解の判別•解の配置クイズ

1 2次方程式 $x^2-6x+m=0$ が異なる2つの実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$m<9$

解説

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot m=36-4m$$

異なる2つの実数解をもつための必要十分条件は $D>0$ であるから　$36-4m>0$

よって　$m<9$

2 2次方程式 $3x^2-8x+m=0$ が異なる2つの実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$m<\dfrac{16}{3}$

解説

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-8)^2-4\cdot3\cdot m=64-12m$$

異なる2つの実数解をもつための必要十分条件は $D>0$ であるから

$$64-12m>0$$

よって　$m<\dfrac{16}{3}$

3 2次方程式 $x^2-2x+m=0$ が実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。[10点]

解答　この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot m=4(1-m)$$

実数解をもつための必要十分条件は $D\geqq0$ であるから

$4(1-m)\geqq0$　　よって　$m\leqq1$

解説

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot m=4(1-m)$$

実数解をもつための必要十分条件は $D\geqq0$ であるから

$4(1-m)\geqq0$　　よって　$m\leqq1$

4 2次方程式 $x^2+2mx+m+2=0$ が異なる2つの正の解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$-2<m<-1$

解説

2次方程式 $x^2+2mx+m+2=0$ の2つの解を α，β とし，判別式を D とする。

この2次方程式が異なる2つの正の解をもつための必要十分条件は

$D>0$ で，$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

が成り立つことである。

ここで

$$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+2)=(m+1)(m-2)$$

$D>0$ より　$(m+1)(m-2)>0$

よって　$m<-1$，$2<m$　…… ①

解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2m,\quad \alpha\beta=m+2$$

$\alpha+\beta>0$ より　$-2m>0$

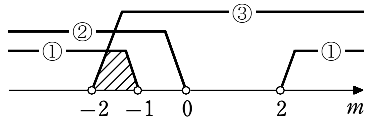
よって　$m<0$　…… ②

$\alpha\beta>0$ より　$m+2>0$

よって　$m>-2$　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$$-2<m<-1$$



5 2次方程式 $x^2+mx+m+3=0$ が次のような異なる2つの解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　2つとも正　　(2)　2つとも負　　(3)　異符号

解答　(1)　$-3<m<-2$　　(2)　$m>6$　　(3)　$m<-3$

解説

2次方程式 $x^2+mx+m+3=0$ の2つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$$D=m^2-4(m+3)=(m+2)(m-6)$$

解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-m,\quad \alpha\beta=m+3$$

(1)　異なる2つの解をもち，それが2つとも正であるための必要十分条件は

$D>0$ で，$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

が成り立つことである。

$D>0$ より　$(m+2)(m-6)>0$

よって　$m<-2$，$6<m$　…… ①

$\alpha+\beta>0$ より　$-m>0$

よって　$m<0$　…… ②

$\alpha\beta>0$ より　$m+3>0$

よって　$m>-3$　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$-3<m<-2$

(2)　異なる2つの解をもち，それが2つとも負であるための必要十分条件は

$D>0$ で，$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

が成り立つことである。

$D>0$ より　$m<-2$，$6<m$　…… ①

$\alpha+\beta<0$ より　$-m<0$

よって　$m>0$　…… ②

$\alpha\beta>0$ より　$m>-3$　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$m>6$

(3)　異なる2つの解をもち，それが異符号であるための必要十分条件は

$\alpha\beta<0$

が成り立つことである。

$\alpha\beta<0$ より　$m+3<0$

よって　$m<-3$

6 2つの2次方程式 $x^2+(m+1)x+m^2=0$，$x^2+2mx+2m=0$ の一方が異なる2つの実数解をもち，他方が虚数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答　$m<-\dfrac{1}{3}$，$0<m<1$，$2<m$

解説

与えられた2次方程式の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=(m+1)^2-4m^2=-(3m+1)(m-1)$$

$$\frac{D_2}{4}=m^2-2m=m(m-2)$$

求める必要十分条件は

$D_1>0$　かつ　$D_2<0$　…… ①

または

$D_1<0$　かつ　$D_2>0$　…… ②

である。① の場合

$(3m+1)(m-1)<0$　かつ　$m(m-2)<0$

すなわち　$-\dfrac{1}{3}<m<1$　かつ　$0<m<2$

よって　$0<m<1$　…… ③

また，② の場合

$(3m+1)(m-1)>0$　かつ　$m(m-2)>0$

すなわち　$m<-\dfrac{1}{3}$，$1<m$　かつ　$m<0$，$2<m$

よって　$m<-\dfrac{1}{3}$，$2<m$　…… ④

ゆえに，③，④ から，求める定数 m の値の範囲は

$$m<-\frac{1}{3},\ 0<m<1,\ 2<m$$

7 2次方程式 $x^2+2(2-a)x+1=0$ が虚数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。[16点]

解答　$x^2+2(2-a)x+1=0$ の判別式を D とすると，この方程式が虚数解をもつための必要十分条件は $D<0$ である。

$$\frac{D}{4}=(2-a)^2-1=a^2-4a+3=(a-1)(a-3)$$

$D<0$ から　$1<a<3$

解説

$x^2+2(2-a)x+1=0$ の判別式を D とすると，この方程式が虚数解をもつための必要十分条件は $D<0$ である。

$$\frac{D}{4}=(2-a)^2-1=a^2-4a+3=(a-1)(a-3)$$

$D<0$ から　$1<a<3$

8 x の2次方程式 $x^2-4ax+a^2+1=0$ が，実数解をもつための実数 a の値の範囲を求めよ。[20点]

解答　x についての2次方程式 $x^2-4ax+a^2+1=0$ の判別式を D とすると，この方程式が実数解をもつための必要十分条件は $D\geqq0$ である。

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-(a^2+1)=3a^2-1$$

よって　$3a^2-1\geqq0$

ゆえに　$a\leqq-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq a$

解説

x についての2次方程式 $x^2-4ax+a^2+1=0$ の判別式を D とすると，この方程式が実数解をもつための必要十分条件は $D\geqq0$ である。

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-(a^2+1)=3a^2-1$$

よって　$3a^2-1\geqq0$

ゆえに　$a\leqq-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq a$

9 x の 2 次方程式 $x^2+2(m-1)x+2m^2-5m-3=0$ の解がすべて正であるとき，実数 m の値の範囲を求めよ。[20 点]

解答　$x^2+2(m-1)x+2m^2-5m-3=0$ の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(2m^2-5m-3)$$
$$=-(m^2-3m-4)=-(m+1)(m-4)$$

また，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-2(m-1)$,

$\alpha\beta=2m^2-5m-3=(m-3)(2m+1)$

α，β がともに正であるための条件は

$D\geqq 0$　かつ　$\alpha+\beta>0$　かつ　$\alpha\beta>0$

$D\geqq 0$ から　$-(m+1)(m-4)\geqq 0$

よって　$-1\leqq m\leqq 4$　…… ①

$\alpha+\beta>0$ から　$-2(m-1)>0$

よって　$m<1$　…… ②

$\alpha\beta>0$ から　$(m-3)(2m+1)>0$

よって　$m<-\frac{1}{2}$，$3<m$　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$-1\leqq m<-\frac{1}{2}$

解説

$x^2+2(m-1)x+2m^2-5m-3=0$ の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(2m^2-5m-3)$$
$$=-(m^2-3m-4)=-(m+1)(m-4)$$

また，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-2(m-1)$,

$\alpha\beta=2m^2-5m-3=(m-3)(2m+1)$

α，β がともに正であるための条件は

$D\geqq 0$　かつ　$\alpha+\beta>0$　かつ　$\alpha\beta>0$

$D\geqq 0$ から　$-(m+1)(m-4)\geqq 0$

よって　$-1\leqq m\leqq 4$　…… ①

$\alpha+\beta>0$ から　$-2(m-1)>0$

よって　$m<1$　…… ②

$\alpha\beta>0$ から　$(m-3)(2m+1)>0$

よって　$m<-\frac{1}{2}$，$3<m$　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$-1\leqq m<-\frac{1}{2}$

10 2 つの 2 次方程式 $ax^2-3x+a=0$，$x^2-ax+a^2-3a=0$ の一方だけが実数解をもつ a の値の範囲を求めよ。ただし，$a>0$ とする。[20 点]

解答　$ax^2-3x+a=0$，$x^2-ax+a^2-3a=0$ の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とする。

それぞれの 2 次方程式が実数解をもつための必要十分条件は

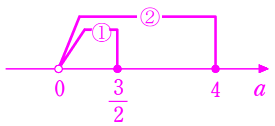
$D_1=9-4a^2\geqq 0$，$a>0$ から　$0<a\leqq\frac{3}{2}$ …… ①

$D_2=a^2-4(a^2-3a)\geqq 0$，$a>0$ から　$0<a\leqq 4$ …… ②

①，② から，一方だけが実数解をもつための

必要十分条件は

$\frac{3}{2}<a\leqq 4$



解説

$ax^2-3x+a=0$，$x^2-ax+a^2-3a=0$ の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とする。

それぞれの 2 次方程式が実数解をもつための必要十分条件は

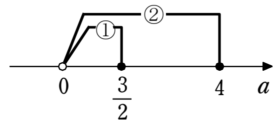
$D_1=9-4a^2\geqq 0$，$a>0$ から　$0<a\leqq\frac{3}{2}$ …… ①

$D_2=a^2-4(a^2-3a)\geqq 0$，$a>0$ から　$0<a\leqq 4$ …… ②

①，② から，一方だけが実数解をもつための

必要十分条件は

$\frac{3}{2}<a\leqq 4$



11 x の 2 次方程式 $x^2+ax-a+3=0$ が，異なる 2 つの負の解をもつような実数の定数 a の値の範囲を求めよ。[20 点]

解答　$x^2+ax-a+3=0$ の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$D=a^2-4(-a+3)=a^2+4a-12=(a-2)(a+6)$

また，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=-a+3$

与えられた 2 次方程式が，異なる 2 つの負の解をもつための必要十分条件は

$D>0$　かつ　$\alpha+\beta<0$　かつ　$\alpha\beta>0$

である。

$D>0$ から　$(a-2)(a+6)>0$　　よって　$a<-6$，$2<a$　…… ①

$\alpha+\beta<0$ から　$-a<0$　　よって　$a>0$　…… ②

$\alpha\beta>0$ から　$-a+3>0$　　よって　$a<3$　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$2<a<3$

解説

$x^2+ax-a+3=0$ の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$D=a^2-4(-a+3)=a^2+4a-12=(a-2)(a+6)$

また，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=-a+3$

与えられた 2 次方程式が，異なる 2 つの負の解をもつための必要十分条件は

$D>0$　かつ　$\alpha+\beta<0$　かつ　$\alpha\beta>0$

である。

$D>0$ から　$(a-2)(a+6)>0$　　よって　$a<-6$，$2<a$　…… ①

$\alpha+\beta<0$ から　$-a<0$　　よって　$a>0$　…… ②

$\alpha\beta>0$ から　$-a+3>0$　　よって　$a<3$　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$2<a<3$

12 (1)　2 つの 2 次方程式 $x^2-2kx+k^2+k-5=0$，$2x^2-3x-k+3=0$ がともに実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　方程式 $ax^2+(2a-1)x+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$\frac{15}{8}\leqq k\leqq 5$　　(2)　$a<0$，$0<a<\frac{1}{4}$

解説

(1)　2 次方程式 $x^2-2kx+k^2+k-5=0$，$2x^2-3x-k+3=0$ の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-1\cdot(k^2+k-5)=-k+5$$
$$D_2=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-k+3)=8k-15$$

2 つの 2 次方程式がともに実数解をもつための条件は

$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$

$D_1\geqq 0$ から　$-k+5\geqq 0$　　よって　$k\leqq 5$　…… ①

$D_2\geqq 0$ から　$8k-15\geqq 0$　　ゆえに　$k\geqq\frac{15}{8}$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$\frac{15}{8}\leqq k\leqq 5$

(2)　$a=0$ のとき，方程式は $-x=0$ となり，異なる 2 つの実数解をもたない。

$a\neq 0$ のとき，与式は 2 次方程式で，判別式を D とすると

$D=(2a-1)^2-4\cdot a\cdot a=-4a+1$

異なる 2 つの実数解をもつための条件は　$D>0$

ゆえに　$-4a+1>0$　　よって　$a<\frac{1}{4}$

$a\neq 0$ であるから　$a<0$，$0<a<\frac{1}{4}$

13 (1)　2 つの 2 次方程式 $3x^2+6x+2k-1=0$，$x^2-(2k-1)x+k^2-2k+2=0$ がともに実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　方程式 $ax^2-6x+a-8=0$ がただ 1 つの実数解をもつような定数 a の値と，その解を求めよ。

解答　(1)　$\frac{7}{4}\leqq k\leqq 2$

(2)　$a=0$ のとき $x=-\frac{4}{3}$，$a=-1$ のとき $x=-3$，$a=9$ のとき $x=\frac{1}{3}$

解説

(1)　2 次方程式 $3x^2+6x+2k-1=0$,

$x^2-(2k-1)x+k^2-2k+2=0$ の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とする。

ここで　$\frac{D_1}{4}=3^2-3\cdot(2k-1)=-6k+12=-6(k-2)$

$D_2=\{-(2k-1)\}^2-4\cdot 1\cdot(k^2-2k+2)=4k-7$

2 つの 2 次方程式がともに実数解をもつための条件は

$D_1\geqq 0$　かつ　$D_2\geqq 0$

$D_1\geqq 0$ から　$-6(k-2)\geqq 0$　　よって　$k\leqq 2$　…… ①

$D_2\geqq 0$ から　$4k-7\geqq 0$　　よって　$k\geqq\frac{7}{4}$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$\frac{7}{4}\leqq k\leqq 2$

(2)　[1]　$a=0$ のとき

与えられた方程式は　$-6x-8=0$

これはただ 1 つの実数解 $x=-\frac{4}{3}$ をもつ。

[2]　$a\neq 0$ のとき

与えられた方程式は 2 次方程式で，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-a(a-8)=-a^2+8a+9$$

2 次方程式がただ 1 つの実数解をもつのは，重解をもつとき，すなわち $D=0$ のときである。

よって　$a^2-8a-9=0$　　ゆえに　$(a+1)(a-9)=0$

したがって　$a=-1$，9

また，重解は　$x=-\frac{-6}{2a}=\frac{3}{a}$

[1]，[2] から　$a=0$ のとき $x=-\frac{4}{3}$，$a=-1$ のとき $x=-3$，

$a=9$ のとき $x=\dfrac{1}{3}$

14 2 次方程式 $x^2+2ax+4a^2-ka+4=0$ を $(*)$ とする。ただし，a と k は実数の定数とする。

(1) $k=8$ のとき，$(*)$ が実数解をもたないような a の値の範囲を求めよ。

(2) -1 以上のすべての a に対して，$(*)$ が実数解をもたないような k の値の範囲を求めよ。

解答 (1) $a<\dfrac{2}{3}$，$2<a$ (2) $-7<k<4\sqrt{3}$

解説

(1) $k=8$ のとき，$(*)$ は $x^2+2ax+4a^2-8a+4=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(4a^2-8a+4)=-(3a^2-8a+4)=-(a-2)(3a-2)$$

$(*)$ が実数解をもたないための条件は $D<0$

よって $(a-2)(3a-2)>0$

したがって，求める a の値の範囲は $a<\dfrac{2}{3}$，$2<a$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の判別式を D' とすると

$$\frac{D'}{4}=a^2-1\cdot(4a^2-ka+4)=-(3a^2-ka+4)$$

$(*)$ が実数解をもたないための条件は $D'<0$

ゆえに $3a^2-ka+4>0$

よって，$f(a)=3a^2-ka+4$ とすると，-1 以上のすべての a に対して $f(a)>0$ となるような k の値の範囲が求めるものである。

すなわち，$a\geqq -1$ における $f(a)$ の最小値が正である条件を求めればよい。

$f(a)$ を変形すると $f(a)=3\left(a-\dfrac{k}{6}\right)^2-\dfrac{k^2}{12}+4$

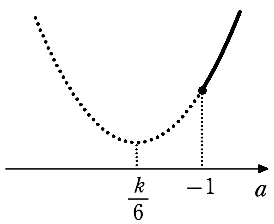
[1] $\dfrac{k}{6}<-1$ すなわち $k<-6$ のとき

$f(a)$ は $a=-1$ で最小となり最小値は

$f(-1)=k+7$

よって $k+7>0$ ゆえに $k>-7$

$k<-6$ との共通範囲は $-7<k<-6$

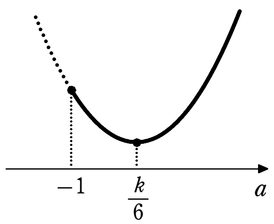


[2] $\dfrac{k}{6}\geqq -1$ すなわち $k\geqq -6$ のとき

$f(a)$ は $a=\dfrac{k}{6}$ で最小となり，最小値は

$f\left(\dfrac{k}{6}\right)=-\dfrac{k^2}{12}+4$

よって $-\dfrac{k^2}{12}+4>0$



両辺に -12 を掛けて $k^2-48<0$

これを解くと $-4\sqrt{3}<k<4\sqrt{3}$

$k\geqq -6$ との共通範囲は $-6\leqq k<4\sqrt{3}$

以上から，求める k の値の範囲は，[1]，[2] を合わせて $-7<k<4\sqrt{3}$

15 x についての方程式を

$x^2+2ax+1=0$ ……①，$x^2+2ax+6-a=0$ ……②，$x^2-2ax-4a=0$ ……③

とする。次の各場合について，実数 a の値の範囲を求めよ。

(1) ①，②，③ のうち，少なくとも 1 つが虚数解をもつ。

(2) ①，②，③ のうち，1 つだけが虚数解をもつ。

解答 (1) $-4<a<2$ (2) $-4<a\leqq -3$，$1\leqq a<2$

解説

①，②，③ の判別式をそれぞれ D_1，D_2，D_3 とすると

$$\frac{D_1}{4}=a^2-1\cdot 1=a^2-1=(a+1)(a-1)$$

$$\frac{D_2}{4}=a^2-1\cdot(6-a)=a^2+a-6=(a+3)(a-2)$$

$$\frac{D_3}{4}=(-a)^2-1\cdot(-4a)=a^2+4a=a(a+4)$$

(1) ① が虚数解をもつための条件は $D_1<0$ であるから

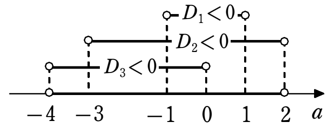
$(a+1)(a-1)<0$ よって $-1<a<1$ ……④

同様に，②，③ が虚数解をもつための条件は，それぞれ $D_2<0$，$D_3<0$ であるから

$(a+3)(a-2)<0$，$a(a+4)<0$

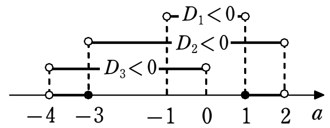
よって $-3<a<2$ ……⑤，$-4<a<0$ ……⑥

$D_1<0$ または $D_2<0$ または $D_3<0$ となる a の値の範囲は，④，⑤，⑥ の範囲を合わせた範囲であるから $-4<a<2$



(2) $D_1<0$，$D_2<0$，$D_3<0$ の 1 つだけが成り立つ a の値の範囲は，右の図から

$-4<a\leqq -3$，$1\leqq a<2$



16 2 次方程式 $x^2-2(k+1)x+2(k^2+3k-10)=0$ が次のような解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(1) すべて正の解 (2) 異符号の解

解答 (1) $2<k\leqq 3$ (2) $-5<k<2$

解説

与えられた 2 次方程式の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-2(k^2+3k-10)=-(k^2+4k-21)=-(k+7)(k-3)$$

解と係数の関係から $\alpha+\beta=2(k+1)$，$\alpha\beta=2(k^2+3k-10)=2(k+5)(k-2)$

(1) α，β がともに正であるための必要十分条件は

$D\geqq 0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

$D\geqq 0$ から $(k+7)(k-3)\leqq 0$ よって $-7\leqq k\leqq 3$ ……①

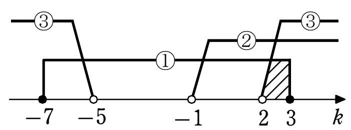
$\alpha+\beta>0$ から $k+1>0$

よって $k>-1$ ……②

$\alpha\beta>0$ から $(k+5)(k-2)>0$

よって $k<-5$，$2<k$ ……③

求める k の値の範囲は，①，②，③ の共通範囲で $2<k\leqq 3$



(2) α と β が異符号であるための必要十分条件は $\alpha\beta<0$

ゆえに $(k+5)(k-2)<0$ よって $-5<k<2$

17 2 次方程式 $x^2-2(k-3)x+4k=0$ が次のような解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(1) 異なる 2 つの正の解 (2) 異なる 2 つの負の解 (3) 正と負の解

解答 (1) $k>9$ (2) $0<k<1$ (3) $k<0$

解説

2 次方程式 $x^2-2(k-3)x+4k=0$ の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=\{-(k-3)\}^2-4k=k^2-10k+9=(k-1)(k-9)$$

解と係数の関係から $\alpha+\beta=2(k-3)$，$\alpha\beta=4k$

(1) α，β がともに正で，異なるための必要十分条件は

$D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

$D>0$ から $(k-1)(k-9)>0$ よって $k<1$，$9<k$ ……①

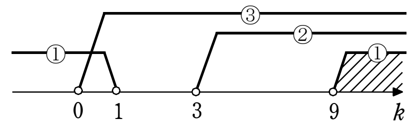
$\alpha+\beta>0$ から $2(k-3)>0$

よって $k>3$ ……②

$\alpha\beta>0$ から $4k>0$

よって $k>0$ ……③

求める k の値の範囲は，①，②，③ の共通範囲で $k>9$



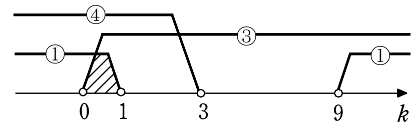
(2) α，β がともに負で，異なるための必要十分条件は

$D>0$ かつ $\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

$\alpha+\beta<0$ から $2(k-3)<0$

よって $k<3$ ……④

求める k の値の範囲は，①，③，④ の共通範囲で $0<k<1$



(3) α，β が正と負であるための必要十分条件は

$\alpha\beta<0$ すなわち $4k<0$

よって，求める k の値の範囲は $k<0$

18 2 次方程式 $x^2-2ax+2a^2-5=0$ が次の条件を満たす解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(1) 2 つの解がともに 1 より大きい。

(2) 1 つの解は 1 より大きく，他の解は 1 より小さい。

解答 (1) $2<a\leqq\sqrt{5}$ (2) $-1<a<2$

解説

(解答 1) 与えられた 2 次方程式の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(2a^2-5)=-(a^2-5)$$

解と係数の関係から $\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=2a^2-5$

(1) 2 つの解 α，β がともに 1 より大きいための必要十分条件は

$D\geqq 0$ かつ $(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1)>0$

$D\geqq 0$ から $a^2-5\leqq 0$ よって $-\sqrt{5}\leqq a\leqq\sqrt{5}$ ……①

$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ すなわち $(\alpha+\beta)-2>0$ から

$2a-2>0$ よって $a>1$ ……②

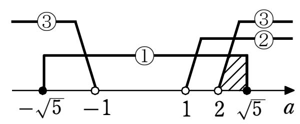
$(\alpha-1)(\beta-1)>0$ すなわち $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$ から

$(2a^2-5)-2a+1>0$ ゆえに $a^2-a-2>0$

よって $(a+1)(a-2)>0$

これを解いて $a<-1$，$2<a$ ……③

求める a の値の範囲は，①，②，③ の共通範囲で $2<a\leqq\sqrt{5}$



(2) 1 つの解が 1 より大きく，他の解が 1 より小さいための必要十分条件は

$(\alpha-1)(\beta-1)<0$ よって $(a+1)(a-2)<0$

これを解いて $-1<a<2$

(解答 2)　$f(x)=x^2-2ax+2a^2-5$ とする。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解がともに 1 より大きいための必要十分条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $x>1$ の部分とのみ共有点をもつことである。

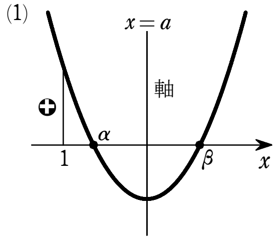
よって，$f(x)=0$ の判別式を D とすると，次のことが同時に成り立つ。

$\frac{D}{4}=-(a^2-5)\geqq 0$　…… ①

軸 $x=a$ について　$a>1$　…… ②

$f(1)=2a^2-2a-4>0$　…… ③

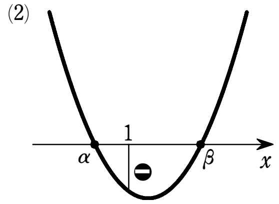
①，②，③ の共通範囲を求めて　$2<a\leqq\sqrt{5}$



(2)　方程式 $f(x)=0$ の 1 つの解が 1 より大きく，他の解が 1 より小さいための必要十分条件は

$f(1)=2a^2-2a-4<0$

これを解いて　$-1<a<2$



19 2 次方程式 $x^2-2px+p+2=0$ が次の条件を満たす解をもつように，定数 p の値の範囲を定めよ。

(1)　2 つの解がともに 5 より小さい。

(2)　1 つの解は 3 より大きく，他の解は 3 より小さい。

解答　(1)　$p\leqq-1,\ 2\leqq p<3$　　(2)　$p>\frac{11}{5}$

解説

2 次方程式 $x^2-2px+p+2=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とし，判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=(-p)^2-(p+2)=p^2-p-2=(p+1)(p-2)$$

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2p,\ \alpha\beta=p+2$

(1)　$\alpha,\ \beta$ がともに 5 より小さいための必要十分条件は

$D\geqq0$ かつ $(\alpha-5)+(\beta-5)<0$ かつ $(\alpha-5)(\beta-5)>0$

$D\geqq0$ から　$(p+1)(p-2)\geqq0$

よって　$p\leqq-1,\ 2\leqq p$　…… ①

$(\alpha-5)+(\beta-5)<0$ すなわち $(\alpha+\beta)-10<0$ から

$2p-10<0$　　よって　$p<5$　…… ②

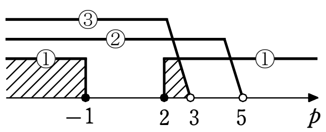
$(\alpha-5)(\beta-5)>0$ すなわち $\alpha\beta-5(\alpha+\beta)+25>0$ から

$p+2-5\cdot2p+25>0$

よって　$-9p+27>0$

ゆえに　$p<3$　…… ③

したがって，求める p の値の範囲は，①，②，③ の共通範囲で　$p\leqq-1,\ 2\leqq p<3$



(2)　1 つの解は 3 より大きく，他の解は 3 より小さいための必要十分条件は

$(\alpha-3)(\beta-3)<0$　　よって　$\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9<0$

ゆえに　$p+2-3\cdot2p+9<0$　　これを解いて　$p>\frac{11}{5}$

20 2 次方程式 $x^2-x+7=m(x+1)$ が虚数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$-9<m<3$

解説

右辺を展開して整理すると　$x^2-(m+1)x+7-m=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=\{-(m+1)\}^2-4\cdot1\cdot(7-m)=m^2+6m-27=(m-3)(m+9)$

虚数解をもつための必要十分条件は　$D<0$　すなわち　$(m-3)(m+9)<0$

よって，求める m の値の範囲は　$-9<m<3$

21 方程式 $(k^2-4)x^2-2(k+2)x-2=0$ が実数解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

解答　$k<-2,\ \frac{2}{3}\leqq k$

解説

$(k^2-4)x^2-2(k+2)x-2=0$　…… ①

[1]　$k^2-4=0$ すなわち $k=\pm2$ のとき

$k=2$ のとき，① は　$-8x-2=0$

これは 1 つの実数解 $x=-\frac{1}{4}$ をもつ。

$k=-2$ のとき，① は　$-2=0$

これは成り立たないから，解はない。

[2]　$k^2-4\neq0$ すなわち $k\neq\pm2$ のとき

① は 2 次方程式であり，その判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(k^2-4)\cdot(-2)=3k^2+4k-4$$
$$=(k+2)(3k-2)$$

① が実数解をもつための必要十分条件は　$D\geqq0$　すなわち　$(k+2)(3k-2)\geqq0$

$k\neq\pm2$ であるから　$k<-2,\ \frac{2}{3}\leqq k<2,\ 2<k$

[1]，[2] から，求める k の値の範囲は　$k<-2,\ \frac{2}{3}\leqq k$

22 2 つの 2 次方程式 $x^2+mx+m=0,\ x^2+mx+1=0$ がともに虚数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答　$0<m<2$

解説

$x^2+mx+m=0$　…… ①

$x^2+mx+1=0$　…… ②　とする。

① の判別式を D_1，② の判別式を D_2 とすると

$D_1=m^2-4m=m(m-4)$

$D_2=m^2-4=(m+2)(m-2)$

①，② がともに虚数解をもつための必要十分条件は　$D_1<0$　かつ　$D_2<0$

$D_1<0$ から　$m(m-4)<0$　　よって　$0<m<4$　…… ③

$D_2<0$ から　$(m+2)(m-2)<0$　　よって　$-2<m<2$　…… ④

求める m の値の範囲は，③ と ④ の共通範囲を求めて　$0<m<2$

23 2 つの 2 次方程式 $x^2+2mx-2m=0,\ x^2+(m-1)x+m^2=0$ が次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　少なくとも一方が実数解をもつ　　(2)　一方だけが実数解をもつ

解答　(1)　$m\leqq-2,\ -1\leqq m$　　(2)　$m\leqq-2,\ -1\leqq m<0,\ \frac{1}{3}<m$

解説

$x^2+2mx-2m=0$　…… ①

$x^2+(m-1)x+m^2=0$　…… ②　とする。

① の判別式を D_1，② の判別式を D_2 とすると

$$\frac{D_1}{4}=m^2-1\cdot(-2m)=m^2+2m=m(m+2)$$

$$D_2=(m-1)^2-4\cdot1\cdot m^2=-(3m^2+2m-1)=-(m+1)(3m-1)$$

(1)　①，② の少なくとも一方が実数解をもつための必要十分条件は

$D_1\geqq0$　または　$D_2\geqq0$

$D_1\geqq0$ から　$m(m+2)\geqq0$

よって　$m\leqq-2,\ 0\leqq m$　…… ③

$D_2\geqq0$ から　$-(m+1)(3m-1)\geqq0$

すなわち　$(m+1)(3m-1)\leqq0$

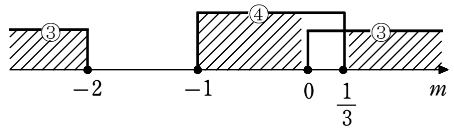
よって　$-1\leqq m\leqq\frac{1}{3}$　…… ④

求める m の値の範囲は，③ と ④ の範囲を合わせて　$m\leqq-2,\ -1\leqq m$

(2)　①，② の一方だけが実数解をもつための必要十分条件は，$D_1\geqq0,\ D_2\geqq0$ の一方だけが成り立つことである。

ゆえに，③，④ の一方だけが成り立つ m の値の範囲を求めて

$m\leqq-2,\ -1\leqq m<0,\ \frac{1}{3}<m$



24 2 次方程式 $x^2-2(m-3)x+4m=0$ が次のような異なる 2 つの解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　2 つとも正　　(2)　2 つとも負　　(3)　異符号

解答　(1)　$m>9$　　(2)　$0<m<1$　　(3)　$m<0$

解説

2 次方程式 $x^2-2(m-3)x+4m=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とし，判別式を D とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2(m-3),\ \ \alpha\beta=4m$

また　$\frac{D}{4}=\{-(m-3)\}^2-4m=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$

(1)　異なる 2 つの正の解をもつための必要十分条件は

$\frac{D}{4}>0$ で，$\alpha+\beta>0$ かつ，$\alpha\beta>0$

が成り立つことである。

$\frac{D}{4}>0$ から　$(m-1)(m-9)>0$

よって　$m<1,\ 9<m$　…… ①

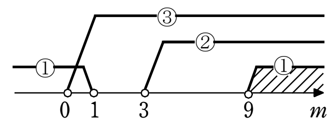
$\alpha+\beta>0$ から　$2(m-3)>0$

よって　$m>3$　…… ②

$\alpha\beta>0$ から　$4m>0$

よって　$m>0$　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$m>9$



(2)　異なる 2 つの負の解をもつための必要十分条件は

$\frac{D}{4}>0$ で，$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

が成り立つことである。

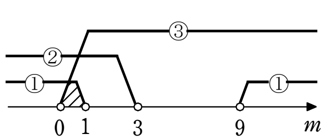
$\dfrac{D}{4}>0$ から　$m<1,\ 9<m$　……①

$\alpha+\beta<0$ から　$2(m-3)<0$

よって　$m<3$　……②

$\alpha\beta>0$ から　$m>0$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$0<m<1$



(3)　異符号の解をもつための必要十分条件は

$\alpha\beta<0$

が成り立つことである。

よって　$4m<0$　　ゆえに　$m<0$

25 2 次方程式 $x^2+2mx+2m^2-5=0$ が，次のような異なる 2 つの解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　2 つの解がともに 1 より大きい。

(2)　2 つの解がともに 1 より小さい。

(3)　1 つの解が 1 より大きく，他の解が 1 より小さい。

解答　(1)　$-\sqrt{5}<m<-2$　　(2)　$1<m<\sqrt{5}$　　(3)　$-2<m<1$

解説

2 次方程式 $x^2+2mx+2m^2-5=0$ の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2m$，$\alpha\beta=2m^2-5$

よって　$(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=-2m-2=-2(m+1)$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2m^2-5+2m+1$

$=2(m^2+m-2)=2(m+2)(m-1)$

また　$\dfrac{D}{4}=m^2-(2m^2-5)=-m^2+5=-(m+\sqrt{5})(m-\sqrt{5})$

(1)　異なる 2 つの 1 より大きい解をもつための必要十分条件は

$\dfrac{D}{4}>0$，$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$，$(\alpha-1)(\beta-1)>0$

$\dfrac{D}{4}>0$ から　$-(m+\sqrt{5})(m-\sqrt{5})>0$

よって　$-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$　……①

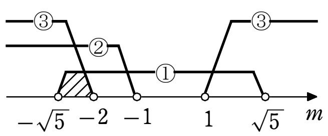
$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ から　$-2(m+1)>0$

よって　$m<-1$　……②

$(\alpha-1)(\beta-1)>0$ から　$2(m+2)(m-1)>0$

よって　$m<-2,\ 1<m$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$-\sqrt{5}<m<-2$



(2)　異なる 2 つの 1 より小さい解をもつための必要十分条件は

$\dfrac{D}{4}>0$，$(\alpha-1)+(\beta-1)<0$，$(\alpha-1)(\beta-1)>0$

$\dfrac{D}{4}>0$ から　$-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$　……①

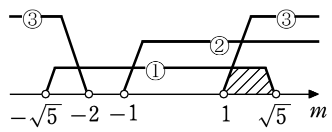
$(\alpha-1)+(\beta-1)<0$ から　$-2(m+1)<0$

よって　$m>-1$　……②

$(\alpha-1)(\beta-1)>0$ から　$2(m+2)(m-1)>0$

よって　$m<-2,\ 1<m$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$1<m<\sqrt{5}$



(3)　1 より大きい解と 1 より小さい解をもつための必要十分条件は　$(\alpha-1)(\beta-1)<0$

よって　$2(m+2)(m-1)<0$

ゆえに　$-2<m<1$

26 2 次方程式 $x^2+2mx+6-m=0$ が，1 より大きい異なる 2 つの解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$-7<m<-3$

解説

2 次方程式 $x^2+2mx+6-m=0$ の判別式を D，2 つの解を α，β とする。

この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつための必要十分条件は　$D>0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=m^2-(6-m)=(m+3)(m-2)$

よって　$(m+3)(m-2)>0$　　ゆえに　$m<-3,\ 2<m$　……①

また，$\alpha>1$ かつ $\beta>1$ であるための必要十分条件は

$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$　かつ　$(\alpha-1)(\beta-1)>0$

すなわち　$\alpha+\beta-2>0$　かつ　$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

ここで，解と係数の関係により，$\alpha+\beta=-2m$，$\alpha\beta=6-m$ であるから

$-2m-2>0$　かつ　$6-m-(-2m)+1>0$

よって　$m<-1$　かつ　$m>-7$

すなわち　$-7<m<-1$　……②

① と ② の共通範囲を求めて　$-7<m<-3$

27 3 次方程式 $3x^3-(a+3)x^2+a=0$ について

(1)　異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　ただ 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲とその実数解を求めよ。

解答　(1)　$a<-12,\ 0<a<\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}<a$　　(2)　$-12<a<0$，実数解は 1

解説

$3x^3-(a+3)x^2+a=-(x^2-1)a+3x^3-3x^2=-(x+1)(x-1)a+3x^2(x-1)$

$=(x-1)\{-(x+1)a+3x^2\}=(x-1)(3x^2-ax-a)$

よって，方程式は　$(x-1)(3x^2-ax-a)=0$　……①

ゆえに　$x-1=0$　または　$3x^2-ax-a=0$　……②

(1)　① が異なる 3 つの実数解をもつための必要十分条件は，② が 1 以外の異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって，② の判別式を D とすると

$D=(-a)^2-4\cdot3(-a)>0$　……③　かつ　$3\cdot1^2-a\cdot1-a\neq0$　……④

③ から　$a(a+12)>0$　　ゆえに　$a<-12,\ 0<a$

④ から　$a\neq\dfrac{3}{2}$

よって，求める a の値の範囲は　$a<-12,\ 0<a<\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}<a$

(2)　① がただ 1 つの実数解をもつのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　② が虚数解をもつとき

そのための条件は　$D=(-a)^2-4\cdot3(-a)<0$

よって　$-12<a<0$

[2]　② が $x=1$ を重解にもつとき

② が重解をもつための必要十分条件は　$D=(-a)^2-4\cdot3(-a)=0$

よって　$a=-12,\ 0$

重解は $x=-\dfrac{-a}{2\cdot3}=\dfrac{a}{6}$ であるから

$a=-12$ のとき　$x=\dfrac{-12}{6}=-2$

$a=0$　のとき　$x=0$

ゆえに，② が $x=1$ を重解にもつことはない。

[1]，[2] から，求める a の値の範囲は　$-12<a<0$

また，実数解は　1

28 a は実数の定数とする。x の 3 次方程式 $x^3-x^2+(a-6)x-3a=0$ ……① について，次の問いに答えよ。

(1)　3 次方程式 ① は a の値に関係なく，整数の解をもつ。その整数の解を求めよ。

(2)　3 次方程式 ① の解がすべて実数であるように，a の値の範囲を定めよ。

解答　(1)　$x=3$　　(2)　$a\leqq1$

解説

(1)　3 次方程式 ① の左辺を a について整理すると

$(x-3)a+(x^3-x^2-6x)=0$

よって　$(x-3)a+x(x+2)(x-3)=0$

したがって　$(x-3)(x^2+2x+a)=0$　……②

よって，3 次方程式 ① は a の値に関係なく $x=3$ を解にもつ。

(2)　② より，3 次方程式 ① の解がすべて実数となるのは，2 次方程式 $x^2+2x+a=0$ ……③ が実数解をもつときである。

2 次方程式 ③ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot a=1-a$

2 次方程式 ③ が実数解をもつのは $D\geqq0$ のときであるから

$1-a\geqq0$

したがって，求める a の値の範囲は　$a\leqq1$

29 3 次方程式 $x^3-3x^2+ax+2-a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　方程式が $x=1$ を解にもつことを示せ。

(2)　方程式が異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$a<3$

解説

(1)　$P(x)=x^3-3x^2+ax+2-a$ とすると

$P(1)=1-3+a+2-a=0$

よって，$x=1$ は方程式 $P(x)=0$ の解である。

(2)　(1) から，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x-1)(x^2-2x+a-2)$

$P(x)=0$ より

$x-1=0$　または　$x^2-2x+a-2=0$

$x^2-2x+a-2=0$ ……① とおくと，与えられた方程式が異なる 3 つの実数解をもつのは，① が $x\neq1$ である異なる 2 つの実数解をもつときである。

① が $x=1$ を解にもたないとき

$1^2-2\cdot1+a-2\neq0$　　ゆえに　$a\neq3$

① の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(a-2)=3-a$

$D>0$ から　$3-a>0$

よって　　　$a < 3$ （これは $a \fallingdotseq 3$ を満たす）