複素数クイズ

1 次の複素数の実部と虚部をいえ。

(1) $-2-3i$　(2) $\dfrac{-2+\sqrt{5}\,i}{3}$　(3) -4　(4) $5i$

解答　実部，虚部の順に

(1) -2，-3　(2) $-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(3) -4，0　(4) 0，5

解説

実部，虚部の順に

(1) -2，-3　(2) $-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(3) -4，0　(4) 0，5

2 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

$$3x+(2x-3y)i=6+i$$

解答　$x=2$，$y=1$

解説

x，y が実数であるから，$3x$，$2x-3y$ は実数である。

よって　$3x=6$ かつ $2x-3y=1$

これを解いて　$x=2$，$y=1$

3 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(1) $(x+3)+(x-y)i=0$　(2) $(3x-y)+(2x+3y)i=9-5i$

解答　(1) $x=-3$，$y=-3$　(2) $x=2$，$y=-3$

解説

(1) x，y が実数であるから，$x+3$，$x-y$ は実数である。

よって　$x+3=0$　かつ　$x-y=0$

これを解いて　$x=-3$，$y=-3$

(2) x，y が実数であるから，$3x-y$，$2x+3y$ は実数である。

よって　$3x-y=9$　かつ　$2x+3y=-5$

これを解いて　$x=2$，$y=-3$

4 次の式を計算せよ。

(1) $(7+3i)+(3-4i)$　(2) $(2-i)-(5-2i)$　(3) $(2+3i)(3-2i)$

(4) $(1-3i)^2$　(5) $(4+3i)(4-3i)$　(6) i^3

解答　(1) $10-i$　(2) $-3+i$　(3) $12+5i$　(4) $-8-6i$　(5) 25　(6) $-i$

解説

(1) 与式$=(7+3)+(3-4)i=10-i$

(2) 与式$=(2-5)+(-1+2)i=-3+i$

(3) 与式$=2\cdot3+2\cdot(-2)i+3\cdot3i+3\cdot(-2)i^2$

$=6+5i-6\cdot(-1)=12+5i$

(4) 与式$=1-6i+9i^2=1-6i-9=-8-6i$

(5) 与式$=4^2-(3i)^2=16-(-9)=25$

(6) 与式$=i^2\cdot i=(-1)i=-i$

5 次の複素数と共役な複素数をいえ。

(1) $3+2i$　(2) $-4-5i$　(3) $\sqrt{3}\,i$　(4) -5

解答　(1) $3-2i$　(2) $-4+5i$　(3) $-\sqrt{3}\,i$　(4) -5

解説

(1) $3-2i$　(2) $-4+5i$　(3) $-\sqrt{3}\,i$　(4) -5

6 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{7+i}{1+3i}$　(2) $\dfrac{2i}{3-i}$　(3) $\dfrac{3-2i}{3+2i}$

解答　(1) $1-2i$　(2) $-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$　(3) $\dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}i$

解説

(1) 与式$=\dfrac{(7+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{7-21i+i-3i^2}{1^2-(3i)^2}=\dfrac{10-20i}{10}=1-2i$

(2) 与式$=\dfrac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{6i+2i^2}{3^2-i^2}=\dfrac{-2+6i}{10}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

(3) 与式$=\dfrac{(3-2i)^2}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{9-12i+(2i)^2}{3^2-(2i)^2}=\dfrac{5-12i}{13}=\dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}i$

7 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{-18}\sqrt{-8}$　(2) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-9}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{-45}}{\sqrt{-5}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}$

解答　(1) -12　(2) $-\sqrt{3}\,i$　(3) 3　(4) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$

解説

(1) 与式$=\sqrt{18}\,i\times\sqrt{8}\,i=3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\,i^2=-12$

(2) 与式$=\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{9}\,i}=\dfrac{\sqrt{3}}{i}=\dfrac{\sqrt{3}\,i}{i^2}=-\sqrt{3}\,i$

(3) 与式$=\dfrac{\sqrt{45}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{45}{5}}=\sqrt{9}=3$

(4) 与式$=\dfrac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{3}i=\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$

8 次の式を計算せよ。

(1) $(\sqrt{-2}+\sqrt{5})(\sqrt{-24}-\sqrt{15})$　(2) $(1+i)^3$

(3) $i+i^2+i^3+i^4+\dfrac{1}{i}$　(4) $\dfrac{1-i}{2-i}+\dfrac{1+i}{2+i}$

解答　(1) $-9\sqrt{3}+\sqrt{30}\,i$　(2) $-2+2i$　(3) $-i$　(4) $\dfrac{6}{5}$

解説

(1) 与式$=(\sqrt{2}\,i+\sqrt{5})(2\sqrt{6}\,i-\sqrt{15})$

$=4\sqrt{3}\,i^2-\sqrt{30}\,i+2\sqrt{30}\,i-5\sqrt{3}=-9\sqrt{3}+\sqrt{30}\,i$

(2) 与式$=1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$

(3) 与式$=i-1-i+1-i=-i$

(4) 与式$=\dfrac{(1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\dfrac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{3-i}{5}+\dfrac{3+i}{5}=\dfrac{6}{5}$

9 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(1) $(4-3i)x-(3-2i)y=6-5i$　(2) $(1+i)(x-yi)=1+3i$

解答　(1) $x=3$，$y=2$　(2) $x=2$，$y=-1$

解説

(1) 与えられた等式の左辺を整理すると

$(4x-3y)-(3x-2y)i=6-5i$

x，y が実数であるから，$4x-3y$，$3x-2y$ は実数である。

よって　$4x-3y=6$，$3x-2y=5$

これを解いて　$x=3$，$y=2$

(2) 与えられた等式の左辺を展開して整理すると

$(x+y)+(x-y)i=1+3i$

x，y が実数であるから，$x+y$，$x-y$ は実数である。

よって　$x+y=1$，$x-y=3$

これを解いて　$x=2$，$y=-1$

10 次の計算をせよ。[各 5 点]

(1) $(2+4i)+(-5+3i)$　(2) $(3-5i)-(-2+4i)$　(3) $(1+2i)(4-3i)$

(4) $(3-2i)^2$　(5) $(4+5i)(4-5i)$　(6) i^5

(7) $\dfrac{2+3i}{2-3i}$　(8) $\dfrac{-i}{3-i}$

解答

(1) 与式$=-3+7i$

(2) 与式$=3-5i+2-4i=5-9i$

(3) 与式$=4+(-3+8)i-6i^2=10+5i$

(4) 与式$=9-12i+4i^2=5-12i$

(5) 与式$=16-25i^2=41$

(6) 与式$=(i^2)^2\cdot i=(-1)^2\cdot i=i$

(7) 与式$=\dfrac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{4+12i+9i^2}{4-9i^2}=\dfrac{-5+12i}{13}$

(8) 与式$=\dfrac{-i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{-3i-i^2}{9-i^2}=\dfrac{1-3i}{10}$

解説

(1) 与式$=-3+7i$

(2) 与式$=3-5i+2-4i=5-9i$

(3) 与式$=4+(-3+8)i-6i^2=10+5i$

(4) 与式$=9-12i+4i^2=5-12i$

(5) 与式$=16-25i^2=41$

(6) 与式$=(i^2)^2\cdot i=(-1)^2\cdot i=i$

(7) 与式$=\dfrac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{4+12i+9i^2}{4-9i^2}=\dfrac{-5+12i}{13}$

(8) 与式$=\dfrac{-i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{-3i-i^2}{9-i^2}=\dfrac{1-3i}{10}$

11 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。[各 5 点]

(1) $(2x-y)+(x+2y)i=-5$

(2) $(x-2y)+(x+y)i=1+7i$

解答　(1) x，y が実数であるから，$2x-y$，$x+2y$ は実数である。

よって　$2x-y=-5$，$x+2y=0$

これを解いて　$x=-2$，$y=1$

(2)　x，y が実数であるから，$x-2y$，$x+y$ は実数である。

よって　$x-2y=1$，$x+y=7$

これを解いて　$x=5$，$y=2$

解説

(1)　x，y が実数であるから，$2x-y$，$x+2y$ は実数である。

よって　$2x-y=-5$，$x+2y=0$

これを解いて　$x=-2$，$y=1$

(2)　x，y が実数であるから，$x-2y$，$x+y$ は実数である。

よって　$x-2y=1$，$x+y=7$

これを解いて　$x=5$，$y=2$

12 次の計算をせよ。[各 8 点]

(1)　$(2+i)^3$　　(2)　$\dfrac{2+3i}{1+2i}+\dfrac{2i}{3-i}$

解答　(1)　$(2+i)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot i+3\cdot2\cdot i^2+i^3$

$=8+12i-6-i=2+11i$

(2)　$\dfrac{2+3i}{1+2i}+\dfrac{2i}{3-i}=\dfrac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\dfrac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$=\dfrac{8-i}{5}+\dfrac{2(-1+3i)}{10}=\dfrac{7+2i}{5}$

解説

(1)　$(2+i)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot i+3\cdot2\cdot i^2+i^3$

$=8+12i-6-i=2+11i$

(2)　$\dfrac{2+3i}{1+2i}+\dfrac{2i}{3-i}=\dfrac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\dfrac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$=\dfrac{8-i}{5}+\dfrac{2(-1+3i)}{10}=\dfrac{7+2i}{5}$

13 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。[20 点]

$$\frac{x+3i}{3-4i}=y+i$$

解答　等式の両辺に $3-4i$ を掛けると　$x+3i=(y+i)(3-4i)$

右辺を整理すると　$x+3i=(3y+4)+(3-4y)i$

x，y は実数より　$x=3y+4$，$3=3-4y$

これを解いて　$x=4$，$y=0$

解説

等式の両辺に $3-4i$ を掛けると　$x+3i=(y+i)(3-4i)$

右辺を整理すると　$x+3i=(3y+4)+(3-4y)i$

x，y は実数より　$x=3y+4$，$3=3-4y$

これを解いて　$x=4$，$y=0$

14 $x=3+2i$ のとき，次の問いに答えよ。[各 10 点]

(1)　$x^2-6x+13=0$ であることを示せ。

(2)　x^3-5x^2+7x+5 の値を求めよ。

解答　(1)　$x=3+2i$ から　$x-3=2i$

よって　$(x-3)^2=(2i)^2$　　ゆえに　$x^2-6x+13=0$

(2)　与式を $x^2-6x+13$ で割ると，商は $x+1$，余りは -8 であるから

$x^3-5x^2+7x+5=(x^2-6x+13)(x+1)-8$

よって，$x=3+2i$ を代入すると，$x^2-6x+13=0$ より，求める値は　-8

解説

(1)　$x=3+2i$ から　$x-3=2i$

よって　$(x-3)^2=(2i)^2$　　ゆえに　$x^2-6x+13=0$

(2)　与式を $x^2-6x+13$ で割ると，商は $x+1$，余りは -8 であるから

$x^3-5x^2+7x+5=(x^2-6x+13)(x+1)-8$

よって，$x=3+2i$ を代入すると，$x^2-6x+13=0$ より，求める値は　-8

15 $(1+xi)(3-i)$ が　(1)　実数　(2)　純虚数　となるように，実数 x の値を定めよ。

解答　(1)　$x=\dfrac{1}{3}$　　(2)　$x=-3$

解説

$(1+xi)(3-i)=3-i+3xi-xi^2=x+3+(3x-1)i$

x は実数であるから，$x+3$ と $3x-1$ は実数である。

(1)　$(1+xi)(3-i)$ が実数となるための条件は，$3x-1=0$ から　$x=\dfrac{1}{3}$

(2)　$(1+xi)(3-i)$ が純虚数となるための条件は

$x+3=0$　かつ　$3x-1\neq0$

$x+3=0$ から　$x=-3$　これは $3x-1\neq0$ を満たす。

16 次の計算をせよ。

(1)　$(5-3i)-(3-2i)$　　(2)　$(6-2i)(-3+4i)$　　(3)　$\dfrac{3-2i}{3+2i}$

解答　(1)　$2-i$　　(2)　$-10+30i$　　(3)　$\dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}i$

解説

(1)　$(5-3i)-(3-2i)=(5-3)+(-3+2)i=2-i$

(2)　$(6-2i)(-3+4i)=-18+24i+6i-8i^2$

$=-18+24i+6i-8\cdot(-1)$

$=-10+30i$

(3)　$\dfrac{3-2i}{3+2i}=\dfrac{(3-2i)^2}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{9-12i+4i^2}{9-4i^2}$

$=\dfrac{9-12i+4\cdot(-1)}{9-4\cdot(-1)}=\dfrac{5-12i}{13}=\dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}i$

17 次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{-9}+\sqrt{-16}$　　(2)　$\sqrt{-27}\times\sqrt{-12}$　　(3)　$(\sqrt{-5})^2$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-8}}$

解答　(1)　$7i$　　(2)　-18　　(3)　-5　　(4)　3

解説

(1)　$\sqrt{-9}+\sqrt{-16}=\sqrt{9}\,i+\sqrt{16}\,i=3i+4i=7i$

(2)　$\sqrt{-27}\times\sqrt{-12}=\sqrt{27}\,i\times\sqrt{12}\,i=3\sqrt{3}\,i\times2\sqrt{3}\,i=6\cdot3i^2=-18$

(3)　$(\sqrt{-5})^2=(\sqrt{5}\,i)^2=(\sqrt{5})^2i^2=-5$

(4)　$\dfrac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-8}}=\dfrac{\sqrt{72}\,i}{\sqrt{8}\,i}=\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\dfrac{72}{8}}=\sqrt{9}=3$

18 次の複素数と，それぞれに共役な複素数との和，積を求めよ。

(1)　$5-2i$　　(2)　$\sqrt{2}\,i$　　(3)　-2

解答　(1)　和 10，積 29　　(2)　和 0，積 2　　(3)　和 -4，積 4

解説

(1)　$5-2i$ と共役な複素数は　$5+2i$

よって　和　$(5-2i)+(5+2i)=10$

積　$(5-2i)(5+2i)=5^2-(2i)^2=25-(-4)=29$

(2)　$\sqrt{2}\,i=0+\sqrt{2}\,i$ と表されるから，$\sqrt{2}\,i$ と共役な複素数は

$0-\sqrt{2}\,i$　すなわち　$-\sqrt{2}\,i$

よって　和　$\sqrt{2}\,i+(-\sqrt{2}\,i)=0$

積　$\sqrt{2}\,i(-\sqrt{2}\,i)=-2i^2=2$

(3)　$-2=-2+0\cdot i$ と表されるから，-2 と共役な複素数は

$-2-0\cdot i$　すなわち　-2

よって　和　$-2+(-2)=-4$

積　$(-2)\cdot(-2)=4$

19 次の計算をせよ。

(1)　$(4-\sqrt{-9})-(3+\sqrt{-4})$　　(2)　$(3+2i)^2$

(3)　$\dfrac{2+\sqrt{-3}}{2-\sqrt{-3}}$　　(4)　$\left(\dfrac{1+2i}{2-i}\right)^2$

解答　(1)　$1-5i$　　(2)　$5+12i$　　(3)　$\dfrac{1}{7}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}i$　　(4)　-1

解説

(1)　$(4-\sqrt{-9})-(3+\sqrt{-4})=(4-\sqrt{9}\,i)-(3+\sqrt{4}\,i)$

$=(4-3i)-(3+2i)$

$=(4-3)+(-3-2)i$

$=1-5i$

(2)　$(3+2i)^2=9+12i+4i^2=9+12i+4\cdot(-1)$

$=5+12i$

(3)　$\dfrac{2+\sqrt{-3}}{2-\sqrt{-3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}\,i}{2-\sqrt{3}\,i}=\dfrac{(2+\sqrt{3}\,i)^2}{(2-\sqrt{3}\,i)(2+\sqrt{3}\,i)}$

$=\dfrac{4+4\sqrt{3}\,i+3i^2}{4-3i^2}=\dfrac{4+4\sqrt{3}\,i+3\cdot(-1)}{4-3\cdot(-1)}$

$=\dfrac{1+4\sqrt{3}\,i}{7}=\dfrac{1}{7}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}i$

(4)　$\left(\dfrac{1+2i}{2-i}\right)^2=\left\{\dfrac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right\}^2=\left(\dfrac{2+i+4i+2i^2}{4-i^2}\right)^2$

$=\left\{\dfrac{2+5i+2\cdot(-1)}{4-(-1)}\right\}^2=\left(\dfrac{5i}{5}\right)^2$

$=i^2=-1$

20 次の計算をせよ。

(1)　$(3-\sqrt{-4})+(4+\sqrt{-25})$　　(2)　$(\sqrt{-2}+\sqrt{5})(\sqrt{-6}-\sqrt{15})$

(3) $(1+2i)^3$　(4) $\dfrac{1}{i},\ \dfrac{1}{i^2},\ \dfrac{1}{i^3}$　(5) $\dfrac{1-3i}{1+3i}+\dfrac{1+3i}{1-3i}$

(6) $\dfrac{2-i}{3+i}-\dfrac{5+10i}{1-3i}$　(7) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$

解答 (1) $7+3i$　(2) $-7\sqrt{3}$　(3) $-11-2i$　(4) $\dfrac{1}{i}=-i,\ \dfrac{1}{i^2}=-1,\ \dfrac{1}{i^3}=i$

(5) $-\dfrac{8}{5}$　(6) $3-3i$　(7) 0

解説

(1) $(3-\sqrt{-4})+(4+\sqrt{-25})=(3-\sqrt{4}i)+(4+\sqrt{25}i)$
$=(3-2i)+(4+5i)$
$=(3+4)+(-2+5)i$
$=7+3i$

(2) $(\sqrt{-2}+\sqrt{5})(\sqrt{-6}-\sqrt{15})=(\sqrt{2}i+\sqrt{5})(\sqrt{6}i-\sqrt{15})$
$=\sqrt{3}(\sqrt{2}i+\sqrt{5})(\sqrt{2}i-\sqrt{5})$
$=\sqrt{3}\{(\sqrt{2}i)^2-(\sqrt{5})^2\}$
$=\sqrt{3}(2i^2-5)$
$=-7\sqrt{3}$

(3) $(1+2i)^3=1+6i+12i^2+8i^3=1+6i-12-8i$
$=(1-12)+(6-8)i=-11-2i$

(4) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=-i,\quad \dfrac{1}{i^2}=\dfrac{1}{-1}=-1,$

$\dfrac{1}{i^3}=\dfrac{1}{i^2 i}=\dfrac{1}{-i}=\dfrac{i}{-i^2}=\dfrac{i}{-(-1)}=i$

(5) $\dfrac{1-3i}{1+3i}+\dfrac{1+3i}{1-3i}=\dfrac{(1-3i)^2+(1+3i)^2}{(1+3i)(1-3i)}$
$=\dfrac{(1-6i+9i^2)+(1+6i+9i^2)}{1-9i^2}$
$=\dfrac{(-8-6i)+(-8+6i)}{10}$
$=\dfrac{-16}{10}=-\dfrac{8}{5}$

(6) $\dfrac{2-i}{3+i}-\dfrac{5+10i}{1-3i}=\dfrac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}-\dfrac{(5+10i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$
$=\dfrac{6-5i+i^2}{9-i^2}-\dfrac{5+25i+30i^2}{1-9i^2}$
$=\dfrac{5-5i}{10}-\dfrac{-25+25i}{10}=\dfrac{30-30i}{10}=3-3i$

(7) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$
$=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}+\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)}$
$=\dfrac{\sqrt{6}-2i-3i+\sqrt{6}i^2}{3-2i^2}+\dfrac{\sqrt{6}+3i+2i+\sqrt{6}i^2}{2-3i^2}$
$=\dfrac{-5i}{5}+\dfrac{5i}{5}=0$

21 次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。
(1) $(3+2i)x+(1-i)y=7+3i$　(2) $(3+2i)(2x-yi)=4+7i$

解答 (1) $x=2,\ y=1$　(2) $x=1,\ y=-1$

解説

(1) 与式から　$3x+y+(2x-y)i=7+3i$
x, y は実数であるから，$3x+y$, $2x-y$ は実数である。
よって　$3x+y=7,\ 2x-y=3$
この連立方程式を解いて　$x=2,\ y=1$

(2) 与式から　$2x-yi=\dfrac{4+7i}{3+2i}$

ここで　$\dfrac{4+7i}{3+2i}=\dfrac{(4+7i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{12-8i+21i-14i^2}{9-4i^2}$
$=\dfrac{12+13i+14}{9+4}=\dfrac{26+13i}{13}=2+i$

よって　$2x-yi=2+i$
x, y は実数であるから，$2x$, $-y$ は実数である。
ゆえに　$2x=2,\ -y=1$
したがって　$x=1,\ y=-1$

22 次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。
(1) $(2x+y)+(x-y-9)i=0$　(2) $(3+2i)x+2(1-i)y=17-2i$
(3) $\dfrac{3-2i}{x+2yi}=1+i$

解答 (1) $x=3,\ y=-6$　(2) $x=3,\ y=4$　(3) $x=\dfrac{1}{2},\ y=-\dfrac{5}{4}$

解説

(1) x, y は実数であるから，$2x+y$, $x-y-9$ は実数である。
よって　$2x+y=0,\ x-y-9=0$
この連立方程式を解いて　$x=3,\ y=-6$

(2) 左辺を i について整理すると　$(3x+2y)+2(x-y)i=17-2i$
x, y は実数であるから，$3x+2y$, $2(x-y)$ は実数である。
よって　$3x+2y=17,\ x-y=-1$
この連立方程式を解いて　$x=3,\ y=4$

(3) 与式から　$x+2yi=\dfrac{3-2i}{1+i}$

$\dfrac{3-2i}{1+i}=\dfrac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3-5i+2i^2}{1-i^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$ であるから

$x+2yi=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

x, $2y$ は実数であるから　$x=\dfrac{1}{2},\ 2y=-\dfrac{5}{2}$

したがって　$x=\dfrac{1}{2},\ y=-\dfrac{5}{4}$

23 平方すると i になる複素数 z を求めよ。

解答 $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

解説

$z=x+yi$ (x, y は実数) とすると
$z^2=(x+yi)^2=x^2+2xyi+y^2i^2=x^2-y^2+2xyi$
$z^2=i$ から　$x^2-y^2+2xyi=i$
x, y は実数であるから，x^2-y^2, $2xy$ は実数である。
よって　$x^2-y^2=0$ …… ①，　$2xy=1$ …… ②
① から　$(x+y)(x-y)=0$　ゆえに　$x=\pm y$
[1] $x=y$ のとき　② から　$2y^2=1$

よって　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[2] $x=-y$ のとき　② から　$-2y^2=1$
これを満たす実数 y はない。

[1], [2] から　$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

24 (1) 平方すると $-i$ となる複素数 z を求めよ。
(2) 平方すると $3+4i$ になる複素数 z は 2 つあり，$z=x+yi$ (x, y は整数) の形に書き表される。この複素数 z を求めよ。

解答 (1) $z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$　(2) $z=2+i,\ -2-i$

解説

(1) $z=x+yi$ (x, y は実数) とすると
$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$
$z^2=-i$ から　$x^2-y^2+2xyi=-i$
x, y は実数であるから，x^2-y^2, $2xy$ は実数である。
ゆえに　$x^2-y^2=0$ …… ①，　$2xy=-1$ …… ②
① から　$(x+y)(x-y)=0$　よって　$x=\pm y$
② より，x と y は異符号であるから　$x=-y$
これを ② に代入して　$-2y^2=-1$

ゆえに　$y^2=\dfrac{1}{2}$　よって　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

(2) $z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$
$z^2=3+4i$ から　$x^2-y^2+2xyi=3+4i$
x, y は整数であるから，x^2-y^2, $2xy$ は整数である。
よって　$x^2-y^2=3$ …… ①，　$2xy=4$ …… ②
② から　$xy=2$
これを満たす整数 x, y の組 $(x,\ y)$ は
$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (-1,\ -2),\ (-2,\ -1)$
このうち，① を満たすのは　$(2,\ 1),\ (-2,\ -1)$
したがって　$z=2+i,\ -2-i$

別解 [4 行目まで同じ]

② より，$x\fallingdotseq 0$ であるから　$y=\dfrac{2}{x}$ …… ③

③ を ① に代入して　$x^2-\dfrac{4}{x^2}=3$

両辺に x^2 を掛けて整理すると　$x^4-3x^2-4=0$

ゆえに　$(x^2+1)(x^2-4)=0$

x は整数であるから　$x^2+1>0$

よって　$x^2-4=0$

これを解いて　$x=\pm 2$

③ に代入して　$y=\pm 1$（複号同順）

したがって　$z=2+i,\ -2-i$

25 i を虚数単位とする。

(1)　$z^2=7+24i$ となる複素数 z を求めよ。

(2)　$w^3=46+9i$ となる複素数 w を求めよ。ただし，w の実部および虚部はともに整数である。

解答　(1)　$z=4+3i,\ -4-3i$　　(2)　$w=-2+3i$

解説

(1)　$z=a+bi$（a，b は実数）とすると

$$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

$z^2=7+24i$ から　$a^2-b^2+2abi=7+24i$

a，b は実数であるから，a^2-b^2，$2ab$ は実数である。

よって　$a^2-b^2=7$　……①，$2ab=24$　……②

② より $ab=12$ で，$a\neq 0$ であるから　$b=\dfrac{12}{a}$

これを ① に代入して　$a^2-\left(\dfrac{12}{a}\right)^2=7$

整理して　$a^4-7a^2-144=0$

すなわち　$(a^2+9)(a+4)(a-4)=0$

a は実数であるから　$a=\pm 4$

$a=4$ のとき　$b=3$，　$a=-4$ のとき　$b=-3$

したがって　$z=4+3i,\ -4-3i$

(2)　$w=c+di$（c，d は整数）とすると

$$w^3=(c+di)^3=c^3-3cd^2+(3c^2d-d^3)i$$

$w^3=46+9i$ から　$c^3-3cd^2+(3c^2d-d^3)i=46+9i$

c，d は整数であるから，c^3-3cd^2，$3c^2d-d^3$ は整数である。

よって　$c^3-3cd^2=46$　……③，$3c^2d-d^3=9$　……④

④ から　$d(3c^2-d^2)=9$

d，$3c^2-d^2$ は整数であるから

$(d,\ 3c^2-d^2)=(\pm 1,\ \pm 9),\ (\pm 3,\ \pm 3),\ (\pm 9,\ \pm 1)$（複号同順）

[1]　$(d,\ 3c^2-d^2)=(1,\ 9)$ のとき

$3c^2-1^2=9$ から　$3c^2=10$

よって，c が整数とならないから不適。

[2]　$(d,\ 3c^2-d^2)=(-1,\ -9)$ のとき

$3c^2-(-1)^2=-9$ から　$3c^2=-8$

よって，c が整数とならないから不適。

[3]　$(d,\ 3c^2-d^2)=(3,\ 3)$ のとき

$3c^2-3^2=3$ から　$3c^2=12$

よって　$c=\pm 2$

$c=2$ のとき，③ を満たさない。

$c=-2$ のとき，③ を満たす。

[4]　$(d,\ 3c^2-d^2)=(-3,\ -3)$ のとき

$3c^2-(-3)^2=-3$ から　$3c^2=6$

よって，c が整数とならないから不適。

[5]　$(d,\ 3c^2-d^2)=(9,\ 1)$ のとき

$3c^2-9^2=1$ から　$3c^2=82$

よって，c が整数とならないから不適。

[6]　$(d,\ 3c^2-d^2)=(-9,\ -1)$ のとき

$3c^2-(-9)^2=-1$ から　$3c^2=80$

よって，c が整数とならないから不適。

以上から　$c=-2,\ d=3$

したがって　$w=-2+3i$

26 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(1)　$x+yi=2+3i$　　(2)　$x-3i=1+yi$

(3)　$(x+2y)+(x-2)i=0$　　(4)　$(x+3y)+(2x-y)i=9+4i$

解答　(1)　$x=2,\ y=3$　　(2)　$x=1,\ y=-3$　　(3)　$x=2,\ y=-1$　　(4)　$x=3,\ y=2$

解説

(1)　$x=2,\ y=3$

(2)　$x=1,\ y=-3$

(3)　$x+2y$，$x-2$ は実数であるから　$x+2y=0,\ x-2=0$

これを解いて　$x=2,\ y=-1$

(4)　$x+3y$，$2x-y$ は実数であるから　$x+3y=9,\ 2x-y=4$

これを解いて　$x=3,\ y=2$

27 次の式を計算せよ。

(1)　$(2+3i)+(3-5i)$　　(2)　$(5+3i)-(6-8i)$　　(3)　$(3-4i)-(3+4i)$

(4)　$(5+2i)(2-3i)$　　(5)　$(3-2i)^2$　　(6)　$(2-5i)(2i-5)$

(7)　$(6-2i)(6+2i)$　　(8)　i^5　　(9)　$(1+2i)^3$

解答　(1)　$5-2i$　　(2)　$-1+11i$　　(3)　$-8i$　　(4)　$16-11i$　　(5)　$5-12i$　　(6)　$29i$　　(7)　40　　(8)　i　　(9)　$-11-2i$

解説

(1)　与式$=(2+3)+(3-5)i=5-2i$

(2)　与式$=(5-6)+(3+8)i=-1+11i$

(3)　与式$=(3-3)+(-4-4)i=-8i$

(4)　与式$=5\cdot 2-5\cdot 3i+2\cdot 2i-2\cdot 3i^2=(10+6)+(-15+4)i=16-11i$

(5)　与式$=3^2-2\cdot 3\cdot 2i+2^2i^2=(9-4)-12i=5-12i$

(6)　与式$=2\cdot 2i-2\cdot 5-5\cdot 2i^2+5\cdot 5i=(-10+10)+(4+25)i=29i$

(7)　与式$=6^2-(2i)^2=36-(-4)=40$

(8)　与式$=i^2\cdot i^2\cdot i=(-1)\cdot(-1)\cdot i=i$

(9)　与式$=1^3+3\cdot 1^2\cdot(2i)+3\cdot 1\cdot(2i)^2+(2i)^3=1+6i+3\cdot 2^2\cdot i^2+2^3\cdot i^3$

$=1+6i-12+8\cdot i^2\cdot i=(1-12)+(6-8)i=-11-2i$

28 次の式を計算せよ。

(1)　$\dfrac{2}{1+i}$　　(2)　$\dfrac{2+3i}{2-3i}$　　(3)　$\dfrac{i}{\sqrt{3}+i}$　　(4)　$\dfrac{3-2i}{i}$

解答　(1)　$1-i$　　(2)　$-\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}i$　　(3)　$\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$　　(4)　$-2-3i$

解説

(1)　与式$=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2(1-i)}{1-i^2}=\dfrac{2(1-i)}{2}=1-i$

(2)　与式$=\dfrac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{4+12i+9i^2}{4-9i^2}=\dfrac{-5+12i}{13}=-\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}i$

(3)　与式$=\dfrac{i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{\sqrt{3}\,i-i^2}{3-i^2}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

(4)　与式$=\dfrac{(3-2i)i}{i^2}=\dfrac{3i-2i^2}{-1}=-2-3i$

参考　(4) のように分母が純虚数の場合は，分母と分子に i を掛ければよい。

29 次の式を計算せよ。

(1)　$\sqrt{-27}\sqrt{-12}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{-24}}{\sqrt{-6}}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{-75}}{\sqrt{15}}$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-6}}$

解答　(1)　-18　　(2)　2　　(3)　$\sqrt{5}\,i$　　(4)　$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}i$

解説

(1)　与式$=\sqrt{27}\,i\times\sqrt{12}\,i=3\sqrt{3}\,i\times 2\sqrt{3}\,i=18i^2=-18$

(2)　与式$=\dfrac{\sqrt{24}\,i}{\sqrt{6}\,i}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=2$

(3)　与式$=\dfrac{\sqrt{75}\,i}{\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{75}{15}}\,i=\sqrt{5}\,i$

(4)　与式$=\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}\,i}=\dfrac{\sqrt{8}\sqrt{6}\,i}{\sqrt{6}\,i\sqrt{6}\,i}=\dfrac{4\sqrt{3}\,i}{-6}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}i$

30 次の式を計算せよ。

(1)　$(\sqrt{3}+\sqrt{-1})(2-\sqrt{-3})$　　(2)　$(1-\sqrt{-3})^2$

(3)　$\dfrac{2-\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-5}}$

解答　(1)　$3\sqrt{3}-i$　　(2)　$-2-2\sqrt{3}\,i$　　(3)　$-\dfrac{1}{9}-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}i$

解説

(1)　与式$=(\sqrt{3}+i)(2-\sqrt{3}\,i)=2\sqrt{3}-3i+2i-\sqrt{3}\,i^2=(2\sqrt{3}+\sqrt{3})+(-3+2)i$

$=3\sqrt{3}-i$

(2)　与式$=(1-\sqrt{3}\,i)^2=1-2\sqrt{3}\,i+3i^2=(1-3)-2\sqrt{3}\,i=-2-2\sqrt{3}\,i$

(3)　与式$=\dfrac{2-\sqrt{5}\,i}{2+\sqrt{5}\,i}=\dfrac{(2-\sqrt{5}\,i)^2}{(2+\sqrt{5}\,i)(2-\sqrt{5}\,i)}=\dfrac{2^2-2\cdot 2\sqrt{5}\,i+(\sqrt{5}\,i)^2}{2^2-(\sqrt{5}\,i)^2}$

$=\dfrac{4-4\sqrt{5}\,i+5i^2}{4-5i^2}=\dfrac{(4-5)-4\sqrt{5}\,i}{9}=-\dfrac{1}{9}-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}i$

31 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\dfrac{3-2i}{2+3i}\right)^2$ (2) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3$ (3) $(2+i)^3+(2-i)^3$

(4) $\left(\dfrac{1}{i}-i\right)\left(\dfrac{2}{i}+i\right)i^3$ (5) $\dfrac{2+3i}{1+2i}+\dfrac{2i}{3-i}$ (6) $\dfrac{2+3i}{3-2i}+\dfrac{2-3i}{3+2i}$

(7) $\dfrac{1}{i}+1-i+i^2-i^3+i^4$

解答 (1) -1 (2) 1 (3) 4 (4) $2i$ (5) $\dfrac{7}{5}+\dfrac{2}{5}i$ (6) 0 (7) $1-i$

解説

(1) $\dfrac{3-2i}{2+3i}=\dfrac{(3-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{6-9i-4i+6i^2}{2^2+3^2}=\dfrac{-13i}{13}=-i$

よって 与式$=(-i)^2=(-1)^2\cdot i^2=-1$

(2) 与式$=\dfrac{(-1+\sqrt{3}\,i)^3}{2^3}=\dfrac{(-1)^3+3\cdot(-1)^2\cdot\sqrt{3}\,i+3\cdot(-1)\cdot(\sqrt{3}\,i)^2+(\sqrt{3}\,i)^3}{8}$

$=\dfrac{(-1+9)+(3\sqrt{3}-3\sqrt{3})i}{8}=\dfrac{8}{8}=1$

(3) 与式$=2^3+3\cdot2^2i+3\cdot2i^2+i^3+(2^3-3\cdot2^2i+3\cdot2i^2-i^3)$

$=(8-6+8-6)+(12-1-12+1)i=4$

別解 $2+i=a$，$2-i=b$ とおくと $a+b=4$，$ab=2^2+1^2=5$

よって 与式$=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot5\cdot4=64-60=4$

(4) 与式$=\left\{\left(\dfrac{1}{i}-i\right)\cdot i\right\}\left\{\left(\dfrac{2}{i}+i\right)\cdot i\right\}i=\left(\dfrac{1}{i}\cdot i-i^2\right)\left(\dfrac{2}{i}\cdot i+i^2\right)i=(1+1)(2-1)i=2i$

(5) 与式$=\dfrac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\dfrac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{(2+6)+(-4+3)i}{1^2+2^2}+\dfrac{2(3i-1)}{3^2+1^2}$

$=\dfrac{8-i}{5}+\dfrac{3i-1}{5}=\dfrac{(8-1)+(-1+3)i}{5}=\dfrac{7}{5}+\dfrac{2}{5}i$

(6) 与式$=\dfrac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}+\dfrac{(2-3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{(6-6)+(4+9)i}{3^2+2^2}+\dfrac{(6-6)+(-4-9)i}{3^2+2^2}$

$=\dfrac{13i}{13}+\dfrac{-13i}{13}=0$

参考 第1項と第2項の分母が互いに共役な複素数であるから，次のように通分してもよい。

与式$=\dfrac{(2+3i)(3+2i)+(2-3i)(3-2i)}{(3-2i)(3+2i)}$

(7) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$，$i^3=i^2\cdot i=-i$，$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$ であるから

与式$=-i+1-i+(-1)-(-i)+1=1-i$

32 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(1) $(2i+3)x+(2-3i)y=5-i$ (2) $(1-2i)(x+yi)=2+6i$

(3) $(1+xi)^2+(x+i)^2=0$ (4) $\dfrac{1}{2+i}+\dfrac{1}{x+yi}=\dfrac{1}{2}$

解答 (1) $x=1$，$y=1$ (2) $x=-2$，$y=2$ (3) $x=0$ (4) $x=2$，$y=-4$

解説

(1) 左辺を変形して $(3x+2y)+(2x-3y)i=5-i$

$3x+2y$，$2x-3y$ は実数であるから $3x+2y=5$，$2x-3y=-1$

これを解いて $x=1$，$y=1$

(2) 左辺を変形して $(x+2y)+(-2x+y)i=2+6i$

$x+2y$，$-2x+y$ は実数であるから $x+2y=2$，$-2x+y=6$

これを解いて $x=-2$，$y=2$

別解 両辺を $1-2i$ で割って $x+yi=\dfrac{2+6i}{1-2i}$

ここで $\dfrac{2+6i}{1-2i}=\dfrac{(2+6i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{2+4i+6i+12i^2}{1^2+2^2}=\dfrac{-10+10i}{5}=-2+2i$

よって $x+yi=-2+2i$

x，y は実数であるから $x=-2$，$y=2$

(3) 左辺を展開すると $(1+2xi-x^2)+(x^2+2xi-1)=0$

よって $4xi=0$

$4x$ は実数であるから $4x=0$

ゆえに $x=0$

注意 α，β が複素数のとき「$\alpha^2+\beta^2=0 \Longleftrightarrow \alpha=\beta=0$」は成り立たない。

(4) 両辺に $2(2+i)(x+yi)$ を掛けると $2(x+yi)+2(2+i)=(2+i)(x+yi)$

両辺を変形して $(2x+4)+(2y+2)i=(2x-y)+(x+2y)i$

$2x+4$，$2y+2$，$2x-y$，$x+2y$ は実数であるから

$2x+4=2x-y$，$2y+2=x+2y$

これを解いて $x=2$，$y=-4$

33 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}$，$y=\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}$ であるとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$ (2) xy

(3) x^2+y^2 (4) $x^3+y^3+x^2y+xy^2$

解答 (1) -1 (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) -2 (4) 2

解説

(1) $x+y=\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}=-1$

(2) $xy=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}\right)\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}\right)=\dfrac{(-1)^2+(\sqrt{5})^2}{2^2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

(3) (1)，(2) から $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-1)^2-2\cdot\dfrac{3}{2}=-2$

(4) (1)，(3) から $x^3+y^3+x^2y+xy^2=x^2(x+y)+y^2(x+y)=(x^2+y^2)(x+y)$

$=(-2)\cdot(-1)=2$

34 2つの複素数 $a+bi$ と $2-3i$ の和が純虚数，積が実数となるように，実数 a，b の値を定めよ。

解答 $a=-2$，$b=-3$

解説

$(a+bi)+(2-3i)=(a+2)+(b-3)i$

これが純虚数であるとき $a+2=0$ かつ $b-3\neq0$

よって $a=-2$ かつ $b\neq3$

このとき $(a+bi)(2-3i)=(-2+bi)(2-3i)=-4+6i+2bi-3bi^2$

$=(-4+3b)+2(b+3)i$

これが実数であるとき $2(b+3)=0$

よって $b=-3$ これは $b\neq3$ を満たす。

以上から $a=-2$，$b=-3$

35 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\dfrac{7+3i}{2+5i}\right)^{10}$ (2) $i+i^2+i^3+\cdots\cdots+i^{50}$

解答 (1) $-32i$ (2) $i-1$

解説

(1) $\dfrac{7+3i}{2+5i}=\dfrac{(7+3i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\dfrac{(14+15)+(-35+6)i}{2^2+5^2}=1-i$

また $(1-i)^2=1^2-2i+i^2=-2i$

よって $\left(\dfrac{7+3i}{2+5i}\right)^{10}=(1-i)^{10}=\{(1-i)^2\}^5=(-2i)^5=(-2)^5\cdot i^5$

$=-32\cdot i^2\cdot i^2\cdot i=-32i$

(2) $i+i^2+i^3+i^4=i+i^2+i^2\cdot i+i^2\cdot i^2=i-1-i+1=0$

よって $i+i^2+i^3+\cdots\cdots+i^{50}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots\cdots+i^{44}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{49}+i^{50}$

$=i^{49}+i^{50}=i^{48}(i+i^2)=(i^4)^{12}(i-1)=1^{12}(i-1)=i-1$