因数定理クイズ

1 次の式を，実数，複素数の各範囲で因数分解せよ。[各 20 点]

(1) x^3+x^2-2 (2) x^4-9

解答 (1) $P(x)=x^3+x^2-2$ とおくと

$P(1)=1^3+1^2-2=0$

よって $P(x)=(x-1)(x^2+2x+2)$

ここで，$x^2+2x+2=0$ を解くと $x=-1\pm i$

よって $P(x)=(x-1)(x+1-i)(x+1+i)$

したがって 実数の範囲：$(x-1)(x^2+2x+2)$

複素数の範囲：$(x-1)(x+1-i)(x+1+i)$

(2) $x^4-9=(x^2-3)(x^2+3)=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+3)$

ここで，$x^2+3=0$ を解くと，$x^2=-3$ より $x=\pm\sqrt{3}\,i$

よって $x^4-9=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}\,i)(x-\sqrt{3}\,i)$

したがって 実数の範囲：$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+3)$

複素数の範囲：$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}\,i)(x-\sqrt{3}\,i)$

解説

(1) $P(x)=x^3+x^2-2$ とおくと

$P(1)=1^3+1^2-2=0$

よって $P(x)=(x-1)(x^2+2x+2)$

ここで，$x^2+2x+2=0$ を解くと $x=-1\pm i$

よって $P(x)=(x-1)(x+1-i)(x+1+i)$

したがって 実数の範囲：$(x-1)(x^2+2x+2)$

複素数の範囲：$(x-1)(x+1-i)(x+1+i)$

(2) $x^4-9=(x^2-3)(x^2+3)=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+3)$

ここで，$x^2+3=0$ を解くと，$x^2=-3$ より $x=\pm\sqrt{3}\,i$

よって $x^4-9=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}\,i)(x-\sqrt{3}\,i)$

したがって 実数の範囲：$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+3)$

複素数の範囲：$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}\,i)(x-\sqrt{3}\,i)$

2 次の式を，(ア) 有理数 (イ) 実数 (ウ) 複素数 の各範囲で因数分解せよ。

(1) x^4-3x^2+2 (2) $6x^4-7x^2-3$ (3) x^4+4

解答 (1) (ア) $(x+1)(x-1)(x^2-2)$

(イ)，(ウ) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(2) (ア) $(2x^2-3)(3x^2+1)$

(イ) $(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3})(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3})(3x^2+1)$

(ウ) $(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3})(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3})(\sqrt{3}\,x+i)(\sqrt{3}\,x-i)$

(3) (ア)，(イ) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(ウ) $(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)$

解説

(1) $x^4-3x^2+2=(x^2-1)(x^2-2)=(x+1)(x-1)(x^2-2)=(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(ア) $(x+1)(x-1)(x^2-2)$

(イ)，(ウ) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(2) $6x^4-7x^2-3=(2x^2-3)(3x^2+1)=(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3})(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3})(3x^2+1)$

$=(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3})(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3})(\sqrt{3}\,x+i)(\sqrt{3}\,x-i)$

(ア) $(2x^2-3)(3x^2+1)$

(イ) $(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3})(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3})(3x^2+1)$

(ウ) $(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3})(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3})(\sqrt{3}\,x+i)(\sqrt{3}\,x-i)$

(3) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

$x^2+2x+2=0$ を解くと $x=-1\pm i$

$x^2-2x+2=0$ を解くと $x=1\pm i$

したがって 与式$=\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}\times\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$

$=(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)$

(ア)，(イ) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(ウ) $(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)$

3 次の式を，(ア) 有理数 (イ) 実数 (ウ) 複素数 の各範囲で因数分解せよ。

(1) x^4-6x^2+5 (2) $2x^4-x^2-6$ (3) x^4+4

解答 (1) (ア) $(x+1)(x-1)(x^2-5)$

(イ)，(ウ) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

(2) (ア) $(2x^2+3)(x^2-2)$ (イ) $(2x^2+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(ウ) $2\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(3) (ア)，(イ) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(ウ) $(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)$

解説

(1) $x^4-6x^2+5=(x^2)^2-6x^2+5=(x^2-1)(x^2-5)=(x+1)(x-1)(x^2-5)$

$=(x+1)(x-1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

(ア) $(x+1)(x-1)(x^2-5)$

(イ)，(ウ) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

(2) $2x^4-x^2-6=2(x^2)^2-x^2-6=(2x^2+3)(x^2-2)$

$=(2x^2+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$2x^2+3=0$ を解くと $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$

よって (与式)$=2\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(ア) $(2x^2+3)(x^2-2)$ (イ) $(2x^2+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(ウ) $2\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(3) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

$x^2+2x+2=0$ を解くと $x=-1\pm i$

$x^2-2x+2=0$ を解くと $x=1\pm i$

したがって (与式)$=\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$

$=(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)$

(ア)，(イ) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(ウ) $(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)$

4 次の 4 次式を，(ア) 有理数 (イ) 実数 (ウ) 複素数 の各範囲で因数分解せよ。

(1) x^4+x^2-12 (2) $2x^4+x^2-1$

解答 (1) (ア) $(x^2-3)(x^2+4)$ (イ) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+4)$

(ウ) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

(2) (ア) $(2x^2-1)(x^2+1)$ (イ) $2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x^2+1)$

(ウ) $2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+i)(x-i)$

解説

(1) (ア) $x^4+x^2-12=(x^2-3)(x^2+4)$

(イ) $x^2-3=0$ の解は，$x=\pm\sqrt{3}$ であるから $x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

ゆえに $x^4+x^2-12=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+4)$

(ウ) $x^2+4=0$ の解は，$x=\pm 2i$ であるから $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$

ゆえに $x^4+x^2-12=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

(2) (ア) $2x^4+x^2-1=(2x^2-1)(x^2+1)$

(イ) $2x^2-1=0$ の解は，$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから $2x^2-1=2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ゆえに $2x^4+x^2-1=2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x^2+1)$

(ウ) $x^2+1=0$ の解は，$x=\pm i$ であるから $x^2+1=(x+i)(x-i)$

ゆえに $2x^4+x^2-1=2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+i)(x-i)$

5 4 次式 x^4+7x^2-18 を次の各範囲で因数分解せよ。

(ア) 有理数 (イ) 実数 (ウ) 複素数

解答 (ア) $(x^2-2)(x^2+9)$

(イ) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+9)$

(ウ) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3i)(x-3i)$

解説

$x^4+7x^2-18=(x^2-2)(x^2+9)$

$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+9)$

$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3i)(x-3i)$

(ア) $(x^2-2)(x^2+9)$

(イ) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+9)$

(ウ) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3i)(x-3i)$

6 次の式を，(ア) 有理数 (イ) 実数 (ウ) 複素数 の各範囲で因数分解せよ。

(1) x^4-5x^2+6 (2) $3x^4+x^2-2$

解答 (1) (ア) $(x^2-2)(x^2-3)$

(イ)，(ウ) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

(2) (ア) $(x^2+1)(3x^2-2)$

(イ) $(x^2+1)(\sqrt{3}\,x+\sqrt{2})(\sqrt{3}\,x-\sqrt{2})$

(ウ) $(x+i)(x-i)(\sqrt{3}\,x+\sqrt{2})(\sqrt{3}\,x-\sqrt{2})$

解説

(1) $x^4-5x^2+6=(x^2)^2-5x^2+6=(x^2-2)(x^2-3)$

$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

したがって，因数分解は

(ア) $(x^2-2)(x^2-3)$

(イ) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

(ウ) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

(2) $3x^4+x^2-2=3(x^2)^2+x^2-2=(x^2+1)(3x^2-2)$

$=(x^2+1)(\sqrt{3}\,x+\sqrt{2})(\sqrt{3}\,x-\sqrt{2})$

$=(x+i)(x-i)(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$

したがって，因数分解は

（ア） $(x^2+1)(3x^2-2)$

（イ） $(x^2+1)(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$

（ウ） $(x+i)(x-i)(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$

7 次の２次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $15x^2-7x-2$　　(2) x^2+2x+3

解答 (1) $(3x-2)(5x+1)$　　(2) $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

解説

(1) $15x^2-7x-2=0$ の解は

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot15\cdot(-2)}}{2\cdot15}=\frac{7\pm13}{30}$$

すなわち　$x=\frac{2}{3},\ -\frac{1}{5}$

よって　$15x^2-7x-2=15\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)$

$=(3x-2)(5x+1)$　答

(2) $x^2+2x+3=0$ の解は　$x=-1\pm\sqrt{2}i$

よって　$x^2+2x+3=\{x-(-1+\sqrt{2}i)\}\{x-(-1-\sqrt{2}i)\}$

$=(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$　答

8 次の２次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $12x^2+x-6$　　(2) x^2+4x+1　　(3) $4x^2-4x+3$

解答 (1) $(3x-2)(4x+3)$　　(2) $(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$

(3) $(2x-1-\sqrt{2}i)(2x-1+\sqrt{2}i)$

解説

(1) $12x^2+x-6=0$ の解は

$x=\frac{2}{3},\ -\frac{3}{4}$

よって　$12x^2+x-6=12\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

$=(3x-2)(4x+3)$

(2) $x^2+4x+1=0$ の解は

$x=-2\pm\sqrt{3}$

よって　$x^2+4x+1=\{x-(-2+\sqrt{3})\}\{x-(-2-\sqrt{3})\}$

$=(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$

(3) $4x^2-4x+3=0$ の解は

$x=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{2}$

よって　$4x^2-4x+3=4\left(x-\frac{1+\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right)$

$=(2x-1-\sqrt{2}i)(2x-1+\sqrt{2}i)$

9 x^4+x^2-6 を，係数の範囲が次の場合について因数分解せよ。

(1) 有理数　　(2) 実数　　(3) 複素数

解答 (1) $(x^2-2)(x^2+3)$　　(2) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+3)$

(3) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$

解説

$x^4+x^2-6=(x^2-2)(x^2+3)$

$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+3)$

$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$

答 (1) $(x^2-2)(x^2+3)$

(2) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+3)$

(3) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$

10 次の２次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $12x^2+19x-18$　　(2) x^2+4x+5

(3) x^2-4x-2　　(4) x^2-3x+1

解答 (1) $(3x-2)(4x+9)$　　(2) $(x+2-i)(x+2+i)$

(3) $(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})$　　(4) $\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

解説

(1) ２次方程式 $12x^2+19x-18=0$ の解は

$$x=\frac{-19\pm\sqrt{19^2-4\cdot12\cdot(-18)}}{2\cdot12}=\frac{-19\pm35}{24}$$

すなわち　$x=\frac{2}{3},\ -\frac{9}{4}$

よって　$12x^2+19x-18=12\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{9}{4}\right)=(3x-2)(4x+9)$

(2) ２次方程式 $x^2+4x+5=0$ の解は　$x=-2\pm i$

よって　$x^2+4x+5=\{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\}=(x+2-i)(x+2+i)$

(3) ２次方程式 $x^2-4x-2=0$ の解は　$x=2\pm\sqrt{6}$

よって　$x^2-4x-2=\{x-(2+\sqrt{6})\}\{x-(2-\sqrt{6})\}=(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})$

(4) ２次方程式 $x^2-3x+1=0$ の解は　$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

よって　$x^2-3x+1=\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

11 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-7x+6　　(2) $2x^3-7x^2+9$

(3) $x^3+5x^2-2x-24$　　(4) $2x^3-3x^2-11x+6$

解答 (1) $(x-1)(x-2)(x+3)$　　(2) $(x+1)(x-3)(2x-3)$

(3) $(x-2)(x+3)(x+4)$　　(4) $(x+2)(x-3)(2x-1)$

解説

(1) $P(x)=x^3-7x+6$ とすると

$P(1)=1^3-7\cdot1+6=0$

ゆえに，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

したがって

$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$

$$\begin{array}{rl}
 & x^2+x-6 \\
x-1 \,\big) & x^3 \qquad\ -7x+6 \\
 & \underline{x^3-x^2} \\
 & \quad x^2-7x \\
 & \quad \underline{x^2-\ \ x} \\
 & \quad\ -6x+6 \\
 & \quad\ \underline{-6x+6} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

(2) $P(x)=2x^3-7x^2+9$ とすると

$P(-1)=2(-1)^3-7(-1)^2+9$

$=0$

ゆえに，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$P(x)=(x+1)(2x^2-9x+9)$

したがって

$2x^3-7x^2+9=(x+1)(x-3)(2x-3)$

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^2-9x+9 \\
x+1 \,\big) & 2x^3-7x^2 \qquad +9 \\
 & \underline{2x^3+2x^2} \\
 & \quad -9x^2 \\
 & \quad \underline{-9x^2-9x} \\
 & \qquad\quad 9x+9 \\
 & \qquad\quad \underline{9x+9} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

(3) $P(x)=x^3+5x^2-2x-24$ とすると

$P(2)=2^3+5\cdot2^2-2\cdot2-24$

$=0$

ゆえに，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

右の割り算から

$P(x)=(x-2)(x^2+7x+12)$

したがって

$x^3+5x^2-2x-24=(x-2)(x+3)(x+4)$

$$\begin{array}{rl}
 & x^2+7x+12 \\
x-2 \,\big) & x^3+5x^2-\ 2x-24 \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & \quad 7x^2-\ 2x \\
 & \quad \underline{7x^2-14x} \\
 & \qquad\quad 12x-24 \\
 & \qquad\quad \underline{12x-24} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

(4) $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ とすると

$P(-2)=2(-2)^3-3(-2)^2-11(-2)+6$

$=0$

ゆえに，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

右の割り算から

$P(x)=(x+2)(2x^2-7x+3)$

したがって

$2x^3-3x^2-11x+6=(x+2)(x-3)(2x-1)$

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^2-7x+3 \\
x+2 \,\big) & 2x^3-3x^2-11x+6 \\
 & \underline{2x^3+4x^2} \\
 & \quad -7x^2-11x \\
 & \quad \underline{-7x^2-14x} \\
 & \qquad\quad 3x+6 \\
 & \qquad\quad \underline{3x+6} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

12 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^3-5x^2-x+6$　　(2) $2x^4-3x^3-x^2-3x+2$

解答 (1) $(x+1)(x-2)(2x-3)$　　(2) $(x-2)(2x-1)(x^2+x+1)$

解説

(1) $P(x)=2x^3-5x^2-x+6$ とする。

$P(-1)=-2-5+1+6=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x+1)(2x^2-7x+6)$

$=(x+1)(x-2)(2x-3)$

2	−5	−1	6	−1
	−2	7	−6	
2	−7	6	0	

参考 $P(2)=16-20-2+6=0$ であるから

$P(x)=(x-2)(2x^2-x-3)$

$=(x-2)(x+1)(2x-3)$

としてもよい。

(2) $P(x)=2x^4-3x^3-x^2-3x+2$ とする。

$P(2)=32-24-4-6+2=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x-2)(2x^3+x^2+x-1)$

$Q(x)=2x^3+x^2+x-1$ とすると

$Q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=0$

2	−3	−1	−3	2	2
	4	2	2	−2	
2	1	1	−1	0	

よって，$Q(x)$ は $x-\frac{1}{2}$ を因数にもつ。

ゆえに　$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)$

$=(2x-1)(x^2+x+1)$

2	1	1	−1	$\frac{1}{2}$
	1	1	1	
2	2	2	0	

したがって

$P(x)=(x-2)(2x-1)(x^2+x+1)$

13 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-x^2-4　　(2) x^3-7x-6　　(3) x^4-4x+3

(4) $x^4-2x^3-x^2-4x-6$　　(5) $12x^3-5x^2+1$　　(6) $2x^4+x^3-4x^2+1$

解答 (1) $(x-2)(x^2+x+2)$　　(2) $(x+1)(x+2)(x-3)$　　(3) $(x-1)^2(x^2+2x+3)$

(4) $(x+1)(x-3)(x^2+2)$　　(5) $(3x+1)(4x^2-3x+1)$

(6) $(x-1)(2x+1)(x^2+x-1)$

解説

(1) $P(x)=x^3-x^2-4$ とする。

$P(2)=8-4-4=0$ から，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x-2)(x^2+x+2)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 0 & -4 & 2 \\ & 2 & 2 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

(2) $P(x)=x^3-7x-6$ とする。

$P(-1)=-1+7-6=0$ から，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x+2)(x-3)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -7 & -6 & -1 \\ & -1 & 1 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

(3) $P(x)=x^4-4x+3$ とする。

$P(1)=1-4+3=0$ から，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & -3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

よって　$P(x)=(x-1)(x^3+x^2+x-3)$

$Q(x)=x^3+x^2+x-3$ とすると

$Q(1)=1+1+1-3=0$

ゆえに，$Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

よって　$Q(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

したがって　$P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

(4) $P(x)=x^4-2x^3-x^2-4x-6$ とする。

$P(-1)=1+2-1+4-6=0$ から，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x+1)(x^3-3x^2+2x-6)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2 & -1 & -4 & -6 & -1 \\ & -1 & 3 & -2 & 6 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & -6 & 0 & \end{array}$$

$Q(x)=x^3-3x^2+2x-6$ とすると

$Q(3)=27-27+6-6=0$

ゆえに，$Q(x)$ は $x-3$ を因数にもつ。

よって　$Q(x)=(x-3)(x^2+2)$

したがって　$P(x)=(x+1)(x-3)(x^2+2)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 2 & -6 & 3 \\ & 3 & 0 & 6 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

(5) $P(x)=12x^3-5x^2+1$ とする。

$P\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{9}-\frac{5}{9}+1=0$ から，$P(x)$ は $x+\frac{1}{3}$ を因数にもつ。

よって　$P(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)(12x^2-9x+3)$

$=(3x+1)(4x^2-3x+1)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 12 & -5 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ & -4 & 3 & -1 & \\ \hline 12 & -9 & 3 & 0 & \end{array}$$

(6) $P(x)=2x^4+x^3-4x^2+1$ とする。

$P(1)=2+1-4+1=0$ から，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x-1)(2x^3+3x^2-x-1)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 & -1 & -1 & \\ \hline 2 & 3 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$Q(x)=2x^3+3x^2-x-1$ とすると

$Q\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1=0$

ゆえに，$Q(x)$ は $x+\frac{1}{2}$ を因数にもつ。

よって　$Q(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x-2)$

$=(2x+1)(x^2+x-1)$

したがって　$P(x)=(x-1)(2x+1)(x^2+x-1)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 3 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ & -1 & -1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & -2 & 0 & \end{array}$$

14 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+3x^2-x-3　(2) $x^3+4x^2-3x-18$

(3) $x^3-27x-54$　(4) $2x^3+9x^2+13x+6$

解答 (1) $(x-1)(x+1)(x+3)$　(2) $(x-2)(x+3)^2$　(3) $(x+3)^2(x-6)$

(4) $(x+1)(x+2)(2x+3)$

解説

(1) $P(x)=x^3+3x^2-x-3$ とすると

$P(1)=1+3-1-3=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x-1)(x^2+4x+3)$

$=(x-1)(x+1)(x+3)$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4x+3 \\ \hline x-1 & x^3+3x^2-x-3 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & 4x^2-x \\ & 4x^2-4x \\ \hline & 3x-3 \\ & 3x-3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(2) $P(x)=x^3+4x^2-3x-18$ とすると

$P(2)=8+16-6-18=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x-2)(x^2+6x+9)$

$=(x-2)(x+3)^2$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+6x+9 \\ \hline x-2 & x^3+4x^2-3x-18 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & 6x^2-3x \\ & 6x^2-12x \\ \hline & 9x-18 \\ & 9x-18 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(3) $P(x)=x^3-27x-54$ とすると

$P(-3)=-27+81-54=0$

よって，$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x+3)(x^2-3x-18)$

$=(x+3)^2(x-6)$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-3x-18 \\ \hline x+3 & x^3-27x-54 \\ & x^3+3x^2 \\ \hline & -3x^2-27x \\ & -3x^2-9x \\ \hline & -18x-54 \\ & -18x-54 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(4) $P(x)=2x^3+9x^2+13x+6$ とすると

$P(-1)=-2+9-13+6=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x+1)(2x^2+7x+6)$

$=(x+1)(x+2)(2x+3)$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+7x+6 \\ \hline x+1 & 2x^3+9x^2+13x+6 \\ & 2x^3+2x^2 \\ \hline & 7x^2+13x \\ & 7x^2+7x \\ \hline & 6x+6 \\ & 6x+6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

15 次の式を有理数の範囲で因数分解せよ。

(1) $4x^3+x+1$　(2) $2x^3-x^2+9$　(3) $3x^3+8x^2-1$

解答 (1) $(2x+1)(2x^2-x+1)$　(2) $(2x+3)(x^2-2x+3)$　(3) $(3x-1)(x^2+3x+1)$

解説

(1) $P(x)=4x^3+x+1$ とすると　$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$

よって，$P(x)$ は $2x+1$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(2x+1)(2x^2-x+1)$

(2) $P(x)=2x^3-x^2+9$ とすると　$P\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{4}-\frac{9}{4}+9=0$

よって，$P(x)$は $2x+3$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(2x+3)(x^2-2x+3)$

(3) $P(x)=3x^3+8x^2-1$ とすると　$P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}-1=0$

よって，$P(x)$ は $3x-1$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(3x-1)(x^2+3x+1)$

16 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$　(2) $x^4+4x^3-x^2-16x-12$

解答 (1) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$　(2) $(x+1)(x-2)(x+2)(x+3)$

解説

(1) $P(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$ とすると　$P(1)=1+5+5-5-6=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

したがって　$P(x)=(x-1)(x^3+6x^2+11x+6)$

ここで，$Q(x)=x^3+6x^2+11x+6$ とすると　$Q(-1)=-1+6-11+6=0$

よって，$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

したがって　$Q(x)=(x+1)(x^2+5x+6)$

ゆえに　$P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+5x+6)=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

(2) $P(x)=x^4+4x^3-x^2-16x-12$ とすると　$P(-1)=1-4-1+16-12=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

したがって　$P(x)=(x+1)(x^3+3x^2-4x-12)$

ここで，$Q(x)=x^3+3x^2-4x-12$ とすると　$Q(2)=8+12-8-12=0$

よって，$Q(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

したがって　$Q(x)=(x-2)(x^2+5x+6)$

ゆえに　$P(x)=(x+1)(x-2)(x^2+5x+6)=(x+1)(x-2)(x+2)(x+3)$