

したがって $x=1, -3$

9 次の方程式を解け。

(1) $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$

(2) $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$

解答 (1) $x = \pm 2i, \pm \sqrt{3}i$ (2) $x = -1, -2, \frac{3}{2}$

解説

(1) 左辺を因数分解すると $(x^2 + 4)(x^2 + 3) = 0$

よって $x^2 + 4 = 0$ または $x^2 + 3 = 0$

ゆえに $x = \pm 2i, \pm \sqrt{3}i$

(2) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ とすると

$P(-1) = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

よって, $P(x)$ は $x + 1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$P(x) = (x + 1)(2x^2 + x - 6) = (x + 1)(x + 2)(2x - 3)$

$P(x) = 0$ から $x + 1 = 0$ または $x + 2 = 0$ または $2x - 3 = 0$

ゆえに $x = -1, -2, \frac{3}{2}$

10 次の方程式を解け。

(1) $x(x + 1)(x + 2) = 1 \cdot 2 \cdot 3$

(2) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$

(3) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x - 7) = -5$

解答 (1) $x = 1, -2 \pm \sqrt{2}i$ (2) $x = \frac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{2}$ (3) $x = 1, 2, -2, -3$

解説

(1) 与えられた式の形から, $x = 1$ が解であることがわかる。

与式を展開して整理すると $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 6$ とすると $P(1) = 0$

よって, $P(x)$ は $x - 1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$P(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 6)$

$P(x) = 0$ から $x - 1 = 0$ または $x^2 + 4x + 6 = 0$

ゆえに $x = 1, -2 \pm \sqrt{2}i$

(2) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$ とすると $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

よって, $P(x)$ は $2x - 1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$P(x) = (2x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

$P(x) = 0$ から $2x - 1 = 0$ または $x^2 - 2x - 1 = 0$

ゆえに $x = \frac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{2}$

(3) $x^2 + x = t$ とおくと, $(t - 1)(t - 7) = -5$ から $t^2 - 8t + 12 = 0$

因数分解して $(t - 2)(t - 6) = 0$ ゆえに $t = 2, 6$

$t = 2$ のとき $x^2 + x = 2$ すなわち $x^2 + x - 2 = 0$

これを解いて $x = 1, -2$

$t = 6$ のとき $x^2 + x = 6$ すなわち $x^2 + x - 6 = 0$

これを解いて $x = 2, -3$

以上により $x = 1, 2, -2, -3$

11 次の方程式を解け。[各 15 点]

(1) $x^4 + x^2 - 6 = 0$

(2) $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$

解答 (1) $(x^2 - 2)(x^2 + 3) = 0$ より $x^2 = 2, x^2 = -3$

よって $x = \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{3}i$

(2) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ とすると

$P(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$

よって, $P(x)$ は $x - 2$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 1)$

$P(x) = 0$ から $x - 2 = 0$ または $x^2 - 2x - 1 = 0$

したがって $x = 2, 1 \pm \sqrt{2}$

解説

(1) $(x^2 - 2)(x^2 + 3) = 0$ より $x^2 = 2, x^2 = -3$

よって $x = \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{3}i$

(2) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ とすると

$P(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$

よって, $P(x)$ は $x - 2$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 1)$

$P(x) = 0$ から $x - 2 = 0$ または $x^2 - 2x - 1 = 0$

したがって $x = 2, 1 \pm \sqrt{2}$

12 次の方程式を解け。

(1) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

(2) $x^3 + 27 = 0$

(3) $x^3 = 8$

(4) $x^4 = 4$

解答 (1) $x = 0, 2, 3$ (2) $x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ (3) $x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$

(4) $x = \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{2}i$

解説

(1) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ より $x(x - 2)(x - 3) = 0$ となる

$x = 0$ または $x - 2 = 0$ または $x - 3 = 0$

よって $x = 0, 2, 3$

(2) 左辺を因数分解して $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

ゆえに $x + 3 = 0$ または $x^2 - 3x + 9 = 0$

よって $x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x^3 = 8$ から $x^3 - 8 = 0$

左辺を因数分解して $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

ゆえに $x - 2 = 0$ または $x^2 + 2x + 4 = 0$

よって $x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$

(4) $x^4 = 4$ から $x^4 - 4 = 0$

左辺を因数分解して $(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0$

ゆえに $x^2 = 2$ または $x^2 = -2$

よって $x = \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{2}i$

13 次の方程式を解け。

(1) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

(2) $(x^2 + 4x + 7)(x^2 + 4x - 2) + 8 = 0$

(3) $x^4 + x^2 + 4 = 0$

解答 (1) $x = \pm \sqrt{3}i, \pm 2$ (2) $x = -2 \pm \sqrt{5}, -2 \pm \sqrt{2}i$

(3) $x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{5}i}{2}, \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{5}i}{2}$

解説

(1) $x^2 = X$ とおくと $X^2 - X - 12 = 0$

左辺を因数分解して $(X + 3)(X - 4) = 0$

すなわち

$(x^2 + 3)(x^2 - 4) = 0$

よって $x^2 + 3 = 0$ または $x^2 - 4 = 0$

$x^2 + 3 = 0$ から $x = \pm \sqrt{3}i$

$x^2 - 4 = 0$ から $x = \pm 2$

したがって $x = \pm \sqrt{3}i, \pm 2$

(2) $x^2 + 4x = X$ とおくと $(X + 7)(X - 2) + 8 = 0$

左辺を展開して整理すると $X^2 + 5X - 6 = 0$

よって $(X - 1)(X + 6) = 0$

すなわち $(x^2 + 4x - 1)(x^2 + 4x + 6) = 0$

ゆえに $x^2 + 4x - 1 = 0$ または $x^2 + 4x + 6 = 0$

$x^2 + 4x - 1 = 0$ から $x = -2 \pm \sqrt{5}$

$x^2 + 4x + 6 = 0$ から $x = -2 \pm \sqrt{2}i$

したがって $x = -2 \pm \sqrt{5}, -2 \pm \sqrt{2}i$

(3) $x^4 + x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 3x^2$

$= (x^2 + \sqrt{3}x + 2)(x^2 - \sqrt{3}x + 2)$

よって, 方程式は $(x^2 + \sqrt{3}x + 2)(x^2 - \sqrt{3}x + 2) = 0$

ゆえに $x^2 + \sqrt{3}x + 2 = 0$ または $x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$

$x^2 + \sqrt{3}x + 2 = 0$ から $x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{5}i}{2}$

$x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$ から $x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{5}i}{2}$

したがって $x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{5}i}{2}, \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{5}i}{2}$

14 次の方程式を解け。

(1) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

(2) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$

(3) $x^4 - 3x^2 + 9 = 0$

解答 (1) $x = \pm \sqrt{3}, \pm 2$ (2) $x = 1, -1, 3$ (3) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$

解説 (1) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ から $(x^2 - 3)(x^2 - 4) = 0$

よって $x^2 - 3 = 0$ または $x^2 - 4 = 0$

$x^2 - 3 = 0$ から $x = \pm \sqrt{3}$

$x^2 - 4 = 0$ から $x = \pm 2$

したがって $x = \pm \sqrt{3}, \pm 2$

(2) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$ から $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 3) = 0$

よって $(x - 1)^2(x + 1)(x - 3) = 0$

ゆえに $x - 1 = 0$ または $x + 1 = 0$ または $x - 3 = 0$

したがって $x = 1, -1, 3$

(3) $x^4 - 3x^2 + 9 = (x^2 + 3)^2 - 6x^2 - 3x^2 = (x^2 + 3)^2 - 9x^2$

$= (x^2 + 3x + 3)(x^2 - 3x + 3)$

よって $(x^2 + 3x + 3)(x^2 - 3x + 3) = 0$

ゆえに $x^2 + 3x + 3 = 0$ または $x^2 - 3x + 3 = 0$

したがって $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$

15 次の方程式を解け。

(1) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$

(2) $x^4 - 4x^2 - 12x - 9 = 0$

解答 (1) $x = -1, 5$ (2) $x = -1, 3, -1 \pm \sqrt{2}i$

解説

(1) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ とする

$$P(-1) = -1 - 3 + 9 - 5 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに $P(x) = (x+1)(x^2 - 4x - 5)$

$$= (x+1)(x+1)(x-5)$$

$$= (x+1)^2(x-5)$$

$P(x) = 0$ から $x+1=0$ または $x-5=0$

したがって $x = -1, 5$

(2) $P(x) = x^4 - 4x^2 - 12x - 9$ とする

$$P(-1) = 1 - 4 + 12 - 9 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに $P(x) = (x+1)(x^3 - x^2 - 3x - 9)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \quad -9 \quad -5 \\ \hline -1 \quad 4 \quad 5 \\ \hline 1 \quad -4 \quad -5 \quad 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 3x - 9$ とする

$$Q(3) = 27 - 9 - 9 - 9 = 0$$

よって, $Q(x)$ は $x-3$ を因数にもつ。

ゆえに $Q(x) = (x-3)(x^2 + 2x + 3)$

よって $P(x) = (x+1)(x-3)(x^2 + 2x + 3)$

$P(x) = 0$ から

$$x+1=0 \text{ または } x-3=0 \text{ または } x^2+2x+3=0$$

したがって $x = -1, 3, -1 \pm \sqrt{2}i$

16 次の方程式を解け。

(1) $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$

(2) $3x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$

(3) $x(x+1)(x+2) = 2 \cdot 3 \cdot 4$

(4) $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad -11 \quad -30 \\ \hline -2 \quad -4 \quad 30 \\ \hline 1 \quad 2 \quad -15 \quad 0 \end{array}$$

解説

(1) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ とする

$$P(-2) = -8 + 16 + 22 - 30 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

ゆえに $P(x) = (x+2)(x^2 + 2x - 15)$

$$= (x+2)(x-3)(x+5)$$

$P(x) = 0$ から $x+2=0$ または $x-3=0$ または $x+5=0$

したがって $x = -2, 3, -5$

(2) $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ とする

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 1 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x - \frac{1}{3}$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} 3 \quad -4 \quad 4 \quad -1 \\ \hline 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 3 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \end{array}$$

ゆえに $P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 - 3x + 3)$

$$= (3x-1)(x^2 - x + 1)$$

$P(x) = 0$ から $3x-1=0$ または $x^2 - x + 1 = 0$

したがって $x = \frac{1}{3}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(3) 方程式から $x(x+1)(x+2) - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$

$P(x) = x(x+1)(x+2) - 2 \cdot 3 \cdot 4$ とする

$$P(2) = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 2 \quad -24 \\ \hline 2 \quad 10 \quad 24 \\ \hline 1 \quad 5 \quad 12 \quad 0 \end{array}$$

ゆえに $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 24$

$$= (x-2)(x^2 + 5x + 12)$$

$P(x) = 0$ から $x-2=0$ または $x^2 + 5x + 12 = 0$

したがって $x=2, \frac{-5 \pm \sqrt{23}i}{2}$

(4) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2$ とする

$$P(-1) = 2 - 5 + 5 - 2 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに $P(x) = (x+1)(2x^3 + 3x^2 + 2x - 2)$

$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ とする

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 - 2 = 0$$

よって, $Q(x)$ は $x - \frac{1}{2}$ を因数にもつ。

ゆえに $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4x + 4)$

$$= (2x-1)(x^2 + 2x + 2)$$

よって $P(x) = (x+1)(2x-1)(x^2 + 2x + 2)$

$P(x) = 0$ から $x+1=0$ または $2x-1=0$ または $x^2 + 2x + 2 = 0$

したがって $x = -1, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

17 方程式 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ を解け。

解答 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

解説

$x=0$ は方程式の解ではないから, 方程式の両辺を x^2 で割ると

$$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

よって $x^2 + \frac{1}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0 \quad \dots \dots \textcircled{1}$

$x + \frac{1}{x} = t$ とおくと, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = t^2 - 2$ であるから, ①は

$$(t^2 - 2) - 7t + 14 = 0$$

ゆえに $t^2 - 7t + 12 = 0 \quad$ よって $(t-3)(t-4) = 0$

したがって $t = 3, 4$

[1] $t = 3$ のとき $x + \frac{1}{x} = 3$

$x^2 - 3x + 1 = 0$ であるから $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

[2] $t = 4$ のとき $x + \frac{1}{x} = 4$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ であるから $x = 2 \pm \sqrt{3}$

よって, 求める解は $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

18 次の方程式を解け。

(1) $x^3 = -64$

(2) $27x^3 - 8 = 0$

(3) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

(4) $x^4 - 144 = 0$

(5) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

(6) $x^4 + 13x^2 + 12 = 0$

解答 (1) $x = -4, 2 \pm 2\sqrt{3}i$ (2) $x = \frac{2}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{3}$ (3) $x = \pm 2i, \pm 3$ (4) $x = \pm 2\sqrt{3}, \pm 2\sqrt{3}i$ (5) $x = \pm \sqrt{3}, \pm 2$ (6) $x = \pm i, \pm 2\sqrt{3}i$

解説

(1) 移項すると $x^3 + 64 = 0$

左辺を因数分解して $(x+4)(x^2 - 4x + 16) = 0$

よって $x+4=0$ または $x^2 - 4x + 16 = 0$

ゆえに $x = -4, 2 \pm 2\sqrt{3}i$

(2) 左辺を因数分解すると $(3x-2)(9x^2 + 6x + 4) = 0$

よって $3x-2=0$ または $9x^2 + 6x + 4 = 0$

ゆえに $x = \frac{2}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{3}$

(3) 左辺を因数分解すると $(x^2 + 4)(x^2 - 9) = 0$

よって $x^2 + 4 = 0$ または $x^2 - 9 = 0$

ゆえに $x = \pm 2i, \pm 3$

(4) 左辺を因数分解すると $(x^2 - 12)(x^2 + 12) = 0$

よって $x^2 - 12 = 0$ または $x^2 + 12 = 0$

ゆえに $x = \pm 2\sqrt{3}, \pm 2\sqrt{3}i$

(5) 左辺を因数分解すると $(x^2 - 3)(x^2 - 4) = 0$

よって $x^2 - 3 = 0$ または $x^2 - 4 = 0$

ゆえに $x = \pm \sqrt{3}, \pm 2$

(6) 左辺を因数分解すると $(x^2 + 1)(x^2 + 12) = 0$

よって $x^2 + 1 = 0$ または $x^2 + 12 = 0$

ゆえに $x = \pm i, \pm 2\sqrt{3}i$

19 次の方程式を解け。

(1) $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$

(2) $x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0$

(3) $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0$

(4) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$

(5) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$

(6) $x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 18 = 0$

解答 (1) $x = 1, 2 \pm 2\sqrt{2}$ (2) $x = -1, \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$ (3) $x = 1, 3, -\frac{1}{2}$

(4) $x = \pm 2, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ (5) $x = 1, -1$ (6) $x = 2, 3, -1 \pm \sqrt{2}i$

解説

(1) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4$ すると $P(1) = 1 - 5 + 4 = 0$

よって, $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$P(x) = (x-1)(x^2 - 4x - 4)$

$P(x) = 0$ から $x-1=0$ または $x^2 - 4x - 4 = 0$

したがって $x = 1, 2 \pm 2\sqrt{2}$

(2) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$ すると $P(-1) = -1 - 2 - 1 + 4 = 0$

よって, $P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$P(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 4)$

$P(x) = 0$ から $x+1=0$ または $x^2 - 3x + 4 = 0$

したがって $x = -1, \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$

(3) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ すると $P(1) = 2 - 7 + 2 + 3 = 0$

よって, $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$P(x) = (x-1)(2x^2 - 5x - 3) = (x-1)(x-3)(2x+1)$

$P(x) = 0$ から $x-1=0$ または $x-3=0$ または $2x+1=0$

したがって $x=1, 3, -\frac{1}{2}$

(4) $P(x)=x^4+x^3-2x^2-4x-8$ とすると $P(2)=16+8-8-8-8=0$

よって, $P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-2)(x^3+3x^2+4x+4)$$

$Q(x)=x^3+3x^2+4x+4$ とすると $Q(-2)=-8+12-8+4=0$

よって, $Q(x)$ は $x+2$ で割り切れるから, $Q(x)$ を因数分解すると

$$Q(x)=(x+2)(x^2+x+2)$$

ゆえに $P(x)=(x-2)(x+2)(x^2+x+2)$

$P(x)=0$ から $x-2=0$ または $x+2=0$ または $x^2+x+2=0$

したがって $x=\pm 2, \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

(5) $P(x)=x^4-2x^3+2x-1$ とすると $P(1)=1-2+2-1=0$

よって, $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-1)(x^3-x^2-x+1)$$

$Q(x)=x^3-x^2-x+1$ とすると $Q(1)=1-1-1+1=0$

よって, $Q(x)$ は $x-1$ で割り切れるから, $Q(x)$ を因数分解すると

$$Q(x)=(x-1)(x^2-1)$$

ゆえに $P(x)=(x-1)(x-1)(x^2-1)=(x-1)^3(x+1)$

$P(x)=0$ から $(x-1)^3=0$ または $x+1=0$

したがって $x=1, -1$

別解 $x^4-2x^3+2x-1=(x^4-1)-2x(x^2-1)=(x^2+1)(x^2-1)-2x(x^2-1)$

$$=(x^2-2x+1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)(x-1)$$

$$=(x-1)^3(x+1)$$

よって, 方程式は $(x-1)^3(x+1)=0$

したがって $x=1, -1$

(6) $P(x)=x^4-3x^3-x^2-3x+18$ とすると $P(2)=16-24-4-6+18=0$

よって, $P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-2)(x^3-x^2-3x+9)$$

$Q(x)=x^3-x^2-3x+9$ とすると $Q(3)=27-9-9-9=0$

よって, $Q(x)$ は $x-3$ で割り切れるから, $Q(x)$ を因数分解すると

$$Q(x)=(x-3)(x^2+2x+3)$$

ゆえに $P(x)=(x-2)(x-3)(x^2+2x+3)$

$P(x)=0$ から $x-2=0$ または $x-3=0$ または $x^2+2x+3=0$

したがって $x=2, 3, -1\pm\sqrt{2}i$

20) 次の方程式を解け。

(1) $4x^3+3x-2=0$

(2) $2x^3-7x^2+2=0$

(3) $3x^3-10x^2+1=0$

(4) $(x-1)(x-2)(x-3)=4\cdot 3\cdot 2$

(5) $(x^2-2x)^2-(x^2-2x)-6=0$

(6) $x^4+x^2+1=0$

(7) $(x^2-5x+1)(x^2-5x+9)+15=0$

解答 (1) $x=\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$ (2) $x=-\frac{1}{2}, 2\pm\sqrt{2}$ (3) $x=\frac{1}{3}, \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(4) $x=5, \frac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$ (5) $x=-1, 3, 1\pm i$

(6) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (7) $x=1, 2, 3, 4$

解説

(1) $P(x)=4x^3+3x-2$ とすると $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2=0$

よって, $P(x)$ は $2x-1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(2x-1)(2x^2+x+2)$$

$P(x)=0$ から $2x-1=0$ または $2x^2+x+2=0$

したがって $x=\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

(2) $P(x)=2x^3-7x^2+2$ とすると $P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}+2=0$

よって, $P(x)$ は $2x+1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(2x+1)(x^2-4x+2)$$

$P(x)=0$ から $2x+1=0$ または $x^2-4x+2=0$

したがって $x=-\frac{1}{2}, 2\pm\sqrt{2}$

(3) $P(x)=3x^3-10x^2+1$ とすると $P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{10}{9}+1=0$

よって, $P(x)$ は $3x-1$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(3x-1)(x^2-3x-1)$$

$P(x)=0$ から $3x-1=0$ または $x^2-3x-1=0$

したがって $x=\frac{1}{3}, \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(4) $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-4\cdot 3\cdot 2$ とすると $P(5)=4\cdot 3\cdot 2-4\cdot 3\cdot 2=0$

また $P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)-24=x^3-6x^2+11x-30$

$P(x)$ は $x-5$ で割り切れるから, $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-5)(x^2-x+6)$$

$P(x)=0$ から $x-5=0$ または $x^2-x+6=0$

したがって $x=5, \frac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

(5) $x^2-2x=t$ とおくと, 方程式は $t^2-t-6=0$

左辺を因数分解して $(t-3)(t+2)=0$

よって $(x^2-2x-3)(x^2-2x+2)=0$

すなわち $(x+1)(x-3)(x^2-2x+2)=0$

したがって $x=-1, 3, 1\pm i$

(6) 方程式から $(x^4+2x^2+1)-x^2=0$

ゆえに $(x^2+1)^2-x^2=0$

よって $\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}=0$

すなわち $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$

したがって $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(7) $x^2-5x=t$ とおくと, 方程式は $(t+1)(t+9)+15=0$

整理すると $t^2+10t+24=0$

左辺を因数分解して $(t+4)(t+6)=0$

よって $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=0$

すなわち $(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)=0$

したがって $x=1, 2, 3, 4$