1 3 次方程式 $x^3+4x^2+ax+b=0$ が -3 と 1 を解にもつとき，定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

解答　$a=1$，$b=-6$，他の解は -2

解説
-3 と 1 が解であるから

$$(-3)^3+4(-3)^2+a(-3)+b=0$$
$$1^3+4\cdot1^2+a\cdot1+b=0$$

すなわち　$-3a+b=-9$，　$a+b=-5$

これを解いて　$a=1$，$b=-6$

このとき，方程式は　$x^3+4x^2+x-6=0$

この式の左辺は $(x+3)(x-1)$ で割り切れるから，左辺を因数分解すると

$$(x+3)(x-1)(x+2)=0$$

したがって，他の解は　$x=-2$

答　$a=1$，$b=-6$，他の解は -2

2 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-8=0$ が 1 と 2 を解にもつとき，定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

解答　$a=-7$，$b=14$，他の解は 4

解説
1 と 2 が解であるから

$$1^3+a\cdot1^2+b\cdot1-8=0,\ 2^3+a\cdot2^2+b\cdot2-8=0$$

すなわち　$a+b-7=0$，$4a+2b=0$

これを解いて　$a=-7$，$b=14$

このとき，方程式は　$x^3-7x^2+14x-8=0$

この式の左辺は $(x-1)(x-2)$ で割り切れるから，左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x-2)(x-4)=0$$

したがって，他の解は　$x=4$

答　$a=-7$，$b=14$，他の解は 4

3 3 次方程式 $x^3-3x^2+ax+b=0$ が $1+3i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

解答　$a=12$，$b=-10$，他の解は 1，$1-3i$

解説
$1+3i$ が解であるから

$$(1+3i)^3-3(1+3i)^2+a(1+3i)+b=0$$

整理して

$$(a+b-2)+(3a-36)i=0$$

a，b は実数であるから，$a+b-2$，$3a-36$ は実数である。

よって　$a+b-2=0$，　$3a-36=0$

これを解いて　$a=12$，$b=-10$

このとき，方程式は

$$x^3-3x^2+12x-10=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2-2x+10)=0$$

これを解いて　$x=1$，$1\pm3i$

したがって，他の解は　$x=1$，$1-3i$

答　$a=12$，$b=-10$，　他の解は　1，$1-3i$

4 3 次方程式 $x^3+ax+b=0$ が $1-2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

解答　$a=1$，$b=10$，他の解は -2，$1+2i$

解説
$1-2i$ が解であるから

$$(1-2i)^3+a(1-2i)+b=0$$

整理して　$(a+b-11)+(2-2a)i=0$

a，b は実数であるから，$a+b-11$，$2-2a$ は実数である。

よって　$a+b-11=0$，$2-2a=0$

これを解いて　$a=1$，$b=10$

このとき，方程式は　$x^3+x+10=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて　$x=-2$，$1\pm2i$

したがって，他の解は　$x=-2$，$1+2i$

答　$a=1$，$b=10$，他の解は -2，$1+2i$

別解　$1-2i$ と共役な複素数 $1+2i$ も解である。
よって，この方程式の左辺は　$\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$
すなわち，x^2-2x+5 で割り切れる。
計算すると，商は $x+2$，余りは $(a-1)x+b-10$ となり，余りが 0 であることから
$a-1=0$，$b-10=0$
ゆえに　$a=1$，$b=10$　また，他の解は　$x=-2$，$1+2i$

5 3 次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ の解は 1，3，c である。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=2$，$b=18$，$c=-6$

解説
1 と 3 が解であるから　$1+a-21+b=0$，　$27+9a-63+b=0$

整理すると　$a+b=20$，　$9a+b=36$

これを解いて　$a=2$，$b=18$

よって，方程式は　$x^3+2x^2-21x+18=0$

この方程式の左辺は $(x-1)(x-3)$ で割り切れるから，左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x-3)(x+6)=0$$

ゆえに　$x=1$，3，-6

したがって　$c=-6$

別解　1，3，c が方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ の解であるから，左辺は $x-1$，$x-3$，$x-c$ を因数にもつ。よって，次の x についての恒等式が成り立つ。

$$x^3+ax^2-21x+b=(x-1)(x-3)(x-c)$$

右辺を展開して整理すると

$$x^3+ax^2-21x+b=x^3-(c+4)x^2+(4c+3)x-3c$$

両辺の係数を比較して　$a=-c-4$，$-21=4c+3$，$b=-3c$

これを解いて　$a=2$，$b=18$，$c=-6$

6 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ の解は -1，2，c である。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=2$，$b=-5$，$c=-3$

解説
-1 と 2 が解であるから

$$-1+a-b-6=0,\ 8+4a+2b-6=0$$

整理すると　$a-b=7$，$2a+b=-1$

これを解いて　$a=2$，$b=-5$

よって，方程式は　$x^3+2x^2-5x-6=0$

この方程式の左辺は $(x+1)(x-2)$ で割り切れるから，左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x-2)(x+3)=0$$

ゆえに　$x=-1$，2，-3　　したがって　$c=-3$

別解　-1，2，c が方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ の解であるから，左辺は $x+1$，$x-2$，$x-c$ を因数にもつ。
よって，次の x についての恒等式が成り立つ。

$$x^3+ax^2+bx-6=(x+1)(x-2)(x-c)$$

右辺を展開して整理すると

$$x^3+ax^2+bx-6=x^3-(c+1)x^2+(c-2)x+2c$$

両辺の係数を比較して

$$a=-c-1,\ b=c-2,\ -6=2c$$

これを解いて　$a=2$，$b=-5$，$c=-3$

7 3 次方程式 $x^3+ax^2+4x+b=0$ が解 $1+i$ をもつとき，実数の係数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=-3$，$b=-2$

解説
(解答 1)　$x=1+i$ が方程式 $x^3+ax^2+4x+b=0$ の解であるから

$$(1+i)^3+a(1+i)^2+4(1+i)+b=0$$

ここで，$(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=-2+2i$，
$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$　であるから

$$-2+2i+a\cdot2i+4(1+i)+b=0$$

i について整理すると　$b+2+2(a+3)i=0$

a，b は実数であるから，$b+2$，$2(a+3)$ は実数である。

よって　$b+2=0$，$2(a+3)=0$

これを解いて　$a=-3$，$b=-2$

(解答 2)　$1+i$ と共役な複素数 $1-i$ も，この方程式の解となる。

よって，x^3+ax^2+4x+b は
$\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$
すなわち x^2-2x+2 で割り切れる。
右の計算において，(余り)$=0$ とすると

$$\begin{array}{r|l}
 & x+(a+2) \\ \hline
x^2-2x+2 & x^3+ax^2\qquad+4x+b \\
 & x^3-2x^2\qquad+2x \\ \hline
 & (a+2)x^2\qquad+2x+b \\
 & (a+2)x^2-2(a+2)x+2(a+2) \\ \hline
 & 2(a+3)x-2(a+2)+b
\end{array}$$

$$2(a+3)=0,\ -2(a+2)+b=0$$

よって　$a=-3$，$b=-2$

(解答 3)　$1+i$ と共役な複素数 $1-i$ も，この方程式の解となる。
3 つ目の解を α とすると，3 次方程式の解と係数の関係から

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-a$，　$(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha+\alpha(1+i)=4$，
$(1+i)(1-i)\alpha=-b$

これを解いて　$\alpha=1$，$a=-3$，$b=-2$

8 a，b は実数とする。4 次方程式 $x^4-x^3+2x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，a，b の値と，他の解を求めよ。

解答　$a=7$，$b=-5$，他の解 $x=1-2i$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

解説
$1+2i$ と共役な複素数 $1-2i$ も，この方程式の解となる。

よって，$x^4-x^3+2x^2+ax+b$ は，

$\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$

すなわち x^2-2x+5 で割り切れる。

右の計算において，(余り)$=0$ とすると

$a-7=0$，$b+5=0$

ゆえに　$a=7$，$b=-5$

また，割り算の商は x^2+x-1 であるから，$x^2+x-1=0$ を解いて

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2+x-1 \\
x^2-2x+5 \,\big) & x^4-x^3+2x^2+ax+b \\
 & x^4-2x^3+5x^2 \\ \hline
 & x^3-3x^2+ax \\
 & x^3-2x^2+5x \\ \hline
 & -x^2+(a-5)x+b \\
 & -x^2+2x-5 \\ \hline
 & (a-7)x+b+5
\end{array}$$

したがって，他の解は　$x=1-2i$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

9 3 次方程式 $x^3+(a-1)x^2+2ax-3a=0$ の 3 つの解のうちのちょうど 2 つが等しいとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=0$，12，$-\dfrac{1}{4}$

解説

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+2ax-3a$ とすると

$f(1)=1+a-1+2a-3a=0$

よって，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつから

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+3a)$

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & a-1 & 2a & -3a & 1 \\
 & 1 & a & 3a & \\ \hline
1 & a & 3a & 0 &
\end{array}$$

ゆえに，方程式は　$(x-1)(x^2+ax+3a)=0$

したがって　$x-1=0$　または　$x^2+ax+3a=0$

この 3 次方程式が 2 重解と他の解をもつのは，次の [1] または [2] の場合である。

[1]　$x^2+ax+3a=0$ が $x\neq1$ の重解をもつ。

判別式を D とすると　$D=0$　かつ　$-\dfrac{a}{2\cdot1}\neq1$

$D=a^2-4\cdot1\cdot3a=a^2-12a=a(a-12)$

よって　$a=0$，12　かつ　$a\neq-2$

ゆえに　$a=0$，12

[2]　$x^2+ax+3a=0$ の解の 1 つが 1 で，他の解が 1 でない。

$1^2+a\cdot1+3a=0$　かつ　$3a\neq1$

よって　$a=-\dfrac{1}{4}$ かつ $a\neq\dfrac{1}{3}$　　ゆえに　$a=-\dfrac{1}{4}$

以上から，求める定数 a の値は　$a=0$，12，$-\dfrac{1}{4}$

10 3 次方程式 $x^3+(a+3)x^2+(3a+2)x+6=\left(x+{}^{ア}\boxed{}\right)\left(x^2+ax+{}^{イ}\boxed{}\right)=0$ は，$a={}^{ウ}\boxed{}$，${}^{エ}\boxed{}$，${}^{オ}\boxed{}$ のとき，重解をもつ。

解答　(ア)　3　　(イ)　2　　(ウ)，(エ)，(オ)　$\dfrac{11}{3}$，$2\sqrt{2}$，$-2\sqrt{2}$

解説

$f(x)=x^3+(a+3)x^2+(3a+2)x+6$ とすると

$f(-3)=-27+9(a+3)-3(3a+2)+6=0$

よって，$f(x)$ は $x+3$ を因数にもつから

$f(x)=(x+3)(x^2+ax+2)$

ゆえに，方程式は　$(x+3)(x^2+ax+2)=0$

したがって　$x+3=0$　または　$x^2+ax+2=0$

よって，重解をもつのは，次の [1] または [2] の場合である。

[1]　2 次方程式 $x^2+ax+2=0$ が $x=-3$ を解にもつ。

このとき　$(-3)^2+a(-3)+2=0$　　ゆえに　$a=\dfrac{11}{3}$

[2]　2 次方程式 $x^2+ax+2=0$ が重解をもつ。

このとき，$x^2+ax+2=0$ の判別式を D とすると　$D=0$

$D=a^2-4\cdot1\cdot2=a^2-8$ から　$a^2=8$

これを解いて　$a=2\sqrt{2}$，$-2\sqrt{2}$

以上から

(ア)　3　　(イ)　2　　(ウ)，(エ)，(オ)　$\dfrac{11}{3}$，$2\sqrt{2}$，$-2\sqrt{2}$

11 3 次方程式 $x^3+ax^2+x+b=0$ が -1 と 2 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

解答　$a=-4$，$b=6$，他の解は 3

解説

-1 が解であるから　$(-1)^3+a(-1)^2+(-1)+b=0$

よって　$a+b=2$　$\cdots\cdots$ ①

2 が解であるから　$2^3+a\cdot2^2+2+b=0$

よって　$4a+b=-10$　$\cdots\cdots$ ②

①，② から　$a=-4$，$b=6$

よって，方程式は　$x^3-4x^2+x+6=0$

この式の左辺は $(x+1)(x-2)$ で割り切れるから，左辺を因数分解すると

$(x+1)(x-2)(x-3)=0$

したがって，他の解は　3

12 4 次方程式 $x^4-3x^3+ax^2+bx-4=0$ が 1 と 2 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

解答　$a=0$，$b=6$，他の解は $\pm\sqrt{2}$

解説

1 が解であるから　$1^4-3\cdot1^3+a\cdot1^2+b\cdot1-4=0$

よって　$a+b=6$　$\cdots\cdots$ ①

2 が解であるから　$2^4-3\cdot2^3+a\cdot2^2+b\cdot2-4=0$

よって　$2a+b=6$　$\cdots\cdots$ ②

①，② から　$a=0$，$b=6$

よって，方程式は　$x^4-3x^3+6x-4=0$

この式の左辺は $(x-1)(x-2)$ で割り切れるから，左辺を因数分解すると

$(x-1)(x-2)(x^2-2)=0$

したがって，他の解は　$\pm\sqrt{2}$

13 3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

解答　$a=7$，$b=13$，他の解は -1，$3-2i$

解説

$3+2i$ が解であるから　$(3+2i)^3-5(3+2i)^2+a(3+2i)+b=0$

整理して　$(3a+b-34)+2(a-7)i=0$

$3a+b-34$，$2(a-7)$ は実数であるから　$3a+b-34=0$，$2(a-7)=0$

これを解いて　$a=7$，$b=13$

このとき，もとの方程式は　$x^3-5x^2+7x+13=0$

左辺を因数分解すると　$(x+1)(x^2-6x+13)=0$

これを解いて　$x=-1$，$3\pm2i$

したがって，他の解は　-1，$3-2i$

別解　方程式の係数は実数であるから，$3+2i$ と共役な複素数 $3-2i$ も解である。

$\cdots\cdots$ (*)

したがって，x^3-5x^2+ax+b は $\{x-(3+2i)\}\{x-(3-2i)\}$ すなわち $x^2-6x+13$ で割り切れる。

この割り算を実行すると，余りが $(a-7)x+b-13$ となることから

$(a-7)x+b-13=0$

これが x についての恒等式であるから　$a-7=0$，$b-13=0$

よって　$a=7$，$b=13$　(以下，略)

参考　問題 **147** で用いる，3 次方程式の解と係数の関係を利用してもよい。

以下はその解法。

[(*) までは同じ]

$x=3\pm2i$ 以外の解を k とすると，解と係数の関係から

$k+(3+2i)+(3-2i)=5$，

$k(3+2i)+k(3-2i)+(3+2i)(3-2i)=a$，

$k(3+2i)(3-2i)=-b$

これを解いて　$a=7$，$b=13$，$k=-1$

したがって，他の解は　$3-2i$，-1

14 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+3a+20=0$ が 2 重解 2 をもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

解答　$a=4$，$b=-28$，他の解は -8

解説

他の解を k とすると，次の x についての恒等式が成り立つ。

$x^3+ax^2+bx+3a+20=(x-2)^2(x-k)$

すなわち　$x^3+ax^2+bx+3a+20=x^3-(k+4)x^2+4(k+1)x-4k$

両辺の係数を比較して　$a=-(k+4)$，$b=4(k+1)$，$3a+20=-4k$

第 1，第 3 式から　$k=-8$，$a=4$

よって，第 2 式から　$b=-28$

したがって　$a=4$，$b=-28$，他の解は -8

15 3 次方程式 $x^3+3x^2+(a-4)x-a=0$ が 2 重解をもつとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=4$，-5

解説

$x^3+3x^2+(a-4)x-a=a(x-1)+x(x^2+3x-4)=a(x-1)+x(x-1)(x+4)$

$=(x-1)(x^2+4x+a)$

よって，方程式は　$(x-1)(x^2+4x+a)=0$　$\cdots\cdots$ ①

ゆえに　$x-1=0$　または　$x^2+4x+a=0$　$\cdots\cdots$ ②

① が 2 重解をもつのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　② が 1 以外の重解をもつとき

② の判別式を D とすると，$D=0$ が成り立つ。

すなわち　$2^2-1\cdot a=0$

よって　$a=4$

このとき，② の重解は $x=-\dfrac{4}{2\cdot1}=-2$ となり，適する。

[2]　② の解の 1 つが 1 で，他の解が 1 でないとき

② が 1 を解にもつから　　$1^2+4\cdot1+a=0$　　　よって　　$a=-5$

このとき，② は　　$(x-1)(x+5)=0$

ゆえに，② の解は $x=1$，-5 となり，適する。

[1]，[2] から　　$a=4$，-5

16 3 次方程式 $x^3-x^2+(a-2)x+a=0$ が 2 重解をもつとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=1$，-3

解説

$$\begin{aligned}x^3-x^2+(a-2)x+a&=(x+1)a+x(x^2-x-2)\\&=(x+1)a+x(x+1)(x-2)\\&=(x+1)(x^2-2x+a)\end{aligned}$$

よって，方程式は　　$(x+1)(x^2-2x+a)=0$

この 3 次方程式が 2 重解をもつのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　$x^2-2x+a=0$ が -1 以外の重解をもつとき

判別式を D とすると，$D=0$ から　　$(-1)^2-1\cdot a=0$

よって　　$a=1$

このとき，重解は $x=-\dfrac{-2}{2\cdot1}=1$ となり，適する。

[2]　$x^2-2x+a=0$ の解の 1 つが -1 で，他の解が -1 でないとき

-1 が解であるから　　$(-1)^2-2\cdot(-1)+a=0$

よって　　$a=-3$

このとき，$x^2-2x+a=0$ は　　$(x+1)(x-3)=0$

ゆえに，解は $x=-1$，3 となり，適する。

[1]，[2] から　　$a=1$，-3