2次方程式の作成クイズ

1 次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。

(1) $-3,\ 4$　　(2) $1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$　　(3) $-2+i,\ -2-i$

解答 (1) $x^2-x-12=0$　(2) $x^2-2x-1=0$　(3) $x^2+4x+5=0$

解説

(1) 2 数の和は $(-3)+4=1$

2 数の積は $(-3)\cdot 4=-12$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2-x-12=0$

(2) 2 数の和は $(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$

2 数の積は $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2-2x-1=0$

(3) 2 数の和は $(-2+i)+(-2-i)=-4$

2 数の積は $(-2+i)(-2-i)=(-2)^2-i^2=4+1=5$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2+4x+5=0$

2 2 次方程式 $2x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。

(1) $2\alpha-1,\ 2\beta-1$　　(2) $-\alpha,\ -\beta$　　(3) $\alpha^2,\ \beta^2$

解答 (1) $x^2-x+8=0$　(2) $2x^2+3x+5=0$　(3) $4x^2+11x+25=0$

解説

解と係数の関係から $\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

(1) $(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2=2\cdot\dfrac{3}{2}-2=1$

$(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=4\cdot\dfrac{5}{2}-2\cdot\dfrac{3}{2}+1=8$

したがって，求める 2 次方程式の 1 つは $x^2-x+8=0$

(2) $(-\alpha)+(-\beta)=-(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{2}$

$(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

したがって，求める 2 次方程式の 1 つは $x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}=0$

すなわち $2x^2+3x+5=0$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{5}{2}=-\dfrac{11}{4}$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

したがって，求める 2 次方程式の 1 つは $x^2+\dfrac{11}{4}x+\dfrac{25}{4}=0$

すなわち $4x^2+11x+25=0$

3 次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(1) $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$　　(2) $3+5i,\ 3-5i$

解答 (1) $x^2-4x+1=0$　(2) $x^2-6x+34=0$

解説

(1) 2 数の和は $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

2 数の積は $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

求める 2 次方程式の 1 つは $x^2-4x+1=0$

(2) 2 数の和は $(3+5i)+(3-5i)=6$

2 数の積は $(3+5i)(3-5i)=9-25i^2=34$

求める 2 次方程式の 1 つは $x^2-6x+34=0$

4 (1) $\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(2) 和が 3，積が 3 である 2 数を求めよ。

解答 (1) $2x^2+2x+3=0$　(2) $\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{3-\sqrt{3}\,i}{2}$

解説

(1) 2 数の和は $\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}=-1$，

2 数の積は $\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}=\dfrac{(-1)^2-(\sqrt{5}\,i)^2}{4}=\dfrac{3}{2}$

よって，求める 2 次方程式は $x^2+x+\dfrac{3}{2}=0$ ……①

① の両辺を 2 倍して $2x^2+2x+3=0$

(2) 2 数を α，β とすると $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=3$

したがって，α，β は 2 次方程式 $x^2-3x+3=0$ の 2 つの解である。

この 2 次方程式を解いて $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

よって，求める 2 数は $\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{3-\sqrt{3}\,i}{2}$

5 (1) 次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

（ア） $3,\ -5$　　（イ） $2+\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5}$　　（ウ） $3+4i,\ 3-4i$

(2) 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

（ア） 和が 7，積が 3　　（イ） 和が -1，積が 1

解答 (1) （ア） $x^2+2x-15=0$　（イ） $x^2-4x-1=0$　（ウ） $x^2-6x+25=0$

(2) （ア） $\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$，$\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}$　（イ） $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

解説

(1) （ア） 2 数の和は $3+(-5)=-2$

2 数の積は $3\cdot(-5)=-15$

求める 2 次方程式の 1 つは $x^2+2x-15=0$

（イ） 2 数の和は $(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$

2 数の積は $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1$

求める 2 次方程式の 1 つは $x^2-4x-1=0$

（ウ） 2 数の和は $(3+4i)+(3-4i)=6$

2 数の積は $(3+4i)(3-4i)=9-16i^2=25$

求める 2 次方程式の 1 つは $x^2-6x+25=0$

(2) （ア） 和が 7，積が 3 である 2 数を解とする 2 次方程式は

$x^2-7x+3=0$

これを解くと $x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\dfrac{7\pm\sqrt{37}}{2}$

よって，求める 2 数は $\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$，$\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}$

（イ） 和が -1，積が 1 である 2 数を解とする 2 次方程式は

$x^2+x+1=0$

これを解くと $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

よって，求める 2 数は $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

6 2 次方程式 $x^2+5x+3=0$ の 2 つの解を α，β とする。

(1) $\alpha^2+4\alpha+\beta$，$\beta^2+4\beta+\alpha$ を 2 つの解とする 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 となるものを求めよ。

(2) 初めの 2 次方程式 $x^2+5x+3=0$ の 2 つの解が $\alpha^2+p\alpha+q$，$\beta^2+p\beta+q$ と表されるとき，定数 p，q の値を求めよ。

解答 (1) $x^2+6x-4=0$　(2) $p=6$，$q=3$ または $p=4$，$q=-2$

解説

解と係数の関係から $\alpha+\beta=-5$，$\alpha\beta=3$

(1) α，β は $x^2+5x+3=0$ の解であるから

$\alpha^2+5\alpha+3=0$，$\beta^2+5\beta+3=0$

よって $\alpha^2=-5\alpha-3$，$\beta^2=-5\beta-3$

ゆえに $\alpha^2+4\alpha+\beta=(-5\alpha-3)+4\alpha+\beta$

$=-\alpha+\beta-3$

同様に $\beta^2+4\beta+\alpha=-\beta+\alpha-3$

ここで $(-\alpha+\beta-3)+(-\beta+\alpha-3)=-6$，

$(-\alpha+\beta-3)(-\beta+\alpha-3)=-(\alpha-\beta+3)(\alpha-\beta-3)=-\{(\alpha-\beta)^2-9\}$

$=-(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta+9=-(-5)^2+4\cdot3+9$

$=-4$

よって，求める 2 次方程式は $x^2+6x-4=0$

(2) 条件から

[1] $\begin{cases}\alpha^2+p\alpha+q=\alpha & \cdots\cdots ①\\ \beta^2+p\beta+q=\beta & \cdots\cdots ②\end{cases}$ または [2] $\begin{cases}\alpha^2+p\alpha+q=\beta & \cdots\cdots ③\\ \beta^2+p\beta+q=\alpha & \cdots\cdots ④\end{cases}$

[1] のとき

①−② から $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+p(\alpha-\beta)=\alpha-\beta$

$\alpha\neq\beta$ であるから $\alpha+\beta+p=1$ すなわち $-5+p=1$

よって $p=6$

①+② から $\alpha^2+\beta^2+p(\alpha+\beta)+2q=\alpha+\beta$ ……⑤

ここで $\alpha^2+\beta^2=(-5\alpha-3)+(-5\beta-3)=-5(\alpha+\beta)-6$

$=-5\cdot(-5)-6=19$

よって，⑤ から $19+6\cdot(-5)+2q=-5$

これを解いて $q=3$

[2] のとき

[1] と同様にして，③−④，③+④ から，それぞれ $p=4$，$q=-2$ が得られる。

したがって $p=6$，$q=3$ または $p=4$，$q=-2$

7 2 次方程式 $2x^2-x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(1) $\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$　　(2) α^2，β^2

解答 (1) $3x^2-x+2=0$　(2) $4x^2+11x+9=0$

解説

2 次方程式 $2x^2-x+3=0$ において，解と係数の関係により

$\alpha+\beta=-\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{2}$，　$\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{2}\div\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=1\div\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{3}$

ゆえに，$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=0$$

両辺に 3 を掛けて　$3x^2-x+2=0$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{3}{2}=-\dfrac{11}{4}$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

ゆえに，α^2，β^2 を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-\left(-\dfrac{11}{4}\right)x+\dfrac{9}{4}=0$　すなわち　$x^2+\dfrac{11}{4}x+\dfrac{9}{4}=0$

両辺に 4 を掛けて　$4x^2+11x+9=0$

8 2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(1) $\alpha+1$，$\beta+1$　　(2) $\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$　　(3) α^3，β^3

解答　(1) $x^2-4x+6=0$　(2) $3x^2-2x+1=0$　(3) $x^2+10x+27=0$

解説

2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ において，解と係数の関係により

$\alpha+\beta=2$，　$\alpha\beta=3$

(1) $(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=2+2=4$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=3+2+1=6$

よって，$\alpha+1$，$\beta+1$ を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-4x+6=0$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{3}$，　$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{3}$

よって，$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}=0$

両辺に 3 を掛けて　$3x^2-2x+1=0$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot3\cdot2=-10$

$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=3^3=27$

よって，α^3，β^3 を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2+10x+27=0$

9 (1) 2 次方程式 $x^2-5x+9=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 数 $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(2) x の 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 2 つの解を α，β とする。$\alpha+2$，$\beta+2$ を解とする x の 2 次方程式が $x^2+qx+p=0$ であるとき，p，q の値を求めよ。

解答　(1) $x^2-14x+45=0$　(2) $p=0$，$q=-4$

解説

(1) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=5$，　$\alpha\beta=9$

よって　$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=5+9=14$，　$(\alpha+\beta)\alpha\beta=5\cdot9=45$

ゆえに，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-14x+45=0$

(2) 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ において，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-p$　…… ①，　$\alpha\beta=q$　…… ②

2 次方程式 $x^2+qx+p=0$ において，解と係数の関係から

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-q$　…… ③

$(\alpha+2)(\beta+2)=p$　…… ④

③ から　$\alpha+\beta+4=-q$

① を代入して　$-p+4=-q$

よって　$p-q=4$　…… ⑤

④ から　$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=p$

①，② を代入して　$q-2p+4=p$

よって　$3p-q=4$　…… ⑥

⑥－⑤ から　$p=0$　このとき，⑤ から　$q=-4$

10 次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(1) -2，5　　(2) $2-\sqrt{5}$，$2+\sqrt{5}$　　(3) $-1-3i$，$-1+3i$

解答　(1) $x^2-3x-10=0$　(2) $x^2-4x-1=0$　(3) $x^2+2x+10=0$

解説

(1) 2 数の和は　$(-2)+5=3$　　積は　$(-2)\cdot5=-10$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2-3x-10=0$

(2) 2 数の和は　$(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})=4$

積は　$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=2^2-(\sqrt{5})^2=4-5=-1$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2-4x-1=0$

(3) 2 数の和は　$(-1-3i)+(-1+3i)=-2$

積は　$(-1-3i)(-1+3i)=(-1)^2-(3i)^2=1+9=10$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2+2x+10=0$

11 次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(1) $-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$　　(2) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$　　(3) $\dfrac{2-\sqrt{5}i}{3}$，$\dfrac{2+\sqrt{5}i}{3}$

解答　(1) $6x^2+x-12=0$　(2) $4x^2-12x+7=0$　(3) $3x^2-4x+3=0$

解説

(1) 2 数の和は　$-\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{-9+8}{6}=-\dfrac{1}{6}$

積は　$\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\dfrac{4}{3}=-2$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$x^2+\dfrac{1}{6}x-2=0$　すなわち　$6x^2+x-12=0$

(2) 2 数の和は　$\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}=3$

積は　$\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3^2-(\sqrt{2})^2}{4}=\dfrac{9-2}{4}=\dfrac{7}{4}$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$x^2-3x+\dfrac{7}{4}=0$　すなわち　$4x^2-12x+7=0$

(3) 2 数の和は　$\dfrac{2-\sqrt{5}i}{3}+\dfrac{2+\sqrt{5}i}{3}=\dfrac{4}{3}$

積は　$\dfrac{2-\sqrt{5}i}{3}\cdot\dfrac{2+\sqrt{5}i}{3}=\dfrac{2^2-(\sqrt{5}i)^2}{9}=\dfrac{4-5i^2}{9}=1$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$x^2-\dfrac{4}{3}x+1=0$　すなわち　$3x^2-4x+3=0$

12 次の 2 数を解とする 2 次方程式のうち，係数がすべて整数であるものを作れ。

(1) 2，3　　(2) $\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{3}{2}$

(3) $\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$，$\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$　　(4) $\dfrac{1-\sqrt{2}i}{2}$，$\dfrac{1+\sqrt{2}i}{2}$

解答　(1) $x^2-5x+6=0$　(2) $6x^2+5x-6=0$　(3) $3x^2-10x+6=0$
(4) $4x^2-4x+3=0$

解説

(1) 2 数の和は　$2+3=5$

2 数の積は　$2\cdot3=6$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-5x+6=0$

(2) 2 数の和は　$\dfrac{2}{3}+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{2^2-3^2}{6}=-\dfrac{5}{6}$

2 数の積は　$\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-1$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2+\dfrac{5}{6}x-1=0$

両辺に 6 を掛けて　$6x^2+5x-6=0$

(3) 2 数の和は　$\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}+\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}=\dfrac{10}{3}$

2 数の積は　$\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}\cdot\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}=2$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-\dfrac{10}{3}x+2=0$

両辺に 3 を掛けて　$3x^2-10x+6=0$

(4) 2 数の和は　$\dfrac{1-\sqrt{2}i}{2}+\dfrac{1+\sqrt{2}i}{2}=1$

2 数の積は　$\dfrac{1-\sqrt{2}i}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{3}{4}$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-x+\dfrac{3}{4}=0$

両辺に 4 を掛けて　$4x^2-4x+3=0$

13 2 次方程式 $x^2-2x+7=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。

(1) $\alpha+2$，$\beta+2$　　(2) -2α，-2β　　(3) α^2，β^2

解答　(1) $x^2-6x+15=0$　(2) $x^2+4x+28=0$　(3) $x^2+10x+49=0$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，　$\alpha\beta=7$

(1) $(\alpha+2)+(\beta+2)=\alpha+\beta+4=2+4=6$

$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=7+2\cdot2+4=15$

ゆえに，$\alpha+2$，$\beta+2$ を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-6x+15=0$

(2) $(-2\alpha)+(-2\beta)=-2(\alpha+\beta)=-2\cdot2=-4$

$(-2\alpha)(-2\beta)=4\alpha\beta=4\cdot7=28$

ゆえに，-2α，-2β を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2+4x+28=0$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot7=-10$

$\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=7^2=49$

ゆえに，α^2，β^2 を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2+10x+49=0$

14 2 次方程式 $4x^2+5x+2=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α^3 と β^3 を解とする 2 次方程式を作れ。ただし，係数は整数にせよ。

解答　$64x^2+5x+8=0$

解説

$4x^2+5x+2=0$ の 2 つの解が α，β であるから

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{4},\quad \alpha\beta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

よって　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(-\frac{5}{4}\right)^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$

$$=-\frac{125}{64}+\frac{15}{8}=-\frac{5}{64}$$

$$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

したがって，α^3 と β^3 を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2+\frac{5}{64}x+\frac{1}{8}=0$　　よって　$64x^2+5x+8=0$

15 2 次方程式 $x^2+x-3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。

(1)　$\alpha-2$，$\beta-2$　　(2)　$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$　　(3)　α^2，β^2

解答　(1)　$x^2+5x+3=0$　　(2)　$x^2+4x+3=0$　　(3)　$x^2-7x+9=0$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-3$

(1)　$(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=-1-4=-5$

$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=-3-2\cdot(-1)+4=3$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2+5x+3=0$

(2)　$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=(-1)+(-3)=-4$

$(\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=(-1)\cdot(-3)=3$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2+4x+3=0$

(3)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot(-3)=7$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-3)^2=9$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2-7x+9=0$

16 2 次方程式 $x^2+2x+4=0$ の 2 つの解が α，β のとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。ただし，係数は整数とする。

(1)　$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$　　(2)　α^2，β^2　　(3)　$\alpha+3$，$\beta+3$　　(4)　$\frac{\beta}{\alpha}$，$\frac{\alpha}{\beta}$

解答　(1)　$x^2-2x-8=0$　　(2)　$x^2+4x+16=0$　　(3)　$x^2-4x+7=0$

(4)　$x^2+x+1=0$

解説

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=4$

(1)　$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-2+4=2$，　$(\alpha+\beta)\alpha\beta=-2\cdot4=-8$

したがって，求める 2 次方程式は　$x^2-2x-8=0$

(2)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot4=-4$，　$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=4^2=16$

したがって，求める 2 次方程式は　$x^2+4x+16=0$

(3)　$(\alpha+3)+(\beta+3)=(\alpha+\beta)+6=-2+6=4$

$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9=4+3\cdot(-2)+9=7$

したがって，求める 2 次方程式は　$x^2-4x+7=0$

(4)　$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(-2)^2-2\cdot4}{4}=-1$，　$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=1$

したがって，求める 2 次方程式は　$x^2+x+1=0$

17 2 次方程式 $x^2+x-3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。

(1)　$\alpha-1$，$\beta-1$　　(2)　$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$　　(3)　α^2，β^2

解答　(1)　$x^2+3x-1=0$　　(2)　$x^2+4x+3=0$　　(3)　$x^2-7x+9=0$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-3$

(1)　2 数の和は　$(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=-1-2=-3$

2 数の積は　$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-3-(-1)+1=-1$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2+3x-1=0$

(2)　2 数の和は　$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=(-1)+(-3)=-4$

2 数の積は　$(\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=(-1)\cdot(-3)=3$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2+4x+3=0$

(3)　2 数の和は　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot(-3)=7$

2 数の積は　$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-3)^2=9$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2-7x+9=0$

18 2 次方程式 $3x^2-6x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 数 α^3，β^3 を解とする 2 次方程式を作れ。

解答　$27x^2-162x+1=0$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\frac{-6}{3}=2$，$\alpha\beta=\frac{1}{3}$

したがって　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot2=6$

$$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

よって，α^3，β^3 を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-6x+\frac{1}{27}=0$

すなわち　$27x^2-162x+1=0$

19 2 次方程式 $2x^2+5x+8=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 数 $\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1}{\beta}$ を解とする 2 次方程式を作れ。

解答　$8x^2+5x+2=0$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\frac{5}{2}$，$\alpha\beta=\frac{8}{2}=4$

よって　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{5}{2}}{4}=-\frac{5}{8}$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{4}$$

したがって，$\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1}{\beta}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2+\frac{5}{8}x+\frac{1}{4}=0$

すなわち　$8x^2+5x+2=0$

20 2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 数 α^2，β^2 を解とする 2 次方程式を作れ。

解答　$x^2-7x+1=0$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=1$

よって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot1=7$，$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=1$

したがって，α^2，β^2 を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-7x+1=0$