

2次方程式の解法•和と積クイズ

1 次の2次方程式を解け。

- (1) $x^2+x+1=0$
- (2) $3x^2-7x+5=0$
- (3) $-2x^2+6x-7=0$
- (4) $(x-3)(x-7)=-5$

解答 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (2) $x=\frac{7\pm\sqrt{11}i}{6}$ (3) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}i}{2}$ (4) $x=5\pm i$

解説

- (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
- (2) $x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot3\cdot5}}{2\cdot3}=\frac{7\pm\sqrt{-11}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{11}i}{6}$
- (3) $-2x^2+6x-7=0$ の両辺に -1 を掛けて $2x^2-6x+7=0$
よって $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot7}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}i}{2}$
- (4) $x^2-10x+26=0$ から $x=-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-1\cdot26}=5\pm i$

2 次の2次方程式を解け。

- (1) $x^2-\sqrt{2}x+1=0$
- (2) $4(x-1)^2+3=4(1-x)$

解答 (1) $x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$ (2) $x=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{2}$

解説

- (1) $x=\frac{-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$
- (2) 展開して整理すると $4x^2-4x+3=0$
よって $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot3}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{4}$
 $=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{4}=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{2}$

別解 移項すると $4(x-1)^2+4(x-1)+3=0$

$x-1=t$ とおくと $4t^2+4t+3=0$

よって $t=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot3}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{4}$
 $=\frac{-2\pm2\sqrt{2}i}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{2}i}{2}$

ゆえに $x=1+t=1+\frac{-1\pm\sqrt{2}i}{2}=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{2}$

3 次の2次方程式を解け。[各8点]

- (1) $x^2+x-1=0$
- (2) $x^2+5x+7=0$
- (3) $2x^2-6x+5=0$
- (4) $(x-3)(x-7)=-6$

解答 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
(2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{25-28}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$
(3) $x=\frac{3\pm\sqrt{9-10}}{2}=\frac{3\pm i}{2}$
(4) $x^2-10x+27=0$ より $x=5\pm\sqrt{25-27}=5\pm\sqrt{2}i$

解説

- (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
- (2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{25-28}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$
- (3) $x=\frac{3\pm\sqrt{9-10}}{2}=\frac{3\pm i}{2}$
- (4) $x^2-10x+27=0$ より $x=5\pm\sqrt{25-27}=5\pm\sqrt{2}i$

4 次の2次方程式を解け。

- (1) $3x^2+5x-2=0$
- (2) $x^2+x+1=0$
- (3) $\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}=0$

解答 (1) $x=-2, \frac{1}{3}$ (2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (3) $x=1\pm2i$

解説

- (1) $(x+2)(3x-1)=0$ よって $x=-2, \frac{1}{3}$
- (2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
- (3) 両辺に10を掛けて $x^2-2x+5=0$
よって $x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot5}=1\pm\sqrt{-4}=1\pm2i$

5 次の2次方程式を解け。

- (1) $6x^2+x-12=0$
- (2) $x^2-\sqrt{5}x+2=0$
- (3) $(x+1)(x+3)=x(9-2x)$
- (4) $\sqrt{2}x^2+x+\sqrt{2}=0$

解答 (1) $x=-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ (2) $x=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{3}i}{2}$ (3) $x=\frac{5\pm\sqrt{11}i}{6}$
(4) $x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{14}i}{4}$

解説

- (1) 左辺を因数分解して $(2x+3)(3x-4)=0$
よって $x=-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$
- (2) $x=\frac{-(-\sqrt{5})\pm\sqrt{(-\sqrt{5})^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{-3}}{2}$
 $=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{3}i}{2}$
- (3) 与式から $x^2+4x+3=9x-2x^2$
整理して $3x^2-5x+3=0$
よって $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{-11}}{6}$
 $=\frac{5\pm\sqrt{11}i}{6}$
- (4) 両辺に $\sqrt{2}$ を掛けて $2x^2+\sqrt{2}x+2=0$
よって $x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-4\cdot2\cdot2}}{2\cdot2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-14}}{4}$
 $=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{14}i}{4}$

6 次の2次方程式を解け。

- (1) $4x^2-8x+3=0$
- (2) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}=0$
- (3) $2x^2+4\sqrt{3}x+7=0$
- (4) $2x(3-x)=2x+3$
- (5) $(2+\sqrt{3})x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2=0$

解答 (1) $x=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{105}}{12}$ (3) $x=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{2}i}{2}$
(4) $x=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}$ (5) $x=-\sqrt{3}+1$

解説

- (1) 左辺を因数分解して $(2x-1)(2x-3)=0$
よって $x=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
- (2) 両辺に12を掛けて $6x^2+3x-4=0$
よって $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot6\cdot(-4)}}{2\cdot6}=\frac{-3\pm\sqrt{105}}{12}$
- (3) $x=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2\cdot7}}{2}=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{-2}}{2}$
 $=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{2}i}{2}$
- (4) 与式を整理して $2x^2-4x+3=0$
よって $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot3}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}$
- (5) 両辺に $2-\sqrt{3}$ を掛けて
 $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})x^2+2(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})x+2(2-\sqrt{3})=0$
すなわち $x^2+2(\sqrt{3}-1)x+2(2-\sqrt{3})=0$
よって $x=-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2-2(2-\sqrt{3})}$
 $=-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{4-2\sqrt{3}-4+2\sqrt{3}}$
 $=-\sqrt{3}+1$

7 次の2次方程式を解け。

- (1) $x^2=-18$
- (2) $x^2+5x+7=0$
- (3) $-x^2+4x-7=0$
- (4) $5x^2+3x+2=0$
- (5) $3x^2-\sqrt{5}x+1=0$
- (6) $x^2+4\sqrt{3}x+13=0$
- (7) $(x+1)(x+3)=2x$
- (8) $1.4x-1.2x^2=0.6$
- (9) $\frac{x^2+1}{2}=\frac{x-1}{3}$

解答 (1) $x=\pm3\sqrt{2}i$ (2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$ (3) $x=2\pm\sqrt{3}i$
(4) $x=\frac{-3\pm\sqrt{31}i}{10}$ (5) $x=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{7}i}{6}$ (6) $x=-2\sqrt{3}\pm i$
(7) $x=-1\pm\sqrt{2}i$ (8) $x=\frac{7\pm\sqrt{23}i}{12}$ (9) $x=\frac{1\pm\sqrt{14}i}{3}$

解説

- (1) $x=\pm\sqrt{-18}=\pm\sqrt{18}i=\pm3\sqrt{2}i$
- (2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$
- (3) 両辺に -1 を掛けると $x^2-4x+7=0$
よって $x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot7}=2\pm\sqrt{-3}=2\pm\sqrt{3}i$

$$(4) \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{-3 \pm \sqrt{-31}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{31}i}{10}$$

$$(5) \quad x = \frac{-(-\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-7}}{6} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{7}i}{6}$$

$$(6) \quad x = -2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 13} = -2\sqrt{3} \pm \sqrt{-1} = -2\sqrt{3} \pm i$$

$$(7) \quad \text{方程式を整理すると} \quad x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\text{よって} \quad x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot 3} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

$$(8) \quad \text{両辺に 5 を掛けると} \quad 7x - 6x^2 = 3$$

$$\text{よって} \quad 6x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm \sqrt{-23}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{23}i}{12}$$

$$(9) \quad \text{両辺に 6 を掛けると} \quad 3(x^2 + 1) = 2(x - 1)$$

$$\text{整理すると} \quad 3x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot 5}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{-14}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{14}i}{3}$$

8 和が 2，積が 3 である 2 数を求めよ。

解答 $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$

解説

和が 2，積が 3 である 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2 - 2x + 3 = 0$

求める 2 数は，この 2 次方程式を解いて $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$

9 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

(1) 和が 1，積が 1 (2) 和が -5，積が 3

解答 (1) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ (2) $\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$

解説

(1) 和が 1，積が 1 である 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2 - x + 1 = 0$

求める 2 数は，この 2 次方程式を解いて $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

(2) 和が -5，積が 3 である 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2 + 5x + 3 = 0$

求める 2 数は，この 2 次方程式を解いて $\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$

10 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

(1) 和が 1，積が -2 (2) 和が 4，積が 2 (3) 和が -1，積が 1

解答 (1) $-1, 2$ (2) $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$ (3) $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

解説

(1) 求める 2 数は 2 次方程式 $x^2 - x - 2 = 0$ の解である。

これを解いて $x = -1, 2$

よって $-1, 2$

(2) 求める 2 数は 2 次方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ の解である。

これを解いて $x = 2 \pm \sqrt{2}$

よって $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$

(3) 求める 2 数は 2 次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解である。

これを解いて $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

よって $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$