

1 3 次方程式 $x^3=1$ を解け。

解答 $x=1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

解説

移項すると $x^3-1=0$
左辺を因数分解して $(x-1)(x^2+x+1)=0$
よって $x-1=0$ または $x^2+x+1=0$
ゆえに $x=1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

2 次の 3 次方程式を解け。

(1) $x^3=8$ (2) $x^3=-1$

解答 (1) $x=2, -1\pm\sqrt{3}i$ (2) $x=-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

解説

(1) 移項すると $x^3-8=0$
左辺を因数分解して $(x-2)(x^2+2x+4)=0$
よって $x-2=0$ または $x^2+2x+4=0$
ゆえに $x=2, -1\pm\sqrt{3}i$
(2) 移項すると $x^3+1=0$
左辺を因数分解して $(x+1)(x^2-x+1)=0$
よって $x+1=0$ または $x^2-x+1=0$
ゆえに $x=-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

3 4 次方程式 $x^4-2x^2-3=0$ を解け。

解答 $x=\pm\sqrt{3}, \pm i$

解説

左辺を因数分解すると $(x^2-3)(x^2+1)=0$
よって $x^2-3=0$ または $x^2+1=0$
ゆえに $x=\pm\sqrt{3}, \pm i$

$x^2=t$ とおくと
 t^2-2t-3
 $=(t-3)(t+1)$

4 次の 4 次方程式を解け。

(1) $x^4-3x^2-10=0$ (2) $x^4=1$

解答 (1) $x=\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}i$ (2) $x=\pm 1, \pm i$

解説

(1) 左辺を因数分解して $(x^2-5)(x^2+2)=0$
よって $x^2-5=0$ または $x^2+2=0$
ゆえに $x=\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}i$
(2) 移項すると $x^4-1=0$
左辺を因数分解して $(x^2-1)(x^2+1)=0$
よって $x^2-1=0$ または $x^2+1=0$
ゆえに $x=\pm 1, \pm i$

5 3 次方程式 $x^3+4x^2-8=0$ を解け。

解答 $x=-2, -1\pm\sqrt{5}$

解説

$P(x)=x^3+4x^2-8$ とすると $P(-2)=0$
よって、 $P(x)$ は $x+2$ で割り切れるから、
 $P(x)$ を因数分解すると $P(x)=(x+2)(x^2+2x-4)$
 $P(x)=0$ から $x+2=0$ または $x^2+2x-4=0$
したがって $x=-2, -1\pm\sqrt{5}$

$$\begin{array}{r} x^2+2x-4 \\ x+2 \overline{) x^3+4x^2 } \\ \underline{x^3+2x^2 } \\ 2x^2 \\ \underline{2x^2+4x } \\ -4x-8 \\ \underline{-4x-8} \\ 0 \end{array}$$

6 次の 3 次方程式を解け。

(1) $x^3-4x+3=0$ (2) $2x^3-7x+2=0$
(3) $x^3+x^2-8x-12=0$ (4) $x^3+3x^2+4x+2=0$

解答 (1) $x=1, \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ (2) $x=-2, \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ (3) $x=-2, 3$
(4) $x=-1, -1\pm i$

解説

(1) $P(x)=x^3-4x+3$ とすると $P(1)=0$
よって、 $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x-1)(x^2+x-3)$
 $P(x)=0$ から $x-1=0$ または $x^2+x-3=0$
ゆえに $x=1, \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$
(2) $P(x)=2x^3-7x+2$ とすると $P(-2)=0$
よって、 $P(x)$ は $x+2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x+2)(2x^2-4x+1)$
 $P(x)=0$ から $x+2=0$ または $2x^2-4x+1=0$
ゆえに $x=-2, \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$
(3) $P(x)=x^3+x^2-8x-12$ とすると $P(-2)=0$
よって、 $P(x)$ は $x+2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x+2)(x^2-x-6)=(x+2)^2(x-3)$
 $P(x)=0$ から $(x+2)^2=0$ または $x-3=0$
ゆえに $x=-2, 3$
(4) $P(x)=x^3+3x^2+4x+2$ とすると $P(-1)=0$
よって、 $P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x+1)(x^2+2x+2)$
 $P(x)=0$ から $x+1=0$ または $x^2+2x+2=0$
ゆえに $x=-1, -1\pm i$

7 4 次方程式 $x^4-2x^3+x^2+2x-2=0$ を解け。

解答 $x=\pm 1, 1\pm i$

解説

$P(x)=x^4-2x^3+x^2+2x-2$ とすると $P(1)=0$
よって、 $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、
 $P(x)$ を因数分解すると $P(x)=(x-1)(x^3-x^2+2)$
 $Q(x)=x^3-x^2+2$ とすると $Q(-1)=0$
よって、 $Q(x)$ は $x+1$ で割り切れるから、
 $Q(x)$ を因数分解すると $Q(x)=(x+1)(x^2-2x+2)$
ゆえに $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-2x+2)$
 $P(x)=0$ から $x-1=0$ または $x+1=0$ または $x^2-2x+2=0$
したがって $x=\pm 1, 1\pm i$

$$\begin{array}{r} x^3-x^2+2 \\ x-1 \overline{) x^4-2x^3+x^2+2x-2} \\ \underline{x^4-x^3 } \\ -x^3+x^2 \\ \underline{-x^3+x^2} \\ 2x-2 \\ \underline{2x-2} \\ 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} x^2-2x+2 \\ x+1 \overline{) x^3-x^2 } \\ \underline{x^3+x^2} \\ -2x^2-2x \\ \underline{-2x^2-2x} \\ 2x+2 \\ \underline{2x+2} \\ 0 \end{array}$$

8 次の 4 次方程式を解け。

(1) $x^4-x^3-x^2-x-2=0$ (2) $x^4+2x^3+2x^2-2x-3=0$
(3) $x^4-6x^2+8x-3=0$

解答 (1) $x=-1, 2, \pm i$ (2) $x=\pm 1, -1\pm\sqrt{2}i$ (3) $x=1, -3$

解説

(1) $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ とすると $P(-1)=0$
よって、 $P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x+1)(x^3-2x^2+x-2)$
 $Q(x)=x^3-2x^2+x-2$ とすると $Q(2)=0$
よって、 $Q(x)$ は $x-2$ で割り切れるから、 $Q(x)$ を因数分解すると
 $Q(x)=(x-2)(x^2+1)$
ゆえに $P(x)=(x+1)(x-2)(x^2+1)$
 $P(x)=0$ から $x+1=0$ または $x-2=0$ または $x^2+1=0$
したがって $x=-1, 2, \pm i$
(2) $P(x)=x^4+2x^3+2x^2-2x-3$ とすると $P(1)=0$
よって、 $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x-1)(x^3+3x^2+5x+3)$
 $Q(x)=x^3+3x^2+5x+3$ とすると $Q(-1)=0$
よって、 $Q(x)$ は $x+1$ で割り切れるから、 $Q(x)$ を因数分解すると
 $Q(x)=(x+1)(x^2+2x+3)$
ゆえに $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)$
 $P(x)=0$ から $x-1=0$ または $x+1=0$ または $x^2+2x+3=0$
したがって $x=\pm 1, -1\pm\sqrt{2}i$
(3) $P(x)=x^4-6x^2+8x-3$ とすると $P(1)=0$
よって、 $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x-1)(x^3+x^2-5x+3)$
 $Q(x)=x^3+x^2-5x+3$ とすると $Q(1)=0$
よって、 $Q(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、 $Q(x)$ を因数分解すると
 $Q(x)=(x-1)(x^2+2x-3)=(x-1)^2(x+3)$
ゆえに $P(x)=(x-1)^3(x+3)$
 $P(x)=0$ から $x-1=0$ または $x+3=0$

したがって $x=1, -3$

9 次の方程式を解け。

(1) $x^4+7x^2+12=0$ (2) $2x^3+3x^2-5x-6=0$

解答 (1) $x=\pm 2i, \pm\sqrt{3}i$ (2) $x=-1, -2, \frac{3}{2}$

解説

(1) 左辺を因数分解すると $(x^2+4)(x^2+3)=0$
よって $x^2+4=0$ または $x^2+3=0$
ゆえに $x=\pm 2i, \pm\sqrt{3}i$
(2) $P(x)=2x^3+3x^2-5x-6$ とすると
 $P(-1)=-2+3+5-6=0$
よって、 $P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x+1)(2x^2+x-6)=(x+1)(x+2)(2x-3)$
 $P(x)=0$ から $x+1=0$ または $x+2=0$ または $2x-3=0$
ゆえに $x=-1, -2, \frac{3}{2}$

10 次の方程式を解け。

(1) $x(x+1)(x+2)=1\cdot 2\cdot 3$ (2) $2x^3-5x^2+1=0$
(3) $(x^2+x-1)(x^2+x-7)=-5$

解答 (1) $x=1, -2\pm\sqrt{2}i$ (2) $x=\frac{1}{2}, 1\pm\sqrt{2}$ (3) $x=1, 2, -2, -3$

解説

(1) 与えられた式の形から、 $x=1$ が解であることがわかる。
与式を展開して整理すると $x^3+3x^2+2x-6=0$
 $P(x)=x^3+3x^2+2x-6$ とすると $P(1)=0$
よって、 $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x-1)(x^2+4x+6)$
 $P(x)=0$ から $x-1=0$ または $x^2+4x+6=0$
ゆえに $x=1, -2\pm\sqrt{2}i$
(2) $P(x)=2x^3-5x^2+1$ とすると $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$
よって、 $P(x)$ は $2x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(2x-1)(x^2-2x-1)$
 $P(x)=0$ から $2x-1=0$ または $x^2-2x-1=0$
ゆえに $x=\frac{1}{2}, 1\pm\sqrt{2}$
(3) $x^2+x=t$ とおくと、 $(t-1)(t-7)=-5$ から $t^2-8t+12=0$
因数分解して $(t-2)(t-6)=0$ ゆえに $t=2, 6$
 $t=2$ のとき $x^2+x=2$ すなわち $x^2+x-2=0$
これを解いて $x=1, -2$
 $t=6$ のとき $x^2+x=6$ すなわち $x^2+x-6=0$
これを解いて $x=2, -3$
以上により $x=1, 2, -2, -3$

11 次の方程式を解け。[各 15 点]

(1) $x^4+x^2-6=0$ (2) $x^3-4x^2+3x+2=0$

解答 (1) $(x^2-2)(x^2+3)=0$ より $x^2=2, x^2=-3$
よって $x=\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}i$

(2) $P(x)=x^3-4x^2+3x+2$ とすると
 $P(2)=8-16+6+2=0$
よって、 $P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x-2)(x^2-2x-1)$
 $P(x)=0$ から $x-2=0$ または $x^2-2x-1=0$
したがって $x=2, 1\pm\sqrt{2}$

解説

(1) $(x^2-2)(x^2+3)=0$ より $x^2=2, x^2=-3$
よって $x=\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}i$
(2) $P(x)=x^3-4x^2+3x+2$ とすると
 $P(2)=8-16+6+2=0$
よって、 $P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると
 $P(x)=(x-2)(x^2-2x-1)$
 $P(x)=0$ から $x-2=0$ または $x^2-2x-1=0$
したがって $x=2, 1\pm\sqrt{2}$

12 次の方程式を解け。

(1) $x^3-5x^2+6x=0$ (2) $x^3+27=0$
(3) $x^3=8$ (4) $x^4=4$

解答 (1) $x=0, 2, 3$ (2) $x=-3, \frac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$ (3) $x=2, -1\pm\sqrt{3}i$
(4) $x=\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i$

解説

(1) $x^3-5x^2+6x=0$ より $x(x-2)(x-3)=0$ となる
 $x=0$ または $x-2=0$ または $x-3=0$
よって $x=0, 2, 3$
(2) 左辺を因数分解して $(x+3)(x^2-3x+9)=0$
ゆえに $x+3=0$ または $x^2-3x+9=0$
よって $x=-3, \frac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$
(3) $x^3=8$ から $x^3-8=0$
左辺を因数分解して $(x-2)(x^2+2x+4)=0$
ゆえに $x-2=0$ または $x^2+2x+4=0$
よって $x=2, -1\pm\sqrt{3}i$
(4) $x^4=4$ から $x^4-4=0$
左辺を因数分解して $(x^2-2)(x^2+2)=0$
ゆえに $x^2=2$ または $x^2=-2$
よって $x=\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i$

13 次の方程式を解け。

(1) $x^4-x^2-12=0$ (2) $(x^2+4x+7)(x^2+4x-2)+8=0$
(3) $x^4+x^2+4=0$

解答 (1) $x=\pm\sqrt{3}i, \pm 2$ (2) $x=-2\pm\sqrt{5}, -2\pm\sqrt{2}i$
(3) $x=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}, \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}$

解説

(1) $x^2=X$ とおくと $X^2-X-12=0$
左辺を因数分解して $(X+3)(X-4)=0$

すなわち $(x^2+3)(x^2-4)=0$
よって $x^2+3=0$ または $x^2-4=0$
 $x^2+3=0$ から $x=\pm\sqrt{3}i$
 $x^2-4=0$ から $x=\pm 2$
したがって $x=\pm\sqrt{3}i, \pm 2$

(2) $x^2+4x=X$ とおくと $(X+7)(X-2)+8=0$

左辺を展開して整理すると $X^2+5X-6=0$
よって $(X-1)(X+6)=0$
すなわち $(x^2+4x-1)(x^2+4x+6)=0$
ゆえに $x^2+4x-1=0$ または $x^2+4x+6=0$
 $x^2+4x-1=0$ から $x=-2\pm\sqrt{5}$
 $x^2+4x+6=0$ から $x=-2\pm\sqrt{2}i$
したがって $x=-2\pm\sqrt{5}, -2\pm\sqrt{2}i$

(3) $x^4+x^2+4=(x^2+2)^2-3x^2$
 $=(x^2+\sqrt{3}x+2)(x^2-\sqrt{3}x+2)$

よって、方程式は $(x^2+\sqrt{3}x+2)(x^2-\sqrt{3}x+2)=0$
ゆえに $x^2+\sqrt{3}x+2=0$ または $x^2-\sqrt{3}x+2=0$

$x^2+\sqrt{3}x+2=0$ から $x=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}$

$x^2-\sqrt{3}x+2=0$ から $x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}$

したがって $x=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}, \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}$

14 次の方程式を解け。

(1) $x^4-7x^2+12=0$ (2) $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0$
(3) $x^4-3x^2+9=0$

解答 (1) $x=\pm\sqrt{3}, \pm 2$ (2) $x=1, -1, 3$ (3) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

解説

(1) $x^4-7x^2+12=0$ から $(x^2-3)(x^2-4)=0$
よって $x^2-3=0$ または $x^2-4=0$
 $x^2-3=0$ から $x=\pm\sqrt{3}$
 $x^2-4=0$ から $x=\pm 2$
したがって $x=\pm\sqrt{3}, \pm 2$
(2) $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0$ から $(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)=0$
よって $(x-1)^2(x+1)(x-3)=0$
ゆえに $x-1=0$ または $x+1=0$ または $x-3=0$
したがって $x=1, -1, 3$
(3) $x^4-3x^2+9=(x^2+3)^2-6x^2-3x^2=(x^2+3)^2-9x^2$
 $=(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$
よって $(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)=0$
ゆえに $x^2+3x+3=0$ または $x^2-3x+3=0$
したがって $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

15 次の方程式を解け。

(1) $x^3-3x^2-9x-5=0$ (2) $x^4-4x^2-12x-9=0$

解答 (1) $x=-1, 5$ (2) $x=-1, 3, -1\pm\sqrt{2}i$

解説

(1) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ とすると

$$P(-1) = -1 - 3 + 9 - 5 = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } P(x) &= (x+1)(x^2 - 4x - 5) \\ &= (x+1)(x+1)(x-5) \\ &= (x+1)^2(x-5) \end{aligned}$$

$P(x) = 0$ から $x+1=0$ または $x-5=0$

したがって $x = -1, 5$

(2) $P(x) = x^4 - 4x^2 - 12x - 9$ とすると

$$P(-1) = 1 - 4 + 12 - 9 = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\text{ゆえに } P(x) = (x+1)(x^3 - x^2 - 3x - 9)$$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 3x - 9$ とすると

$$Q(3) = 27 - 9 - 9 - 9 = 0$$

よって、 $Q(x)$ は $x-3$ を因数にもつ。

$$\text{ゆえに } Q(x) = (x-3)(x^2 + 2x + 3)$$

よって $P(x) = (x+1)(x-3)(x^2 + 2x + 3)$

$P(x) = 0$ から

$$x+1=0 \quad \text{または} \quad x-3=0 \quad \text{または} \quad x^2+2x+3=0$$

したがって $x = -1, 3, -1 \pm \sqrt{2}i$

16 次の方程式を解け。

(1) $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$

(2) $3x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$

(3) $x(x+1)(x+2) = 2 \cdot 3 \cdot 4$

(4) $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$

【解答】 (1) $x = -2, 3, -5$ (2) $x = \frac{1}{3}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (3) $x = 2, \frac{-5 \pm \sqrt{23}i}{2}$

(4) $x = -1, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

解説

(1) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ とすると

$$P(-2) = -8 + 16 + 22 - 30 = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } P(x) &= (x+2)(x^2 + 2x - 15) \\ &= (x+2)(x-3)(x+5) \end{aligned}$$

$P(x) = 0$ から $x+2=0$ または $x-3=0$ または $x+5=0$

したがって $x = -2, 3, -5$

(2) $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ とすると

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 1 = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x - \frac{1}{3}$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } P(x) &= \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 - 3x + 3) \\ &= (3x-1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$P(x) = 0$ から $3x-1=0$ または $x^2 - x + 1 = 0$

$$\text{したがって } x = \frac{1}{3}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(3) 方程式から $x(x+1)(x+2) - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$

$P(x) = x(x+1)(x+2) - 2 \cdot 3 \cdot 4$ とすると

$$P(2) = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -3 & -9 & -5 & \underline{-1} \\ & -1 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & -4 & -5 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & -4 & -12 & -9 & \underline{-1} \\ & -1 & 1 & 3 & 9 & \\ \hline 1 & -1 & -3 & -9 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & -3 & -9 & \underline{3} \\ & 3 & 6 & 9 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$\text{ゆえに } P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 24$$

$$= (x-2)(x^2 + 5x + 12)$$

$P(x) = 0$ から $x-2=0$ または $x^2 + 5x + 12 = 0$

$$\text{したがって } x = 2, \frac{-5 \pm \sqrt{23}i}{2}$$

(4) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2$ とすると

$$P(-1) = 2 - 5 + 5 - 2 = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\text{ゆえに } P(x) = (x+1)(2x^3 + 3x^2 + 2x - 2)$$

$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ とすると

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 - 2 = 0$$

よって、 $Q(x)$ は $x - \frac{1}{2}$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } Q(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4x + 4) \\ &= (2x-1)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

よって $P(x) = (x+1)(2x-1)(x^2 + 2x + 2)$

$P(x) = 0$ から $x+1=0$ または $2x-1=0$ または $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\text{したがって } x = -1, \frac{1}{2}, -1 \pm i$$

17 方程式 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ を解け。

【解答】 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

解説

$x=0$ は方程式の解ではないから、方程式の両辺を x^2 で割ると

$$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{よって } x^2 + \frac{1}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x + \frac{1}{x} = t$ とおくと、 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = t^2 - 2$ であるから、 $\textcircled{1}$ は

$$(t^2 - 2) - 7t + 14 = 0$$

ゆえに $t^2 - 7t + 12 = 0$ よって $(t-3)(t-4) = 0$

したがって $t = 3, 4$

[1] $t = 3$ のとき $x + \frac{1}{x} = 3$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ であるから } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

[2] $t = 4$ のとき $x + \frac{1}{x} = 4$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ であるから } x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{よって、求める解は } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$$

18 次の方程式を解け。

(1) $x^3 = -64$

(2) $27x^3 - 8 = 0$

(3) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

(4) $x^4 - 144 = 0$

(5) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

(6) $x^4 + 13x^2 + 12 = 0$

【解答】 (1) $x = -4, 2 \pm 2\sqrt{3}i$ (2) $x = \frac{2}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{3}$ (3) $x = \pm 2i, \pm 3$

(4) $x = \pm 2\sqrt{3}, \pm 2\sqrt{3}i$ (5) $x = \pm \sqrt{3}, \pm 2$ (6) $x = \pm i, \pm 2\sqrt{3}i$

解説

(1) 移項すると $x^3 + 64 = 0$

$$\text{左辺を因数分解して } (x+4)(x^2 - 4x + 16) = 0$$

$$\text{よって } x+4=0 \quad \text{または} \quad x^2 - 4x + 16 = 0$$

$$\text{ゆえに } x = -4, 2 \pm 2\sqrt{3}i$$

(2) 左辺を因数分解すると $(3x-2)(9x^2 + 6x + 4) = 0$

$$\text{よって } 3x-2=0 \quad \text{または} \quad 9x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\text{ゆえに } x = \frac{2}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{3}$$

(3) 左辺を因数分解すると $(x^2 + 4)(x^2 - 9) = 0$

$$\text{よって } x^2 + 4 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 - 9 = 0$$

$$\text{ゆえに } x = \pm 2i, \pm 3$$

(4) 左辺を因数分解すると $(x^2 - 12)(x^2 + 12) = 0$

$$\text{よって } x^2 - 12 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 + 12 = 0$$

$$\text{ゆえに } x = \pm 2\sqrt{3}, \pm 2\sqrt{3}i$$

(5) 左辺を因数分解すると $(x^2 - 3)(x^2 - 4) = 0$

$$\text{よって } x^2 - 3 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$\text{ゆえに } x = \pm \sqrt{3}, \pm 2$$

(6) 左辺を因数分解すると $(x^2 + 1)(x^2 + 12) = 0$

$$\text{よって } x^2 + 1 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 + 12 = 0$$

$$\text{ゆえに } x = \pm i, \pm 2\sqrt{3}i$$

19 次の方程式を解け。

(1) $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$

(2) $x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0$

(3) $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0$

(4) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$

(5) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$

(6) $x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 18 = 0$

【解答】 (1) $x = 1, 2 \pm 2\sqrt{2}$ (2) $x = -1, \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$ (3) $x = 1, 3, -\frac{1}{2}$

(4) $x = \pm 2, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ (5) $x = 1, -1$ (6) $x = 2, 3, -1 \pm \sqrt{2}i$

解説

(1) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4$ とすると $P(1) = 1 - 5 + 4 = 0$

よって、 $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 4x - 4)$$

$P(x) = 0$ から $x-1=0$ または $x^2 - 4x - 4 = 0$

$$\text{したがって } x = 1, 2 \pm 2\sqrt{2}$$

(2) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$ とすると $P(-1) = -1 - 2 - 1 + 4 = 0$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 4)$$

$P(x) = 0$ から $x+1=0$ または $x^2 - 3x + 4 = 0$

$$\text{したがって } x = -1, \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

(3) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ とすると $P(1) = 2 - 7 + 2 + 3 = 0$

よって、 $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = (x-1)(2x^2 - 5x - 3) = (x-1)(x-3)(2x+1)$$

$P(x) = 0$ から $x-1=0$ または $x-3=0$ または $2x+1=0$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 3 & 2 & -24 & \underline{2} \\ & 2 & 10 & 24 & \\ \hline 1 & 5 & 12 & 0 & \end{array}$$

$$\text{したがって} \quad x=1, 3, -\frac{1}{2}$$

$$(4) \quad P(x)=x^4+x^3-2x^2-4x-8 \text{ とすると} \quad P(2)=16+8-8-8-8=0$$

よって、 $P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-2)(x^3+3x^2+4x+4)$$

$$Q(x)=x^3+3x^2+4x+4 \text{ とすると} \quad Q(-2)=-8+12-8+4=0$$

よって、 $Q(x)$ は $x+2$ で割り切れるから、 $Q(x)$ を因数分解すると

$$Q(x)=(x+2)(x^2+x+2)$$

$$\text{ゆえに} \quad P(x)=(x-2)(x+2)(x^2+x+2)$$

$$P(x)=0 \text{ から} \quad x-2=0 \quad \text{または} \quad x+2=0 \quad \text{または} \quad x^2+x+2=0$$

$$\text{したがって} \quad x=\pm 2, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$(5) \quad P(x)=x^4-2x^3+2x-1 \text{ とすると} \quad P(1)=1-2+2-1=0$$

よって、 $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-1)(x^3-x^2-x+1)$$

$$Q(x)=x^3-x^2-x+1 \text{ とすると} \quad Q(1)=1-1-1+1=0$$

よって、 $Q(x)$ は $x-1$ で割り切れるから、 $Q(x)$ を因数分解すると

$$Q(x)=(x-1)(x^2-1)$$

$$\text{ゆえに} \quad P(x)=(x-1)(x-1)(x^2-1)=(x-1)^3(x+1)$$

$$P(x)=0 \text{ から} \quad (x-1)^3=0 \quad \text{または} \quad x+1=0$$

$$\text{したがって} \quad x=1, -1$$

$$\boxed{\text{別解}} \quad x^4-2x^3+2x-1=(x^4-1)-2x(x^2-1)=(x^2+1)(x^2-1)-2x(x^2-1)$$

$$=(x^2-2x+1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)(x-1)$$

$$=(x-1)^3(x+1)$$

$$\text{よって、方程式は} \quad (x-1)^3(x+1)=0$$

$$\text{したがって} \quad x=1, -1$$

$$(6) \quad P(x)=x^4-3x^3-x^2-3x+18 \text{ とすると} \quad P(2)=16-24-4-6+18=0$$

よって、 $P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-2)(x^3-x^2-3x-9)$$

$$Q(x)=x^3-x^2-3x-9 \text{ とすると} \quad Q(3)=27-9-9-9=0$$

よって、 $Q(x)$ は $x-3$ で割り切れるから、 $Q(x)$ を因数分解すると

$$Q(x)=(x-3)(x^2+2x+3)$$

$$\text{ゆえに} \quad P(x)=(x-2)(x-3)(x^2+2x+3)$$

$$P(x)=0 \text{ から} \quad x-2=0 \quad \text{または} \quad x-3=0 \quad \text{または} \quad x^2+2x+3=0$$

$$\text{したがって} \quad x=2, 3, -1 \pm \sqrt{2}i$$

$\boxed{20}$ 次の方程式を解け。

$$(1) \quad 4x^3+3x-2=0$$

$$(2) \quad 2x^3-7x^2+2=0$$

$$(3) \quad 3x^3-10x^2+1=0$$

$$(4) \quad (x-1)(x-2)(x-3)=4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$(5) \quad (x^2-2x)^2-(x^2-2x)-6=0$$

$$(6) \quad x^4+x^2+1=0$$

$$(7) \quad (x^2-5x+1)(x^2-5x+9)+15=0$$

$$\boxed{\text{解答}} \quad (1) \quad x=\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4} \quad (2) \quad x=-\frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{2} \quad (3) \quad x=\frac{1}{3}, \frac{3 \pm \sqrt{13}i}{2}$$

$$(4) \quad x=5, \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2} \quad (5) \quad x=-1, 3, 1 \pm i$$

$$(6) \quad x=\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (7) \quad x=1, 2, 3, 4$$

$\boxed{\text{解説}}$

$$(1) \quad P(x)=4x^3+3x-2 \text{ とすると} \quad P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2=0$$

よって、 $P(x)$ は $2x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(2x-1)(2x^2+x+2)$$

$$P(x)=0 \text{ から} \quad 2x-1=0 \quad \text{または} \quad 2x^2+x+2=0$$

$$\text{したがって} \quad x=\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$$

$$(2) \quad P(x)=2x^3-7x^2+2 \text{ とすると} \quad P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}+2=0$$

よって、 $P(x)$ は $2x+1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(2x+1)(x^2-4x+2)$$

$$P(x)=0 \text{ から} \quad 2x+1=0 \quad \text{または} \quad x^2-4x+2=0$$

$$\text{したがって} \quad x=-\frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{2}$$

$$(3) \quad P(x)=3x^3-10x^2+1 \text{ とすると} \quad P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{10}{9}+1=0$$

よって、 $P(x)$ は $3x-1$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(3x-1)(x^2-3x-1)$$

$$P(x)=0 \text{ から} \quad 3x-1=0 \quad \text{または} \quad x^2-3x-1=0$$

$$\text{したがって} \quad x=\frac{1}{3}, \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(4) \quad P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ とすると} \quad P(5)=4 \cdot 3 \cdot 2-4 \cdot 3 \cdot 2=0$$

$$\text{また} \quad P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)-24=x^3-6x^2+11x-30$$

$P(x)$ は $x-5$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(x-5)(x^2-x+6)$$

$$P(x)=0 \text{ から} \quad x-5=0 \quad \text{または} \quad x^2-x+6=0$$

$$\text{したがって} \quad x=5, \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$$

$$(5) \quad x^2-2x=t \text{ とおくと、方程式は} \quad t^2-t-6=0$$

$$\text{左辺を因数分解して} \quad (t-3)(t+2)=0$$

$$\text{よって} \quad (x^2-2x-3)(x^2-2x+2)=0$$

$$\text{すなわち} \quad (x+1)(x-3)(x^2-2x+2)=0$$

$$\text{したがって} \quad x=-1, 3, 1 \pm i$$

$$(6) \quad \text{方程式から} \quad (x^4+2x^2+1)-x^2=0$$

$$\text{ゆえに} \quad (x^2+1)^2-x^2=0$$

$$\text{よって} \quad \{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}=0$$

$$\text{すなわち} \quad (x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\text{したがって} \quad x=\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$(7) \quad x^2-5x=t \text{ とおくと、方程式は} \quad (t+1)(t+9)+15=0$$

$$\text{整理すると} \quad t^2+10t+24=0$$

$$\text{左辺を因数分解して} \quad (t+4)(t+6)=0$$

$$\text{よって} \quad (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=0$$

$$\text{すなわち} \quad (x-1)(x-4)(x-2)(x-3)=0$$

$$\text{したがって} \quad x=1, 2, 3, 4$$