解と係数の関係クイズ

1 3次方程式 $x^3-3x^2+x+2=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値を求めよ。

解答　7

解説

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$$

よって　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=3^2-2\cdot1=7$

2 3次方程式 $x^3+3x^2+4=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

解答　(1)　9　　(2)　-6

解説

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=-4$$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(-3)^2-2\cdot0=9$

(2)　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-4+0+(-3)+1=-6$

別解　3次方程式 $x^3+3x^2+4=0$ の解が α，β，γ であるから

$x^3+3x^2+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

よって　$(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)=-(x^3+3x^2+4)$

$x=-1$ を代入して

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=-\{(-1)^3+3(-1)^2+4\}=-6$

3 2次方程式 $x^2-4x+5=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　(2)　$\alpha^3+\beta^3$

解答　(1)　6　　(2)　4

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=5$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=4^2-2\cdot5=6$

(2)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=4^3-3\cdot5\cdot4=4$

4 2次方程式 $x^2+3x-1=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　(2)　$\alpha^3+\beta^3$　　(3)　$(\alpha-\beta)^2$

解答　(1)　11　　(2)　-36　　(3)　13

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-3$，$\alpha\beta=-1$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2(-1)=11$

(2)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-3)^3-3(-1)(-3)=-36$

(3)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-3)^2-4(-1)=13$

5 2次方程式 $x^2+3x+m=0$ において，1つの解が他の解の2倍であるとき，定数 m の値と2つの解を求めよ。

解答　$m=2$，2つの解は -1，-2

解説

2つの解は，α，2α と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+2\alpha=-3$，$\alpha\cdot2\alpha=m$

すなわち　$3\alpha=-3$，　$2\alpha^2=m$

よって　$\alpha=-1$

このとき　$m=2\alpha^2=2(-1)^2=2$

また，2つの解は　$\alpha=-1$，$2\alpha=2(-1)=-2$

答　$m=2$，2つの解は -1，-2

6 2次方程式 $x^2+5x+m=0$ の2つの解が次の条件を満たすとき，定数 m の値と2つの解を，それぞれ求めよ。

(1)　1つの解が他の解の4倍である。　　(2)　2つの解の差が1である。

解答　(1)　$m=4$，2つの解は -1，-4　　(2)　$m=6$，2つの解は -3，-2

解説

(1)　2つの解は，α，4α と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+4\alpha=-5$，$\alpha\cdot4\alpha=m$

すなわち　$5\alpha=-5$，$4\alpha^2=m$

よって　$\alpha=-1$

このとき　$m=4\alpha^2=4(-1)^2=4$

また，2つの解は　$\alpha=-1$，$4\alpha=4(-1)=-4$

したがって　$m=4$，2つの解は -1，-4

(2)　2つの解は，α，$\alpha+1$ と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+(\alpha+1)=-5$，$\alpha(\alpha+1)=m$

すなわち　$2\alpha+1=-5$，$\alpha(\alpha+1)=m$

よって　$\alpha=-3$

このとき　$m=\alpha(\alpha+1)=-3(-3+1)=6$

また，2つの解は　$\alpha=-3$，$\alpha+1=-3+1=-2$

したがって　$m=6$，2つの解は -3，-2

7 2次方程式 $2x^2+4x+3=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　(2)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(3)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

解答　(1)　1　　(2)　-3　　(3)　$\dfrac{2}{3}$

解説

解と係数の関係により　　$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{2}=-2$，$\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot\dfrac{3}{2}=1$

(2)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}\cdot(-2)=-3$

(3)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

8 3次方程式 $x^3+2x^2+3x+4=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値を求めよ。

解答　-2

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta+\gamma=-2$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

よって　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2\cdot3=-2$

9 3次方程式 $x^3-3x^2+x+2=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

解答　(1)　7　　(2)　3

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta+\gamma=-(-3)=3$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$，$\alpha\beta\gamma=-2$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot1=7$

(2)　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-2+1+3+1=3$

10 $x^3-2x+3=0$ の3つの解を α，β，γ とする。次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$

(3)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　(4)　$\dfrac{1}{(1-\beta)(1-\gamma)}+\dfrac{1}{(1-\gamma)(1-\alpha)}+\dfrac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}$

解答　(1)　4　　(2)　12　　(3)　-9　　(4)　$\dfrac{3}{2}$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta+\gamma=0$，　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$，　$\alpha\beta\gamma=-3$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=0^2-2\cdot(-2)=4$

(2)　$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=2\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

$=2\{4-(-2)\}=12$

(3)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=0+3\cdot(-3)=-9$

(4)　$x^3-2x+3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が成り立つ。

これに $x=1$ を代入すると　$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=2$

よって　$\dfrac{1}{(1-\beta)(1-\gamma)}+\dfrac{1}{(1-\gamma)(1-\alpha)}+\dfrac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}$

$=\dfrac{1-\alpha+1-\beta+1-\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}=\dfrac{3-(\alpha+\beta+\gamma)}{2}=\dfrac{3-0}{2}=\dfrac{3}{2}$

11 $x^3-2x^2-4=0$ の 3 つの解を α，β，γ とする。次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　(3)　$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$

(4)　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$　　(5)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

解答　(1)　4　　(2)　20　　(3)　48　　(4)　7　　(5)　0

解説

3 次方程式の解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=2$，　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$，　$\alpha\beta\gamma=4$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2^2-2\cdot0=4$

(2)　(解答 1)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=2\cdot(4-0)+3\cdot4=20$

(解答 2)　α，β，γ は $x^3-2x^2-4=0$ の解であるから

$\alpha^3-2\alpha^2-4=0$，　$\beta^3-2\beta^2-4=0$，　$\gamma^3-2\gamma^2-4=0$

よって　$\alpha^3=2\alpha^2+4$，$\beta^3=2\beta^2+4$，$\gamma^3=2\gamma^2+4$　……①

ゆえに　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+12=2\cdot4+12=20$

(3)　(2) の ① から　$\alpha^4=2\alpha^3+4\alpha$，　$\beta^4=2\beta^3+4\beta$，　$\gamma^4=2\gamma^3+4\gamma$

よって　$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+4(\alpha+\beta+\gamma)$

$=2\cdot20+4\cdot2=48$

(4)　$x^3-2x^2-4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が成り立つ。

これに $x=-1$ を代入すると

$-1-2-4=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$

ゆえに　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=7$

(5)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{0}{4}=0$

12 2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　(2)　$(\alpha-\beta)^2$　　(3)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(4)　$\alpha^3+\beta^3$

(5)　$(\alpha+1)(\beta+1)$　　(6)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　　(7)　$\alpha-\beta$

解答　(1)　-2　　(2)　-8　　(3)　6　　(4)　-10　　(5)　6　　(6)　$-\dfrac{2}{3}$

(7)　$\pm2\sqrt{2}\,i$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=3$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot3=-2$

(2)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot3=-8$

(3)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=3\cdot2=6$

(4)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot3\cdot2=-10$

別解　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)\{(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\}$

$=2(-2-3)=-10$

(5)　$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=3+2+1=6$

(6)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

(7)　(2) より　$(\alpha-\beta)^2=-8$

よって　$\alpha-\beta=\pm\sqrt{-8}=\pm2\sqrt{2}\,i$

13 2 次方程式 $x^2-6x+m=0$ において，2 つの解が次の条件を満たすとき，定数 m の値と 2 つの解を，それぞれ求めよ。

(1)　1 つの解が他の解の 2 倍である。

(2)　2 つの解の比が 2：3 である。

(3)　2 つの解の差が 4 である。

解答　(1)　$m=8$，2 つの解は 2，4　　(2)　$m=\dfrac{216}{25}$，2 つの解は $\dfrac{12}{5}$，$\dfrac{18}{5}$

(3)　$m=5$，2 つの解は 1，5

解説

(1)　2 つの解は α，2α と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+2\alpha=6$，$\alpha\cdot2\alpha=m$

すなわち　$3\alpha=6$，$2\alpha^2=m$

よって　$\alpha=2$

このとき　$m=2\cdot2^2=8$

また，2 つの解は　$\alpha=2$，$2\alpha=2\cdot2=4$

したがって　$m=8$，2 つの解は　2，4

(2)　2 つの解は 2α，3α ($\alpha\neq0$) と表すことができる。

解と係数の関係から　$2\alpha+3\alpha=6$，$2\alpha\cdot3\alpha=m$

すなわち　$5\alpha=6$，$6\alpha^2=m$

$5\alpha=6$ から　$\alpha=\dfrac{6}{5}$

このとき　$m=6\cdot\left(\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{216}{25}$

また，2 つの解は　$2\alpha=2\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{12}{5}$，$3\alpha=3\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{18}{5}$

したがって　$m=\dfrac{216}{25}$，2 つの解は　$\dfrac{12}{5}$，$\dfrac{18}{5}$

(3)　2 つの解は α，$\alpha+4$ と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+(\alpha+4)=6$，$\alpha(\alpha+4)=m$

すなわち　$2\alpha=2$，$\alpha^2+4\alpha=m$

よって　$\alpha=1$

このとき　$m=1^2+4\cdot1=5$

また，2 つの解は　$\alpha=1$，$\alpha+4=1+4=5$

したがって　$m=5$，2 つの解は　1，5

14 3 次方程式 $x^3-3x^2+2x+4=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$　　(2)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(3)　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

解答　(1)　$\alpha+\beta+\gamma=3$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$，$\alpha\beta\gamma=-4$　　(2)　5　　(3)　2

解説

(1)　3 次方程式の解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=-(-3)=3$，

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$，

$\alpha\beta\gamma=-4$

(2)　$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$　であるから

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot2=5$

(3)　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-4+2+3+1=2$

15 2 次方程式 $2x^2-3x+8=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2)　$\alpha^2+\beta^2$　　(3)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　　(4)　$\alpha^3+\beta^3$

解答　(1)　6　　(2)　$-\dfrac{23}{4}$　　(3)　$-\dfrac{23}{16}$　　(4)　$-\dfrac{117}{8}$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta=4$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=4\cdot\dfrac{3}{2}=6$

(2)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2\cdot4=-\dfrac{23}{4}$

(3)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\dfrac{23}{4}\div4=-\dfrac{23}{16}$

(4)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3-3\cdot4\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{27}{8}-18=-\dfrac{117}{8}$

16 次の 2 次方程式の 2 つの解の間に [ ] 内の関係があるとき，定数 m の値と 2 つの解を求めよ。

(1)　$x^2+mx+36=0$　　[1 つの解が他の解の 4 倍]

(2)　$x^2-14x+2m=0$　　[2 つの解の比が 3：4]

解答　(1)　$m=15$ のとき 2 つの解 -3，-12；$m=-15$ のとき 2 つの解 3，12

(2)　$m=24$，2 つの解 6，8

解説

(1)　1 つの解が他の解の 4 倍であるから，2 つの解は α，4α と表すことができる。

解と係数の関係から

$\alpha+4\alpha=-m$　……①，　$\alpha\cdot4\alpha=36$　……②

② から　$\alpha^2=9$　　よって　$\alpha=\pm3$

[1]　$\alpha=-3$ のとき

① から　$m=-5\alpha=-5\cdot(-3)=15$

また　$4\alpha=4\cdot(-3)=-12$

[2]　$\alpha=3$ のとき

① から　$m=-5\alpha=-5\cdot3=-15$

また　$4\alpha=4\cdot3=12$

以上から

$m=15$ のとき　2 つの解は　-3，-12

$m=-15$ のとき　2 つの解は　3，12

(2)　2 つの解の比が 3：4 であるから，2 つの解は 3α，4α ($\alpha\neq0$) と表すことができる。

解と係数の関係から

$3\alpha+4\alpha=14$ ……①，　$3\alpha\cdot4\alpha=2m$ ……②

① から　$7\alpha=14$　　よって　$\alpha=2$

このとき，② から　$m=6\alpha^2=6\cdot2^2=24$

また　$3\alpha=3\cdot2=6$，　$4\alpha=4\cdot2=8$

したがって　$m=24$，　2 つの解は　6，8

17 3 次方程式 $x^3-2x^2+5x+3=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$　　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　(4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

(5) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

解答　(1) 順に 2，5，-3　(2) -6　(3) -31　(4) $-\dfrac{5}{3}$　(5) -7

解説

(1) 3 次方程式の解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{-2}{1}=2$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{5}{1}=5$，$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{3}{1}=-3$

(2) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ より

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=2^2-2\cdot5=-6$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$ より

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2\cdot\{(-6)-5\}+3\cdot(-3)=-31$

(4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

$=\dfrac{5}{-3}=-\dfrac{5}{3}$

(5) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=-3-5+2-1=-7$

別解　$x^3-2x^2+5x+3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が成り立つから，この等式の両辺に $x=1$ を代入すると　$1^3-2\cdot1^2+5\cdot1+3=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

よって　$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=-7$

18 2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$　　(2) $(\alpha^2+\beta)(\alpha+\beta^2)$

解答　(1) 1　(2) 22

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=3$

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=(-2)^2-3=4-3=1$

(2) $(\alpha^2+\beta)(\alpha+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha\beta)^2+\alpha\beta$

$=(-2)^3-3\cdot3\cdot(-2)+3^2+3=-8+18+9+3=22$

19 2 次方程式 $x^2-12x+m=0$ の 1 つの解が他の解の 2 乗であるとき，定数 m の値と 2 つの解を求めよ。

解答　$m=-64$ のとき 2 つの解 -4，16；$m=27$ のとき 2 つの解 3，9

解説

1 つの解が他の解の 2 乗であるから，2 つの解は α，α^2 と表すことができる。

解と係数の関係から

$\alpha+\alpha^2=12$ ……①，　$\alpha\cdot\alpha^2=m$ ……②

① から　$\alpha^2+\alpha-12=0$

よって　$(\alpha+4)(\alpha-3)=0$

ゆえに　$\alpha=-4$，3

[1] $\alpha=-4$ のとき

② から　$m=\alpha^3=(-4)^3=-64$

また　$\alpha^2=(-4)^2=16$

[2] $\alpha=3$ のとき

② から　$m=\alpha^3=3^3=27$

また　$\alpha^2=3^2=9$

以上から　$m=-64$ のとき 2 つの解 -4，16

$m=27$ のとき 2 つの解 3，9

20 2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$　　(2) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(3) $\alpha^2+\beta^2$

(4) $\alpha^3+\beta^3$　　(5) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　　(6) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

解答　(1) 8　(2) 12　(3) 1　(4) -9　(5) $\dfrac{1}{4}$　(6) -1

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{1}=3$，$\alpha\beta=\dfrac{4}{1}=4$

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=4+3+1=8$

(2) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=4\cdot3=12$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot4=1$

(4) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot4\cdot3=-9$

別解　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=3(1-4)=-9$

(5) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{4}$

(6) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}=\dfrac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{1-3}{4-3+1}=-1$

21 2 次方程式 $3x^2-2x-4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(3) $\alpha^2+\beta^2$

(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　　(5) $(\alpha-\beta)^2$　　(6) $\alpha^3+\beta^3$

解答　(1) $-\dfrac{8}{9}$　(2) $-\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{28}{9}$　(4) $-\dfrac{7}{3}$　(5) $\dfrac{52}{9}$　(6) $\dfrac{80}{27}$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}$，$\alpha\beta=-\dfrac{4}{3}$

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=-\dfrac{8}{9}$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{3}\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{28}{9}$

(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{28}{9}\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{28}{9}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{7}{3}$

(5) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta=\dfrac{28}{9}-2\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{28}{9}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{52}{9}$

別解　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{4}{9}+\dfrac{16}{3}=\dfrac{52}{9}$

(6) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{80}{27}$

別解　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\dfrac{2}{3}\left\{\dfrac{28}{9}-\left(-\dfrac{4}{3}\right)\right\}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{40}{9}=\dfrac{80}{27}$

22 2 次方程式 $x^2-12x+k=0$ が次のような解をもつとき，定数 k の値と方程式の解を求めよ。

(1) 1 つの解が他の解の 2 倍　　(2) 1 つの解が他の解の 2 乗

解答　(1) $k=32$，$x=4$，8　(2) $k=27$ のとき $x=3$，9；$k=-64$ のとき $x=-4$，16

解説

(1) 1 つの解が他の解の 2 倍であるから，2 つの解は α，2α と表すことができる。

解と係数の関係から

$\alpha+2\alpha=12$ ……①，　$\alpha\cdot2\alpha=k$ ……②

① から　$\alpha=4$　　これを ② に代入して　$k=32$

また，他の解は　$2\alpha=8$

よって　$k=32$　　2 つの解は　$x=4$，8

(2) 1 つの解が他の解の 2 乗であるから，2 つの解は α，α^2 と表すことができる。

解と係数の関係から

$\alpha+\alpha^2=12$ ……③，　$\alpha\cdot\alpha^2=k$ ……④

③ から　$\alpha^2+\alpha-12=0$　　よって　$(\alpha+4)(\alpha-3)=0$

ゆえに　$\alpha=-4$，3

$\alpha=-4$ のとき，④ から　$k=-64$　　他の解は，$\alpha^2=16$

$\alpha=3$ のとき，④ から　$k=27$　　他の解は，$\alpha^2=9$

よって　$k=27$ のとき，2 つの解は　$x=3$，9

$k=-64$ のとき，2 つの解は　$x=-4$，16

23 次の条件を満たす定数 k の値と方程式の解を，それぞれ求めよ。

(1) 2 次方程式 $x^2+kx+4=0$ の 1 つの解が他の解の 4 倍

(2) 2 次方程式 $6x^2-kx+k-4=0$ の 2 つの解の比が 3：2

(3) 2 次方程式 $3x^2+6x+k-1=0$ の 2 つの解の差が 4

解答　(1) $k=5$ のとき，$x=-1$，-4；$k=-5$ のとき，$x=1$，4

(2) $k=5$ のとき，$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$；$k=20$ のとき，$x=2$，$\dfrac{4}{3}$

(3) $k=-8$ のとき，$x=-3$，1

解説

(1) 1 つの解が他の解の 4 倍であるから，2 つの解は α，4α と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+4\alpha=-k$ ……①，　$\alpha\cdot4\alpha=4$ ……②

② から　$\alpha^2=1$　　よって　$\alpha=\pm1$

$\alpha=-1$ のとき，① から　　$k=5$　　他の解は　　$4\alpha=-4$

$\alpha=1$　のとき，① から　　$k=-5$　他の解は　　$4\alpha=4$

よって　　$k=5$　のとき，2 つの解は　$x=-1,\ -4$

　　　　　$k=-5$ のとき，2 つの解は　$x=1,\ 4$

(2)　2 つの解の比が $3:2$ であるから，2 つの解は 3α，2α（ただし　$\alpha\neq 0$）と表すことができる。

解と係数の関係から　　$3\alpha+2\alpha=\dfrac{k}{6}$ ……①，　$3\alpha\cdot 2\alpha=\dfrac{k-4}{6}$ ……②

① から　　$\alpha=\dfrac{k}{30}$　　これを ② に代入して　　$6\cdot\dfrac{k^2}{900}=\dfrac{k-4}{6}$

整理すると　　$k^2-25k+100=0$

よって　　$(k-5)(k-20)=0$　　　ゆえに　　$k=5,\ 20$

$k=5$ のとき，$\alpha=\dfrac{1}{6}$，$k=20$ のとき，$\alpha=\dfrac{2}{3}$

よって　　$k=5$　のとき，2 つの解は　$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}$

　　　　　$k=20$　のとき，2 つの解は　$x=2,\ \dfrac{4}{3}$

(3)　2 つの解の差が 4 であるから，2 つの解は α，$\alpha+4$ と表すことができる。

解と係数の関係から　　$\alpha+(\alpha+4)=-2$ ……①，　$\alpha(\alpha+4)=\dfrac{k-1}{3}$ ……②

① から　　$\alpha=-3$　　　これを ② に代入して　　$-3=\dfrac{k-1}{3}$

よって　　$k=-8$

ゆえに　　$k=-8$ のとき，2 つの解は　$x=-3,\ 1$

24 $a<b$ とする。2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解の和と積が，2 次方程式 $x^2+bx+a=0$ の 2 つの解である。このとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=-2,\ b=-1$

解説

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$\alpha+\beta=-a$ ……①，　$\alpha\beta=b$ ……②

2 次方程式 $x^2+bx+a=0$ の解が $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ であるから，解と係数の関係により

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$，　$(\alpha+\beta)\alpha\beta=a$

①，② を代入して　　$-a+b=-b$ ……③，　$-ab=a$ ……④

④ から　　$a+ab=0$　すなわち　$a(1+b)=0$

よって　　$a=0$　または　$b=-1$

[1]　$a=0$ のとき

③ から　　$b=0$　　　これは $a<b$ を満たさない。

[2]　$b=-1$ のとき

③ から　　$a=-2$　　これは $a<b$ を満たす。

[1]，[2] から　　$a=-2,\ b=-1$

25 2 次方程式 $x^2-x+8=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　　(2)　$\alpha^4+\beta^4$　　　(3)　$\dfrac{\beta}{1+\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{1+\beta^2}$

解答　(1)　-15　　(2)　97　　(3)　$-\dfrac{11}{25}$

解説

解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=1$，　$\alpha\beta=8$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot 8=-15$

(2)　$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(-15)^2-2\cdot 8^2$

$=225-128=97$

(3)　$\dfrac{\beta}{1+\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{1+\beta^2}=\dfrac{\beta(1+\beta^2)+\alpha(1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}$

$=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\alpha+\beta}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}$ ……①

ここで　　$\alpha^2+\beta^2=-15$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=1^3-3\cdot 8\cdot 1=-23$

よって，① は　　$\dfrac{-23+1}{8^2+(-15)+1}=\dfrac{-22}{50}=-\dfrac{11}{25}$

別解　α，β は 2 次方程式 $x^2-x+8=0$ の解であるから

$\alpha^2-\alpha+8=0$，　$\beta^2-\beta+8=0$

を満たす。

よって　　$\alpha^2=\alpha-8$，　$\beta^2=\beta-8$

ゆえに　　$\alpha^2+\beta^2=\alpha-8+\beta-8=1-16=-15$

したがって　　$\dfrac{\beta}{1+\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{1+\beta^2}=\dfrac{\beta}{\alpha-7}+\dfrac{\alpha}{\beta-7}=\dfrac{\beta(\beta-7)+\alpha(\alpha-7)}{(\alpha-7)(\beta-7)}$

$=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-7(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-7(\alpha+\beta)+49}=\dfrac{-15-7}{8-7+49}$

$=-\dfrac{11}{25}$

26 (1)　2 次方程式 $x^2-5x+9=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 数 $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(2)　x の 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 2 つの解を α，β とする。$\alpha+2$，$\beta+2$ を解とする x の 2 次方程式が $x^2+qx+p=0$ であるとき，p，q の値を求めよ。

解答　(1)　$x^2-14x+45=0$　　(2)　$p=0,\ q=-4$

解説

(1)　解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=5$，　$\alpha\beta=9$

よって　　$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=5+9=14$，　$(\alpha+\beta)\alpha\beta=5\cdot 9=45$

ゆえに，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは　　$x^2-14x+45=0$

(2)　2 次方程式 $x^2+px+q=0$ において，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-p$ ……①，　$\alpha\beta=q$ ……②

2 次方程式 $x^2+qx+p=0$ において，解と係数の関係から

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-q$ ……③

$(\alpha+2)(\beta+2)=p$ ……④

③ から　　$\alpha+\beta+4=-q$

① を代入して　　$-p+4=-q$

よって　　$p-q=4$ ……⑤

④ から　　$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=p$

①，② を代入して　　$q-2p+4=p$

よって　　$3p-q=4$ ……⑥

⑥－⑤ から　　$p=0$　　　このとき，⑤ から　　$q=-4$

27 2 次方程式 $2x^2+4x+3=0$ の 2 つの解を α，β とする。このとき，次の値を求めよ。

(1)　$(\alpha-1)(\beta-1)$　　　(2)　$(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3$

解答　(1)　$\dfrac{9}{2}$　　(2)　-10

解説

解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

(1)　$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=\dfrac{3}{2}-(-2)+1=\dfrac{9}{2}$

(2)　$(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3$

$=\{(\alpha-1)+(\beta-1)\}^3-3(\alpha-1)(\beta-1)\{(\alpha-1)+(\beta-1)\}$

$=(\alpha+\beta-2)^3-3(\alpha-1)(\beta-1)(\alpha+\beta-2)$

$=(-2-2)^3-3\cdot\dfrac{9}{2}\cdot(-2-2)=-64+54=-10$

別解 1　$\alpha-1=\gamma$，$\beta-1=\delta$ とおくと，γ，δ は 2 次方程式

$2(x+1)^2+4(x+1)+3=0$　すなわち　$2x^2+8x+9=0$ の 2 つの解である。

解と係数の関係から　　$\gamma+\delta=-4$，$\gamma\delta=\dfrac{9}{2}$

(1)　$(\alpha-1)(\beta-1)=\gamma\delta=\dfrac{9}{2}$

(2)　$(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3=\gamma^3+\delta^3=(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta)$

$=(-4)^3-3\cdot\dfrac{9}{2}\cdot(-4)$

$=-64+54=-10$

別解 2　(1)　2 次方程式 $2x^2+4x+3=0$ の 2 つの解が α，β であるから

$2x^2+4x+3=2(x-\alpha)(x-\beta)$

両辺に $x=1$ を代入すると

$2+4+3=2(1-\alpha)(1-\beta)$

よって　　$(\alpha-1)(\beta-1)=\dfrac{9}{2}$

28 3 次方程式 $x^3+x^2+x+3=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　　(2)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

解答　(1)　-1　　(2)　-7

解説

解と係数の関係により

$\alpha+\beta+\gamma=-1$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$，$\alpha\beta\gamma=-3$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-1)^2-2\cdot 1=-1$

(2)　(1) の結果を利用して

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(-1)(-1-1)+3\cdot(-3)=-7$

別解　$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+3=0$，$\beta^3+\beta^2+\beta+3=0$，$\gamma^3+\gamma^2+\gamma+3=0$ であるから

$\alpha^3=-\alpha^2-\alpha-3$，$\beta^3=-\beta^2-\beta-3$，$\gamma^3=-\gamma^2-\gamma-3$

よって　　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(-\alpha^2-\alpha-3)+(-\beta^2-\beta-3)+(-\gamma^2-\gamma-3)$

$=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha+\beta+\gamma)-9$

$=-(-1)-(-1)-9=-7$

29 3 次方程式 $x^3-3x+5=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ の値は $^{ア}\boxed{}$ であり，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ の値は $^{イ}\boxed{}$，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値は $^{ウ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　5　　(イ)　-15　　(ウ)　-75

解説

3 次方程式の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\quad \alpha\beta\gamma=-5$$

よって　$\alpha+\beta=-\gamma$，$\beta+\gamma=-\alpha$，$\gamma+\alpha=-\beta$

ゆえに　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)$

$$=-\alpha\beta\gamma=-(-5)$$

$$={}^{ア}5$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

$$=0+3\cdot(-5)={}^{イ}-15$$

また，$\alpha^3=3\alpha-5$，$\beta^3=3\beta-5$，$\gamma^3=3\gamma-5$ であるから

$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=\alpha^2(3\alpha-5)+\beta^2(3\beta-5)+\gamma^2(3\gamma-5)$$

$$=3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-5(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$=3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-5\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$$

$$=3\cdot(-15)-5\{0^2-2\cdot(-3)\}$$

$$={}^{ウ}-75$$

別解　(イ) について，(ウ) と同様に次数を下げる方法で解いてもよい。

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(3\alpha-5)+(3\beta-5)+(3\gamma-5)$$

$$=3(\alpha+\beta+\gamma)-15=3\cdot0-15$$

$$={}^{イ}-15$$