

2次方程式の解法・和と積クイズ

[1] 次の2次方程式を解け。

$$(1) x^2 + x + 1 = 0 \quad (2) 3x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$(3) -2x^2 + 6x - 7 = 0 \quad (4) (x-3)(x-7) = -5$$

解答 (1) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (2) $x = \frac{7 \pm \sqrt{11}}{6}$ (3) $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (4) $x = 5 \pm i$

解説 (1) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$(2) x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{-11}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{11}i}{6}$$

$$(3) -2x^2 + 6x - 7 = 0 \text{ の両辺に } -1 \text{ を掛けて } 2x^2 - 6x + 7 = 0$$

よって $x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 2 \cdot 7}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}i}{2}$

$$(4) x^2 - 10x + 26 = 0 \text{ から } x = -(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 1 \cdot 26} = 5 \pm i$$

[2] 次の2次方程式を解け。

$$(1) x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0 \quad (2) 4(x-1)^2 + 3 = 4(1-x)$$

解答 (1) $x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$ (2) $x = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{2}$

解説 (1) $x = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{(-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$

$$(2) \text{ 展開して整理すると } 4x^2 - 4x + 3 = 0$$

よって $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{4}$
 $= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{2}$

別解 移項すると $4(x-1)^2 + 4(x-1) + 3 = 0$

$$x-1=t \text{ とおくと } 4t^2 + 4t + 3 = 0$$

よって $t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{4}$
 $= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}i}{2}$

ゆえに $x = 1 + t = 1 + \frac{-1 \pm \sqrt{2}i}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{2}$

[3] 次の2次方程式を解け。[各8点]

$$(1) x^2 + x - 1 = 0 \quad (2) x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$(3) 2x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (4) (x-3)(x-7) = -6$$

解答 (1) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$(2) x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-28}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) x = \frac{3 \pm \sqrt{9-10}}{2} = \frac{3 \pm i}{2}$$

$$(4) x^2 - 10x + 27 = 0 \text{ より } x = 5 \pm \sqrt{25-27} = 5 \pm \sqrt{2}i$$

(解説)

$$(1) x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(2) x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-28}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) x = \frac{3 \pm \sqrt{9-10}}{2} = \frac{3 \pm i}{2}$$

$$(4) x^2 - 10x + 27 = 0 \text{ より } x = 5 \pm \sqrt{25-27} = 5 \pm \sqrt{2}i$$

[4] 次の2次方程式を解け。

$$(1) 3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad (2) x^2 + x + 1 = 0 \quad (3) \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{2} = 0$$

解答 (1) $x = -2, \frac{1}{3}$ (2) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (3) $x = 1 \pm 2i$

(解説)

$$(1) (x+2)(3x-1) = 0 \text{ よって } x = -2, \frac{1}{3}$$

$$(2) x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) \text{ 両辺に } 10 \text{ を掛けて } x^2 - 2x + 5 = 0$$

よって $x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot 5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$

[5] 次の2次方程式を解け。

$$(1) 6x^2 + x - 12 = 0 \quad (2) x^2 - \sqrt{5}x + 2 = 0$$

$$(3) (x+1)(x+3) = x(9-2x)$$

$$(4) \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

解答 (1) $x = -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ (2) $x = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{3}i}{2}$ (3) $x = \frac{5 \pm \sqrt{11}i}{6}$

$$(4) x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{14}i}{4}$$

(解説)

$$(1) \text{ 左辺を因数分解して } (2x+3)(3x-4) = 0$$

よって $x = -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

$$(2) x = \frac{-(-\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-3}}{2}$$

 $= \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$(3) \text{ 与式から } x^2 + 4x + 3 = 9x - 2x^2$$

整理して $3x^2 - 5x + 3 = 0$

よって $x = \frac{(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{6}$
 $= \frac{5 \pm \sqrt{11}i}{6}$

$$(4) \text{ 両辺に } \sqrt{2} \text{ を掛けて } 2x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0$$

よって $x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-14}}{4}$
 $= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{14}i}{4}$

[6] 次の2次方程式を解け。

$$(1) 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad (2) \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{3} = 0 \quad (3) 2x^2 + 4\sqrt{3}x + 7 = 0$$

$$(4) 2x(3-x) = 2x + 3 \quad (5) (2+\sqrt{3})x^2 + 2(\sqrt{3}+1)x + 2 = 0$$

解答 (1) $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (2) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{12}$ (3) $x = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{2}i}{2}$

$$(4) x = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} \quad (5) x = -\sqrt{3} + 1$$

(解説)

$$(1) \text{ 左辺を因数分解して } (2x-1)(2x-3) = 0$$

よって $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$$(2) \text{ 両辺に } 12 \text{ を掛けて } 6x^2 + 3x - 4 = 0$$

よって $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4)}}{2 \cdot 6} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{12}$

$$(3) x = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 7}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{-2}}{2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{2}i}{2}$$

$$(4) \text{ 与式を整理して } 2x^2 - 4x + 3 = 0$$

よって $x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2}$

$$(5) \text{ 両辺に } 2 - \sqrt{3} \text{ を掛けて }$$

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})x^2 + 2(\sqrt{3} + 1)(2 - \sqrt{3})x + 2(2 - \sqrt{3}) = 0$$

すなわち $x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x + 2(2 - \sqrt{3}) = 0$

よって $x = -(\sqrt{3} - 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 - 2(2 - \sqrt{3})}$
 $= -(\sqrt{3} - 1) \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3}}$

$$= -\sqrt{3} + 1$$

[7] 次の2次方程式を解け。

$$(1) x^2 = -18 \quad (2) x^2 + 5x + 7 = 0 \quad (3) -x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$(4) 5x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (5) 3x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0 \quad (6) x^2 + 4\sqrt{3}x + 13 = 0$$

$$(7) (x+1)(x+3) = 2x \quad (8) 1.4x - 1.2x^2 = 0.6 \quad (9) \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x - 1}{3}$$

解答 (1) $x = \pm 3\sqrt{2}i$ (2) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (3) $x = 2 \pm \sqrt{3}i$

$$(4) x = \frac{-3 \pm \sqrt{31}i}{10} \quad (5) x = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{7}i}{6} \quad (6) x = -2\sqrt{3} \pm i$$

$$(7) x = -1 \pm \sqrt{2}i \quad (8) x = \frac{7 \pm \sqrt{23}i}{12} \quad (9) x = \frac{1 \pm \sqrt{14}i}{3}$$

(解説)

$$(1) x = \pm \sqrt{-18} = \pm \sqrt{18}i = \pm 3\sqrt{2}i$$

$$(2) x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) \text{ 両辺に } -1 \text{ を掛けると } x^2 - 4x + 7 = 0$$

よって $x = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 7} = 2 \pm \sqrt{-3} = 2 \pm \sqrt{3}i$

$$(4) x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{-3 \pm \sqrt{-31}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{31}i}{10}$$

$$(5) x = \frac{-(-\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-7}}{6} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{7}i}{6}$$

$$(6) x = -2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 13} = -2\sqrt{3} \pm \sqrt{-1} = -2\sqrt{3} \pm i$$

$$(7) \text{ 方程式を整理すると } x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\text{ よって } x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot 3} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

$$(8) \text{ 両辺に } 5 \text{ を掛けると } 7x - 6x^2 = 3$$

$$\text{ よって } 6x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\text{ ゆえに } x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm \sqrt{-23}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{23}i}{12}$$

$$(9) \text{ 両辺に } 6 \text{ を掛けると } 3(x^2 + 1) = 2(x - 1)$$

$$\text{ 整理すると } 3x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$\text{ ゆえに } x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot 5}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{-14}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{14}i}{3}$$

8 和が 2, 積が 3 である 2 数を求めよ。

解答 $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$

解説

和が 2, 積が 3 である 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2 - 2x + 3 = 0$

求める 2 数は、この 2 次方程式を解いて $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$

9 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

(1) 和が 1, 積が 1 (2) 和が -5, 積が 3

解答 (1) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ (2) $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$

解説

(1) 和が 1, 積が 1 である 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2 - x + 1 = 0$

求める 2 数は、この 2 次方程式を解いて $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

(2) 和が -5, 積が 3 である 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2 + 5x + 3 = 0$

求める 2 数は、この 2 次方程式を解いて $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$

10 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

(1) 和が 1, 積が -2 (2) 和が 4, 積が 2 (3) 和が -1, 積が 1

解答 (1) -1, 2 (2) $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$ (3) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

解説

(1) 求める 2 数は 2 次方程式 $x^2 - x - 2 = 0$ の解である。

これを解いて $x = -1, 2$

よって -1, 2

(2) 求める 2 数は 2 次方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ の解である。

これを解いて $x = 2 \pm \sqrt{2}$

よって $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$

(3) 求める 2 数は 2 次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解である。

これを解いて $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

よって $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$