1の3乗根クイズ

$\boxed{1}$ 1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，次の値を求めよ。

(1) ω^6 (2) $\omega^4+\omega^2+1$

解答 (1) 1 (2) 0

解説

(1) ω は 1 の 3 乗根であるから $\omega^3=1$

よって $\omega^6=(\omega^3)^2=1^2=1$

(2) $x^3=1$ より $(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって，ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから

$\omega^2+\omega+1=0$

また，$\omega^3=1$ であるから

$\omega^4+\omega^2+1=\omega\cdot\omega^3+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

$\boxed{2}$ 1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。

[10点×2=20点]

(1) $1+\omega+\omega^2$ (2) $1+\omega^4+\omega^8$

解答 (1) $x^3=1$ より $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって，ω は 2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解である。

したがって $\omega^2+\omega+1=0$

すなわち $1+\omega+\omega^2=0$

(2) $\omega^3=1$ であるから $\omega^4=\omega^3\cdot\omega=\omega$，$\omega^8=(\omega^4)^2=\omega^2$

よって $1+\omega^4+\omega^8=1+\omega+\omega^2=0$

解説

(1) $x^3=1$ より $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって，ω は 2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解である。

したがって $\omega^2+\omega+1=0$

すなわち $1+\omega+\omega^2=0$

(2) $\omega^3=1$ であるから $\omega^4=\omega^3\cdot\omega=\omega$，$\omega^8=(\omega^4)^2=\omega^2$

よって $1+\omega^4+\omega^8=1+\omega+\omega^2=0$

$\boxed{3}$ 1 の 3 乗根で虚数のものは 2 つあり，その一方を ω とする。

(1) 他方の虚数解は ω と共役な複素数で，ω^2 に等しいことを示せ。

(2) $\omega^2+\omega+1$，$\omega^4+\omega^5$ の値を，それぞれ求めよ。

解答 (1) 略 (2) $\omega^2+\omega+1=0$，$\omega^4+\omega^5=-1$

解説

x を 1 の 3 乗根とすると $x^3=1$ すなわち $x^3-1=0$

左辺を因数分解して $(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって $x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

これを解いて，1 の 3 乗根は $1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(1) $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$
$$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

よって，1 の 3 乗根で虚数のものの一方を ω とすると，他方は ω と共役な複素数であり，ω^2 に等しい。

(2) ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから $\omega^2+\omega+1=0$

また，ω は 1 の 3 乗根であるから $\omega^3=1$

よって $\omega^4+\omega^5=\omega^3(\omega+\omega^2)=\omega+\omega^2$

ここで，$\omega^2+\omega+1=0$ であるから $\omega+\omega^2=-1$

ゆえに $\omega^4+\omega^5=-1$

$\boxed{4}$ 1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^8+\omega^4+1$ (2) $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}$

解答 (1) 0 (2) -1

解説

ω は 1 の 3 乗根であるから $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

(2) $P=\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}$ とすると $P=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}$

$\omega^2+\omega+1=0$ より，$\omega+1=-\omega^2$ であるから

$$P=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$$

別解 $P=\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^3}{\omega}+\dfrac{\omega^3}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1$

$\boxed{5}$ (1) 1 の 3 乗根を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とする。

（ア） ω^2 も 1 の 3 乗根であることを示せ。

（イ） $\omega^7+\omega^8$，$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1$，$(\omega+2\omega^2)^2+(2\omega+\omega^2)^2$ の値をそれぞれ求めよ。

解答 (1) $1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) （ア） 略

（イ） $\omega^7+\omega^8=-1$，$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1=0$，$(\omega+2\omega^2)^2+(2\omega+\omega^2)^2=3$

解説

(1) x を 1 の 3 乗根とすると $x^3=1$

ゆえに $x^3-1=0$ よって $(x-1)(x^2+x+1)=0$

したがって $x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

これを解いて，1 の 3 乗根は $1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) （ア） $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

よって，ω^2 も 1 の 3 乗根である。

（イ） ω は方程式 $x^2+x+1=0$，$x^3=1$ の解であるから

$\omega^2+\omega+1=0$，$\omega^3=1$

よって $\omega^7+\omega^8=(\omega^3)^2\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

また $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1=\dfrac{\omega+1+\omega^2}{\omega^2}=0$

$\omega^2+\omega+1=0$ から，$\omega^2=-\omega-1$ となり

$$(\omega+2\omega^2)^2+(2\omega+\omega^2)^2=\{\omega+2(-\omega-1)\}^2+(2\omega-\omega-1)^2$$
$$=(-\omega-2)^2+(\omega-1)^2$$
$$=2\omega^2+2\omega+5$$
$$=2(-\omega-1)+2\omega+5=3$$

$\boxed{6}$ ω が $x^2+x+1=0$ の解の 1 つであるとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^{100}+\omega^{50}$ (2) $\dfrac{1}{\omega^8}+\dfrac{1}{\omega^4}$

(3) $(\omega^{200}+1)^{100}+(\omega^{100}+1)^{10}+2$

解答 (1) -1 (2) -1 (3) 1

解説

ω は $x^2+x+1=0$ の解の 1 つであるから $\omega^2+\omega+1=0$

よって $\omega^2+\omega=-1$，$\omega^2+1=-\omega$，$\omega+1=-\omega^2$

また，$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ であるから $\omega^3=1$

(1) $\omega^{100}+\omega^{50}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega+(\omega^3)^{16}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

(2) $\omega^8=(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega^2$，$\omega^4=\omega^3\cdot\omega=\omega$

よって $\dfrac{1}{\omega^8}+\dfrac{1}{\omega^4}=\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^3}{\omega^2}+\dfrac{\omega^3}{\omega}=\omega+\omega^2=-1$

(3) $$(\omega^{200}+1)^{100}+(\omega^{100}+1)^{10}+2=(\omega^2+1)^{100}+(\omega+1)^{10}+2$$
$$=(-\omega)^{100}+(-\omega^2)^{10}+2$$
$$=\omega^{100}+\omega^{20}+2=\omega+\omega^2+2$$
$$=-1+2=1$$

$\boxed{7}$ 1の3乗根のうち，虚数であるものの1つを ω とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^6+\omega^3+1$　(2) $\omega^8+\omega^4+1$　(3) $\omega^{200}+\omega^{100}$

解答　(1) 3　(2) 0　(3) -1

解説

$x^3=1$ から　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\omega\neq1$ より，ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解である。

ゆえに　$\omega^2+\omega+1=0$　また　$\omega^3=1$

(1) $\omega^6+\omega^3+1=(\omega^3)^2+\omega^3+1=1^2+1+1=3$

(2) $\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

(3) $\omega^{200}+\omega^{100}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega^2+(\omega^3)^{33}\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

$\boxed{8}$ 1の3乗根のうち，虚数であるものの1つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^{14}+\omega^7+1$　(2) $\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}$

解答　(1) 0　(2) -1

解説

ω は $x^3=1$ の解であるから　$\omega^3=1$

よって　$\omega^3-1=0$　すなわち　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega\neq1$ であるから　$\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{14}+\omega^7+1=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^2\cdot\omega+1=1^4\cdot\omega^2+1^2\cdot\omega+1$

$=\omega^2+\omega+1=0$

(2) $\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^3\cdot\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}$

ここで，$\omega^2+\omega+1=0$ から　$\omega+1=-\omega^2$

よって　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

別解　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\omega^2+\dfrac{\omega}{\omega^3}=\omega^2+\omega=-1$

$\boxed{9}$ 方程式 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とするとき

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}$ の値を求めよ。　(2) $\dfrac{\omega^5+3\omega+1}{\omega^2+1}$ の値を求めよ。

(3) $(a-b)(a-\omega b)(a-\omega^2b)$ を簡単にせよ。

解答　(1) -1　(2) -2　(3) a^3-b^3

解説

$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=1^6\cdot\omega^2+1^3\cdot\omega=\omega^2+\omega$

ここで，$\omega^2+\omega+1=0$ から　$\omega^2+\omega=-1$

よって　$\omega^{20}+\omega^{10}=-1$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$ から　$\omega^2+1=-\omega$

したがって　$\dfrac{\omega^5+3\omega+1}{\omega^2+1}=\dfrac{\omega^3\cdot\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1}=\dfrac{\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1}=\dfrac{(\omega^2+1)+3\omega}{\omega^2+1}$

$=\dfrac{-\omega+3\omega}{-\omega}=\dfrac{2\omega}{-\omega}=-2$

(3) (与式)$=(a-b)(a^2-\omega^2ab-\omega ba+\omega^3b^2)$

$=(a-b)\{a^2-(\omega^2+\omega)ab+\omega^3b^2\}$

$=(a-b)\{a^2-(-1)ab+1\cdot b^2\}$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

参考　方程式 $x^3=b^3$ を変形すると　$\left(\dfrac{x}{b}\right)^3=1$

これを解くと　$\dfrac{x}{b}=1$，ω，ω^2

よって，$x^3=b^3$ の3つの解は b，ωb，ω^2b であり

$x^3-b^3=(x-b)(x-\omega b)(x-\omega^2b)$

が成り立つ。この等式に $x=a$ を代入すれば，(3) の結果が得られる。

$\boxed{10}$ 1の3乗根のうち，虚数であるものの1つを ω とするとき，次の値を求めよ。

(1) $\omega^3+\omega^2+\omega$　(2) $\omega^6+\omega^3+1$　(3) $\omega^8+\omega^4$

解答　(1) 0　(2) 3　(3) -1

解説

$x^3=1$ とすると，$x^3-1=0$ から　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ゆえに　$x-1=0$　または　$x^2+x+1=0$

よって，ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解である。

したがって　$\omega^2+\omega+1=0$　また　$\omega^3=1$

(1) $\omega^3+\omega^2+\omega=1+\omega^2+\omega=\omega^2+\omega+1=0$

別解　$\omega^3+\omega^2+\omega=\omega(\omega^2+\omega+1)=\omega\cdot0=0$

(2) $\omega^6+\omega^3+1=(\omega^3)^2+\omega^3+1=1^2+1+1=3$

(3) $\omega^8+\omega^4=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega=1^2\cdot\omega^2+1\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

$\boxed{11}$ 方程式 $x^2+x+1=0$ の1つの解を ω とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $1+\omega^2+\omega^4$　(2) $1+\omega^5+\omega^{10}$　(3) $1+\omega^6+\omega^9$

解答　(1) 0　(2) 0　(3) 3

解説

ω が方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから　$\omega^2+\omega+1=0$

更に　$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

よって　$\omega^3=1$

(1) $\omega^3=1$ であるから　$\omega^4=\omega^3\cdot\omega=\omega$

よって　$1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$

(2) $\omega^3=1$ であるから　$\omega^5=\omega^3\cdot\omega^2=\omega^2$，$\omega^{10}=(\omega^3)^3\omega=\omega$

よって　$1+\omega^5+\omega^{10}=1+\omega^2+\omega=0$

(3) $\omega^3=1$ であるから　$\omega^6=(\omega^3)^2=1$，$\omega^9=(\omega^3)^3=1$

よって　$1+\omega^6+\omega^9=1+1+1=3$

$\boxed{12}$ 1の3乗根のうち，虚数であるものの1つを ω とするとき，次の値を求めよ。

(1) ω^{12}　(2) $\omega^5+\omega^4+1$　(3) $\omega^{11}+\omega^{10}$

解答　(1) 1　(2) 0　(3) -1

解説

ω は1の3乗根であるから　$\omega^3=1$

また，ω は

$x^3=1$　すなわち　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

を満たし，$\omega\neq1$ であるから

$\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{12}=(\omega^3)^4=1^4=1$

(2) $\omega^5+\omega^4+1=\omega^3\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

(3) $\omega^{11}+\omega^{10}=(\omega^3)^3\omega^2+(\omega^3)^3\omega=\omega^2+\omega$

$\omega^2+\omega+1=0$ より　$\omega^2+\omega=-1$

よって　$\omega^{11}+\omega^{10}=-1$

$\boxed{13}$ $\omega^3=1$，$\omega\neq1$ とするとき，$\omega^{17}+\dfrac{1}{\omega^{17}}-1$ の値を求めよ。

解答　-2

解説

$\omega^3=1$ であるから

$\omega^{17}+\dfrac{1}{\omega^{17}}=(\omega^3)^5\cdot\omega^2+\dfrac{1}{(\omega^3)^5\cdot\omega^2}$

$=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\omega^2+\dfrac{\omega}{\omega^2\cdot\omega}$

$=\omega^2+\dfrac{\omega}{1}=\omega^2+\omega$

ここで，$\omega^3-1=0$ から　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega\neq1$ であるから　$\omega^2+\omega+1=0$

よって　$\omega^{17}+\dfrac{1}{\omega^{17}}-1=\omega^2+\omega-1=(\omega^2+\omega+1)-2=-2$

$\boxed{14}$ 1の3乗根のうち，虚数であるものの1つを ω とするとき，

$\omega^4+\omega^3+3\omega^2+2\omega+1=$ ア $\boxed{}$ であり，$\omega^{99}+\omega^{98}+\cdots\cdots+\omega^2+\omega+1=$ イ $\boxed{}$ である。

解答　(ア) -1　(イ) 1

解説

ω は1の3乗根であるから　$\omega^3=1$　すなわち　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega\neq1$ であるから　$\omega^2+\omega+1=0$

よって　$\omega^4+\omega^3+3\omega^2+2\omega+1$

$=\omega^2(\omega^2+\omega+1)+2(\omega^2+\omega+1)-1=\omega^2\cdot0+2\cdot0-1=$ ア -1，

$\omega^{99}+\omega^{98}+\cdots\cdots+\omega^2+\omega+1$

$=\omega^{97}(\omega^2+\omega+1)+\omega^{94}(\omega^2+\omega+1)+\cdots\cdots+\omega(\omega^2+\omega+1)+1$

$=\omega^{97}\cdot0+\omega^{94}\cdot0+\cdots\cdots+\omega\cdot0+1$

$=$ イ 1

別解　(ア) $\omega^3=1$，$\omega^2=-\omega-1$ であるから

$\omega^4+\omega^3+3\omega^2+2\omega+1=\omega+1+3(-\omega-1)+2\omega+1=$ ア -1