剰余の定理クイズ

1 次の整式を，[ ]内の1次式で割ったときの余りを求めよ。

(1) $3x^2-2x+1$ [$x-1$]　(2) $2x^3-5x^2+3x+1$ [$x+2$]

解答 (1) 2 (2) -41

解説

(1) $P(x)=3x^2-2x+1$ とおくと，$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは

$$P(1)=3\cdot1^2-2\cdot1+1=2$$

(2) $P(x)=2x^3-5x^2+3x+1$ とおくと，$P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りは

$$P(-2)=2\cdot(-2)^3-5\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)+1=-41$$

2 整式 $2x^3-x^2+5$ を，次の1次式で割ったときの余りを求めよ。

(1) $2x+3$　(2) $3x-1$

解答 (1) -4 (2) $\frac{134}{27}$

解説

$P(x)=2x^3-x^2+5$ とおく。

(1) $P(x)$ を $2x+3$ で割ったときの余りは $P\left(-\frac{3}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3-\left(-\frac{3}{2}\right)^2+5=-4$

(2) $P(x)$ を $3x-1$ で割ったときの余りは $P\left(\frac{1}{3}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^2+5=\frac{134}{27}$

3 整式 $P(x)=x^3+ax+2$ を $x-2$ で割ったときの余りが4になるように，定数 a の値を定めよ。

解答 $a=-3$

解説

$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが4になるための必要十分条件は，剰余の定理により

$P(2)=4$

すなわち　$2^3+a\cdot2+2=4$

よって　$2a=-6$

ゆえに　$a=-3$

4 整式 $P(x)=x^3+ax^2-x-a+3$ を $x+3$ で割ったときの余りが -5 になるように，定数 a の値を定めよ。

解答 $a=2$

解説

$P(x)$ を $x+3$ で割ったときの余りが -5 になるための必要十分条件は，剰余の定理により　$P(-3)=-5$

すなわち　$(-3)^3+a\cdot(-3)^2-(-3)-a+3=-5$

よって　$8a-21=-5$　ゆえに　$a=2$

5 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが3，$x+3$ で割ると余りが -7 である。$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答 $2x-1$

解説

$P(x)$ を2次式 $(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$　(a，b は定数)

与えられた条件から，剰余の定理により

$P(2)=3$　かつ　$P(-3)=-7$

よって　$2a+b=3$，　$-3a+b=-7$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$

したがって，求める余りは　$2x-1$

6 整式 $P(x)$ を $x-3$ で割ると余りが -11，$x+2$ で割ると余りが4である。$P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの余りを求めよ。

解答 $-3x-2$

解説

$P(x)$ を2次式 x^2-x-6 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x^2-x-6)Q(x)+ax+b$

すなわち　$P(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$　(a，b は定数)

与えられた条件から，剰余の定理により

$P(3)=-11$　かつ　$P(-2)=4$

よって　$3a+b=-11$，$-2a+b=4$

これを解いて　$a=-3$，$b=-2$

したがって，求める余りは　$-3x-2$

7 整式 $P(x)=2x^3+ax+5$ が $x+1$ で割り切れるように，定数 a の値を定めよ。

解答 $a=3$

解説

$P(x)$ が $x+1$ で割り切れるから　$P(-1)=0$

よって　$-2-a+5=0$　ゆえに　$a=3$

8 整式 $P(x)$ を，$x-2$ で割ると1余り，$x-3$ で割ると2余る。$P(x)$ を x^2-5x+6 で割ったときの余りを求めよ。[20点]

解答 $Q(x)$ を整式，a，b を定数として

$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

とおくことができる。

剰余の定理より　$P(2)=2a+b=1$，$P(3)=3a+b=2$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$

よって，求める余りは　$x-1$

解説

$Q(x)$ を整式，a，b を定数として

$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

とおくことができる。

剰余の定理より　$P(2)=2a+b=1$，$P(3)=3a+b=2$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$

よって，求める余りは　$x-1$

9 3次式 $P(x)=ax^3+2x^2+bx-6$ が $x-1$ で割り切れ，$x-2$ で割ると余りが -2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。[20点]

解答 $P(x)$ が $x-1$ で割り切れることから

$P(1)=a+b-4=0$

$P(x)$ が $x-2$ で割ると余りが -2 であることから

$P(2)=8a+2b+2=-2$

よって　$a+b=4$，$4a+b=-2$

これを解いて　$a=-2$，$b=6$

解説

$P(x)$ が $x-1$ で割り切れることから

$P(1)=a+b-4=0$

$P(x)$ が $x-2$ で割ると余りが -2 であることから

$P(2)=8a+2b+2=-2$

よって　$a+b=4$，$4a+b=-2$

これを解いて　$a=-2$，$b=6$

10 次の整式を，[ ]内の1次式で割ったときの余りを求めよ。

(1) x^3-4x^2+x-7 [$x+2$]　(2) $x^4-2x^3-10x+9$ [$x-3$]

(3) $8x^3-4x^2+5x-2$ [$2x-3$]

解答 (1) -33 (2) 6 (3) $\frac{47}{2}$

解説

(1) $P(x)=x^3-4x^2+x-7$ とする。

求める余りは，剰余の定理により

$$P(-2)=(-2)^3-4\cdot(-2)^2+(-2)-7=-33$$

(2) $P(x)=x^4-2x^3-10x+9$ とする。

求める余りは，剰余の定理により

$$P(3)=3^4-2\cdot3^3-10\cdot3+9=6$$

(3) $P(x)=8x^3-4x^2+5x-2$ とする。

求める余りは，剰余の定理により

$$P\left(\frac{3}{2}\right)=8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+5\cdot\frac{3}{2}-2=27-9+\frac{15}{2}-2=\frac{47}{2}$$

11 次の(1)，(2)がそれぞれ成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $P(x)=x^3+ax^2+bx-6$ は $x+1$ で割り切れ，$x-2$ で割ると6余る。

(2) $P(x)=x^3+ax^2+x+b$ が x^2-3x+2 で割り切れる。

解答 (1) $a=3$，$b=-4$　(2) $a=-\frac{8}{3}$，$b=\frac{2}{3}$

解説

(1) $P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから　$P(-1)=0$

よって　$-1+a-b-6=0$　ゆえに　$a-b=7$ …… ①

$P(x)$ を $x-2$ で割ると6余るから　$P(2)=6$

よって　$8+4a+2b-6=6$　ゆえに　$2a+b=2$ …… ②

①，② を連立して解くと　$a=3$，$b=-4$

(2) $P(x)$ は x^2-3x+2 すなわち $(x-1)(x-2)$ で割り切れるから

$P(1)=0$　かつ　$P(2)=0$

よって　$1+a+1+b=0$，　$8+4a+2+b=0$

すなわち　$a+b=-2$，　$4a+b=-10$

この連立方程式を解いて　$a=-\frac{8}{3}$，$b=\frac{2}{3}$

12 (1) $2x^3+3ax^2-a^2+6$ が $x+1$ で割り切れるように，定数 a の値を定めよ。

また，このとき，$2x^3+3ax^2-a^2+6$ を因数分解せよ。

(2) $2x^3+ax^2+bx-3$ は $x-3$ で割り切れ，$x+2$ で割ると余りが -55 であるという。このとき，定数 a，b の値を求めよ。

(3) x^3+ax^2-5x+b が x^2+x-6 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答 (1) $a=-1$ のとき　$(x+1)(2x^2-5x+5)$，$a=4$ のとき　$2(x+1)(x^2+5x-5)$

(2) $a=-7$，$b=4$　(3) $a=2$，$b=-6$

(解説)

(1)　$P(x)=2x^3+3ax^2-a^2+6$ とする。

$P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから　$P(-1)=0$

よって　$-2+3a-a^2+6=0$

整理して　$a^2-3a-4=0$　　ゆえに　$(a+1)(a-4)=0$

これを解いて　$a=-1,\ 4$

$a=-1$ のとき　$P(x)=2x^3-3x^2+5=(x+1)(2x^2-5x+5)$

$a=4$　のとき　$P(x)=2x^3+12x^2-10=2(x^3+6x^2-5)$

$=2(x+1)(x^2+5x-5)$

2	−3	0	5	−1
	−2	5	−5	
2	−5	5	0	

1	6	0	−5	−1
	−1	−5	5	
1	5	−5	0	

(2)　$P(x)=2x^3+ax^2+bx-3$ とする。

$P(x)$ は $x-3$ で割り切れるから　$P(3)=0$

よって　$54+9a+3b-3=0$

ゆえに　$3a+b=-17$　…… ①

$P(x)$ を $x+2$ で割ると -55 余るから　$P(-2)=-55$

よって　$-16+4a-2b-3=-55$

ゆえに　$2a-b=-18$　…… ②

①，② を連立して解くと　$a=-7,\ b=4$

(3)　$P(x)=x^3+ax^2-5x+b$ とする。

$P(x)$ は x^2+x-6 すなわち $(x-2)(x+3)$ で割り切れるから

$P(2)=0$　かつ　$P(-3)=0$

よって　$8+4a-10+b=0,\quad -27+9a+15+b=0$

すなわち　$4a+b=2,\quad 9a+b=12$

この連立方程式を解いて　$a=2,\ b=-6$

13 (1)　多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りは 5，$x-2$ で割ると余りは 7 となる。このとき，$P(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りを求めよ。

(2)　多項式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りが $7x$，$x-3$ で割ったときの余りが 1 のとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答　(1)　$2x+3$　　(2)　$-2x^2+5x+4$

(解説)

(1)　$P(x)$ を x^2-3x+2 すなわち $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$　…… ①

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 5 であるから

$P(1)=5$

よって，① により　$a+b=5$　…… ②

$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが 7 であるから

$P(2)=7$

よって，① により　$2a+b=7$　…… ③

②，③ を連立して解くと　$a=2,\ b=3$

ゆえに，求める余りは　$2x+3$

(2)　$P(x)$ を $(x-1)(x+2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$　…… ①

$P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りが 1 であるから

$P(3)=1$

また，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りが $7x$ であるから，このときの商を $Q_1(x)$ とすると

$P(x)=(x-1)(x+2)Q_1(x)+7x$

ゆえに　$P(1)=7\cdot1=7,\quad P(-2)=7\cdot(-2)=-14$

① において，$P(3)=1,\ P(1)=7,\ P(-2)=-14$ であるから

$9a+3b+c=1,$

$a+b+c=7,$

$4a-2b+c=-14$

この連立方程式を解くと　$a=-2,\ b=5,\ c=4$

よって，求める余りは　$-2x^2+5x+4$

別解　$P(x)$ を $(x-1)(x+2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$　…… ①

$(x-1)(x+2)(x-3)Q(x)$ は $(x-1)(x+2)$ で割り切れる。

ゆえに，

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りは，ax^2+bx+c を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りに等しい。

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りは $7x$ であるから

$ax^2+bx+c=a(x-1)(x+2)+7x$

よって，等式 ① は次のように表される。

$P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)Q(x)+a(x-1)(x+2)+7x$

したがって

$P(3)=a(3-1)(3+2)+7\cdot3=10a+21$

$P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りが 1 であるから

$P(3)=1$

ゆえに　$10a+21=1$

よって　$a=-2$

したがって，求める余りは

$-2(x-1)(x+2)+7x=-2(x^2+x-2)+7x$

$=-2x^2+5x+4$

14 (1)　整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると 3 余り，$2x+1$ で割ると 4 余る。$P(x)$ を $(x-1)(2x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　多項式 $P(x)$ を x^2-4x+3 で割ると $-x+10$ 余り，x^2-5x+6 で割ると $2x+1$ 余る。$P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答　(1)　$-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}$　　(2)　$3x^2-13x+19$

(解説)

(1)　$P(x)$ を $(x-1)(2x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)(2x+1)Q(x)+ax+b$　…… ①

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 3 であるから　$P(1)=3$

よって　$a+b=3$　…… ②

また，$P(x)$ を $2x+1$ で割ったときの余りが 4 であるから　$P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4$

よって　$-\dfrac{a}{2}+b=4$　…… ③

②，③ を連立して解くと　$a=-\dfrac{2}{3},\ b=\dfrac{11}{3}$

したがって，求める余りは　$-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}$

(2)　$P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$　…… ①

$P(x)$ を x^2-4x+3 すなわち $(x-1)(x-3)$ で割ったときの余りが $-x+10$ であるから，このときの商を $Q_1(x)$ とすると

$P(x)=(x-1)(x-3)Q_1(x)-x+10$　…… ②

$P(x)$ を x^2-5x+6 すなわち $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りが $2x+1$ であるから，このときの商を $Q_2(x)$ とすると

$P(x)=(x-2)(x-3)Q_2(x)+2x+1$　…… ③

②，③ から　$P(1)=9,\ P(2)=5,\ P(3)=7$

よって，① により　$a+b+c=9,\quad 4a+2b+c=5,\quad 9a+3b+c=7$

これを解くと　$a=3,\ b=-13,\ c=19$

したがって，求める余りは　$3x^2-13x+19$

15 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると -1 余り，$x+1$ で割ると 3 余る。

(1)　$P(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ。

(2)　$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが定数であるとき，$P(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答　(1)　$-2x+1$　　(2)　x^2-2x

(解説)

(1)　$P(x)$ を x^2-1 すなわち $(x+1)(x-1)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x+1)(x-1)Q_1(x)+ax+b$　…… ①

条件から　$P(1)=-1,\ P(-1)=3$

① から　$P(1)=a+b,\ P(-1)=-a+b$

よって　$a+b=-1,\ -a+b=3$

この連立方程式を解いて　$a=-2,\ b=1$

したがって，求める余りは　$-2x+1$

(2)　$P(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$，余りを px^2+qx+r とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)^2(x+1)Q_2(x)+px^2+qx+r$　…… ②

ここで，$(x-1)^2(x+1)Q_2(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるから，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは，px^2+qx+r を $(x-1)^2$ で割ったときの余りに等しい。

$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが定数であるとき，その定数を c とすると

$px^2+qx+r=p(x-1)^2+c$

② から　$P(x)=(x-1)^2(x+1)Q_2(x)+p(x-1)^2+c$　…… ③

条件から　$P(1)=-1,\ P(-1)=3$

③ から　$P(1)=c,\ P(-1)=4p+c$

ゆえに　$c=-1,\quad 4p+c=3$　　よって　$p=1$

したがって，求める余りは　$1\cdot(x-1)^2-1$　すなわち　x^2-2x

16 次の整式を，[　] 内の 1 次式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　x^3-2x+1　[$x+2$]　　(2)　x^3+2x^2-2x-1　[$x-1$]

(3)　$2x^3-x^2-8x+1$　[$2x+3$]　　(4)　$3x^4-8x^3-5x^2+12$　[$3x-2$]

解答　(1)　-3　　(2)　0　　(3)　4　　(4)　8

(解説)

(1)　$P(x)=x^3-2x+1$ とする。

求める余りは　$P(-2)=-8+4+1=-3$

(2)　$P(x)=x^3+2x^2-2x-1$ とする。

求める余りは　$P(1)=1+2-2-1=0$

(3)　$P(x)=2x^3-x^2-8x+1$ とする。

求める余りは　$P\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{4}-\frac{9}{4}+12+1=4$

(4)　$P(x)=3x^4-8x^3-5x^2+12$ とする。

求める余りは　$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{27}-\frac{64}{27}-\frac{20}{9}+12=8$

17 次の条件を満たすように，定数 a の値を定めよ。

(1)　x^3+ax^2+3x+1 を $x+3$ で割ると 1 余る。

(2)　ax^3-2x^2+ax-1 を $x+2$ で割ると 11 余る。

解答　(1)　$a=4$　(2)　$a=-2$

解説

(1)　$P(x)=x^3+ax^2+3x+1$ とする。

$P(x)$ を $x+3$ で割ると 1 余るから　$P(-3)=1$

よって　$-27+9a-9+1=1$

ゆえに　$a=4$

(2)　$P(x)=ax^3-2x^2+ax-1$ とする。

$P(x)$ を $x+2$ で割ると 11 余るから　$P(-2)=11$

よって　$-8a-8-2a-1=11$

ゆえに　$a=-2$

18 次のことが成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1)　x^2-2x+a が $x-1$ で割り切れる。

(2)　$x^3-x^2-2a^2x-a+1$ が $x+1$ で割り切れる。

(3)　ax^3+bx^2-7x+6 が $x+2$ で割り切れ，$x-3$ で割ると 30 余る。

解答　(1)　$a=1$　(2)　$a=1,\ -\frac{1}{2}$　(3)　$a=2,\ b=-1$

解説

(1)　$P(x)=x^2-2x+a$ とする。

$P(x)$ が $x-1$ で割り切れるから　$P(1)=0$

よって　$1-2+a=0$　ゆえに　$a=1$

(2)　$P(x)=x^3-x^2-2a^2x-a+1$ とする。

$P(x)$ が $x+1$ で割り切れるから　$P(-1)=0$

よって　$-1-1+2a^2-a+1=0$

すなわち　$2a^2-a-1=0$

左辺を因数分解すると　$(a-1)(2a+1)=0$

ゆえに　$a=1,\ -\frac{1}{2}$

(3)　$P(x)=ax^3+bx^2-7x+6$ とする。

$P(x)$ が $x+2$ で割り切れるから　$P(-2)=0$

よって　$-8a+4b+14+6=0$

ゆえに　$-2a+b=-5$　…… ①

また，$P(x)$ を $x-3$ で割ると 30 余るから　$P(3)=30$

よって　$27a+9b-21+6=30$

ゆえに　$3a+b=5$　…… ②

①，② から　$a=2$，$b=-1$

19 $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする。$P(x)$ は x^2-1 で割り切れ，また，$P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 3 である。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=-1$，$b=-1$，$c=1$

解説

$P(x)$ が x^2-1 すなわち $(x+1)(x-1)$ で割り切れるから，$P(x)$ は $x+1$，$x-1$ のどちらでも割り切れる。

よって　$P(-1)=0$，$P(1)=0$

$P(-1)=0$ から　$-1+a-b+c=0$　よって　$a-b+c=1$　…… ①

$P(1)=0$ から　$1+a+b+c=0$　よって　$a+b+c=-1$　…… ②

また，$P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 3 であるから　$P(2)=3$

よって　$8+4a+2b+c=3$

ゆえに　$4a+2b+c=-5$ …… ③

②−① から　$2b=-2$　ゆえに　$b=-1$

このとき　① から　$a+c=0$，③ から　$4a+c=-3$

これを解いて　$a=-1$，$c=1$

以上から　$a=-1$，$b=-1$，$c=1$

20 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ると余りが $3x-1$ である。$P(x)$ を $x-1$ および $x+2$ で割ったときの余りを，それぞれ求めよ。

解答　順に 2，-7

解説

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，条件から

$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+3x-1$

よって　$P(1)=3-1=2$

ゆえに，$x-1$ で割ったときの余りは　2

また　$P(-2)=-6-1=-7$

ゆえに，$x+2$ で割ったときの余りは　-7

21 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 5，$x-3$ で割ると余りが 9 である。$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答　$4x-3$

解説

$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$（a，b は定数）とすると

$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 5，$x-3$ で割ると余りが 9 であるから

$P(2)=5$，$P(3)=9$

よって　$2a+b=5$，$3a+b=9$

これを解いて　$a=4$，$b=-3$

ゆえに，求める余りは　$4x-3$

22 整式 $P(x)$ を x^2-3x+2 で割ると余りが $-x+4$，x^2-4x+3 で割ると余りが $3x$ である。$P(x)$ を x^2-5x+6 で割ったときの余りを求めよ。

解答　$7x-12$

解説

$P(x)$ を x^2-5x+6 すなわち $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$（a，b は定数）とすると　$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$　…… ①

$P(x)$ を x^2-3x+2，x^2-4x+3 すなわち $(x-1)(x-2)$，$(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を，それぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とする。

条件から　$P(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)-x+4$　…… ②

$P(x)=(x-1)(x-3)Q_2(x)+3x$　…… ③

② から　$P(2)=-2+4=2$

③ から　$P(3)=3\cdot3=9$

一方，① から　$P(2)=2a+b$，$P(3)=3a+b$

したがって　$2a+b=2$，$3a+b=9$

これを解いて　$a=7$，$b=-12$

ゆえに，求める余りは　$7x-12$

23 $x^{51}+1$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ。

解答　$x+1$

解説

$x^{51}+1$ を x^2-1 すなわち $(x+1)(x-1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$（a，b は定数）とすると　$x^{51}+1=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$　…… ①

① に $x=-1$ を代入すると　$-1+1=-a+b$

よって　$-a+b=0$　…… ②

① に $x=1$ を代入すると　$1+1=a+b$

よって　$a+b=2$　…… ③

②，③ から　$a=1$，$b=1$

ゆえに，求める余りは　$x+1$