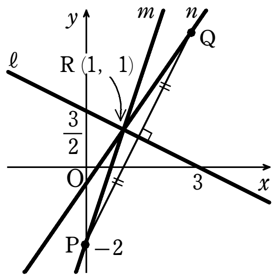
ゆえに　$p+2q-10=0$　……②

①，② を連立して解くと　$p=\dfrac{14}{5}$，$q=\dfrac{18}{5}$　すなわち　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$

(2)　ℓ，m の方程式を連立して解くと　　$x=1$，$y=1$

ゆえに，2 直線 ℓ，m の交点 R の座標は　　$(1,\ 1)$

また，点 P の座標を直線 m の方程式の左辺に代入すると，$3\cdot 0-(-2)-2=0$ となるから，点 P は直線 m 上にある。



よって，直線 n は 2 点 Q，R を通るから，その方程式は　　$\left(\dfrac{18}{5}-1\right)(x-1)-\left(\dfrac{14}{5}-1\right)(y-1)=0$

整理して　　$13x-9y-4=0$

38. (1)　直線 $y=2x+3$ に関して，点 P$(3,\ 4)$ と対称な点の座標を求めよ。

(2)　直線 $y=2x+3$ に関して，直線 $3x-2y-1=0$ と対称な直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$(-1,\ 6)$　　(2)　$17x-6y+53=0$

解説

(1)　直線 $y=2x+3$ を ℓ とし，直線 ℓ に関して点 P$(3,\ 4)$ と対称な点を Q$(p,\ q)$ とすると，$p\fallingdotseq 3$ である。

直線 PQ は ℓ に垂直であるから　　$\dfrac{q-4}{p-3}\cdot 2=-1$

ゆえに　　$p+2q=11$　…… ①

線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{3+p}{2},\ \dfrac{4+q}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから　　$\dfrac{4+q}{2}=2\cdot\dfrac{3+p}{2}+3$

ゆえに　　$2p-q=-8$　…… ②

①，② を解いて　　$p=-1$，$q=6$

したがって，求める点の座標は　　$(-1,\ 6)$

(2)　2 直線の交点の座標を求めると　　$(-7,\ -11)$

点 $(3,\ 4)$ は直線 $3x-2y-1=0$ 上にあるから，求める直線は，(1) より 2 点 $(-7,\ -11)$，$(-1,\ 6)$ を通る。

よって，その方程式は　$\{6-(-11)\}\{x-(-7)\}-\{-1-(-7)\}\{y-(-11)\}=0$

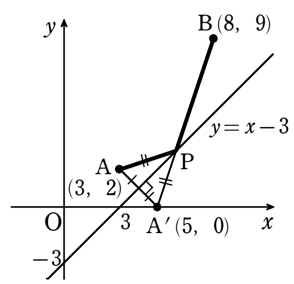
すなわち　　$17x-6y+53=0$

39. xy 平面上に 2 点 A$(3,\ 2)$，B$(8,\ 9)$ がある。点 P が直線 ℓ：$y=x-3$ 上を動くとき，AP＋PB の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ。

解答　最小値 $3\sqrt{10}$，P の座標 $(6,\ 3)$

解説

図のように，2 点 A，B は直線 ℓ に関して同じ側にある。直線 ℓ に関して点 A と対称な点を A′$(a,\ b)$ とする。また，$a\fallingdotseq 3$ である。



直線 AA′ は ℓ に垂直であるから　　$\dfrac{b-2}{a-3}\cdot 1=-1$

ゆえに　　$a+b=5$　…… ①

線分 AA′ の中点は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{2+b}{2}=\frac{3+a}{2}-3$$

ゆえに　　$a-b=5$　…… ②

①，② を解いて　　$a=5$，$b=0$　　　したがって　　A′$(5,\ 0)$

ここで　　AP＋PB＝A′P＋PB≧A′B

よって，3 点 A′，P，B が同じ直線上にあるとき，AP＋PB は最小になり，その最小値は　　$\mathrm{A'B}=\sqrt{(8-5)^2+(9-0)^2}=3\sqrt{10}$

また，直線 A′B の方程式は　　$y=3x-15$　…… ③

直線 ③ と ℓ の方程式を連立して解くと　　$x=6$，$y=3$

したがって，求める点 P の座標は　　$(6,\ 3)$

40. 次の直線に関して，点 A$(-3,\ 5)$ と対称な点の座標を求めよ。

(1)　$y=x$　　　　(2)　$3x-2y+12=0$

解答　(1)　$(5,\ -3)$　　(2)　$\left(\dfrac{3}{13},\ \dfrac{37}{13}\right)$

解説

求める点の座標を B$(p,\ q)$ とする。

(1)　直線 $y=x$ を ℓ とする。

直線 ℓ の傾きは 1 であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから　　$1\cdot\dfrac{q-5}{p+3}=-1$

ゆえに　　$p+q-2=0$　…… ①

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p-3}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから　　$\dfrac{q+5}{2}=\dfrac{p-3}{2}$

ゆえに　　$p-q-8=0$　…… ②

方程式 ①，② を連立させて解くと　　$p=5$，$q=-3$

したがって，求める点の座標は　　$(5,\ -3)$

(2)　直線 $3x-2y+12=0$ を ℓ とする。

直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{2}$ であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから　　$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{q-5}{p+3}=-1$

ゆえに　　$2p+3q-9=0$　…… ①

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p-3}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{p-3}{2}-2\cdot\frac{q+5}{2}+12=0$$

ゆえに　　$3p-2q+5=0$　…… ②

方程式 ①，② を連立させて解くと　　$p=\dfrac{3}{13}$，$q=\dfrac{37}{13}$

したがって，求める点の座標は　　$\left(\dfrac{3}{13},\ \dfrac{37}{13}\right)$

41. 直線 $y=2x$ を ℓ とするとき，次のものを求めよ。

(1)　ℓ に関して，点 A$(5,\ 0)$ と対称な点 B の座標

(2)　ℓ に関して，直線 $3x+y=15$ と対称な直線の方程式

解答　(1)　$(-3,\ 4)$　　(2)　$x-3y+15=0$

解説

(1)　点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。

直線 ℓ の傾きは 2 であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから　　$2\cdot\dfrac{q}{p-5}=-1$

ゆえに　　$p+2q=5$　…… ①

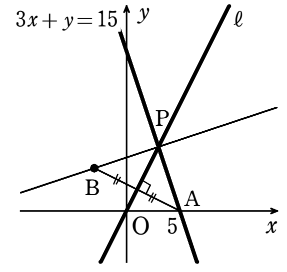
また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+5}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから　　$\dfrac{q}{2}=2\cdot\dfrac{p+5}{2}$

ゆえに　　$2p-q=-10$　…… ②

方程式 ①，② を連立して解くと　　$p=-3$，$q=4$

したがって，点 B の座標は　　$(-3,\ 4)$

(2)　点 A は直線 $3x+y=15$ 上にある。



$y=2x$，$3x+y=15$ を連立して解くと

$x=3$，$y=6$

よって，2 直線 ℓ，$3x+y=15$ の交点 P の座標は

$(3,\ 6)$

求める直線は，2 点 P，B を通るから，その方程式は　　$y-6=\dfrac{4-6}{-3-3}(x-3)$

すなわち　　$x-3y+15=0$