最大最小クイズ(相加•相加平均利用)

1 次の**ア** ～ **エ**に適する数字 (0 ～ 9) を答えよ。

$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x}$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，最小値をとるときの x の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

また，$x>2$ のとき，$x+\dfrac{1}{x-2}$ の最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，最小値をとるときの x の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

解答 (ア) 6 (イ) 3 (ウ) 4 (エ) 3

解説

(前半)

$x>0$ のとき $\dfrac{9}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{9}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=2\cdot3=6$$

等号が成り立つのは，$x>0$ かつ $x=\dfrac{9}{x}$，すなわち $x=3$ のときである。

よって，$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x}$ の最小値は 6 であり，最小値をとるときの x の値は 3 である。

(後半)

$x>2$ のとき，$x-2>0$，$\dfrac{1}{x-2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{1}{x-2}=(x-2)+\frac{1}{x-2}+2$$
$$\geqq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4$$

等号が成り立つのは，$x>2$ かつ $x-2=\dfrac{1}{x-2}$，すなわち $x=3$ のときである。

よって，$x>2$ のとき，$x+\dfrac{1}{x-2}$ の最小値は 4 であり，最小値をとるときの x の値は 3 である。

答 (ア) 6 (イ) 3 (ウ) 4 (エ) 3

2 $a>0$，$b>0$のとき，次の式のとりうる値の最小値を求めよ。 [10点×2=20点]

(1) $15ab+\dfrac{3}{5ab}$ (2) $\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)$

解答 (1) $a>0$，$b>0$ より $15ab>0$，$\dfrac{3}{5ab}>0$

相加平均と相乗平均の大小関係により $15ab+\dfrac{3}{5ab}\geqq 2\sqrt{15ab\cdot\dfrac{3}{5ab}}=6$

等号が成り立つのは，$a>0$，$b>0$ かつ $15ab=\dfrac{3}{5ab}$，すなわち $ab=\dfrac{1}{5}$ のときである。

よって，$ab=\dfrac{1}{5}$ のとき最小値は 6

(2) $\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)=ab+\dfrac{6}{ab}+5$

$a>0$，$b>0$ より $ab>0$，$\dfrac{6}{ab}>0$

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{6}{ab}+5\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{6}{ab}}+5=2\sqrt{6}+5$$

等号が成り立つのは，$a>0$，$b>0$ かつ $ab=\dfrac{6}{ab}$，すなわち $ab=\sqrt{6}$ のときである。

よって，$ab=\sqrt{6}$ のとき最小値は $2\sqrt{6}+5$

解説

(1) $a>0$，$b>0$ より $15ab>0$，$\dfrac{3}{5ab}>0$

相加平均と相乗平均の大小関係により $15ab+\dfrac{3}{5ab}\geqq 2\sqrt{15ab\cdot\dfrac{3}{5ab}}=6$

等号が成り立つのは，$a>0$，$b>0$ かつ $15ab=\dfrac{3}{5ab}$，すなわち $ab=\dfrac{1}{5}$ のときである。

よって，$ab=\dfrac{1}{5}$ のとき最小値は 6

(2) $\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)=ab+\dfrac{6}{ab}+5$

$a>0$，$b>0$ より $ab>0$，$\dfrac{6}{ab}>0$

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{6}{ab}+5\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{6}{ab}}+5=2\sqrt{6}+5$$

等号が成り立つのは，$a>0$，$b>0$ かつ $ab=\dfrac{6}{ab}$，すなわち $ab=\sqrt{6}$ のときである。

よって，$ab=\sqrt{6}$ のとき最小値は $2\sqrt{6}+5$

3 $x>0$ のとき，$\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ の最大値を求めよ。

解答 $x=\sqrt{2}-1$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解説

$$\frac{x+1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}}=\frac{1}{x+1+\dfrac{2}{x+1}}$$

$x>0$ であるから，$\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ が最大となるのは，$x+1+\dfrac{2}{x+1}$ が最小となるときである。$x>0$ のとき $x+1>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$$x+1+\frac{2}{x+1}\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}}=2\sqrt{2}$$

等号が成り立つのは，$x+1=\dfrac{2}{x+1}$ のときである。

このとき $(x+1)^2=2$ $x+1>0$ であるから $x+1=\sqrt{2}$

したがって，$x=\sqrt{2}-1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。

4 a，b，c を正の数とするとき，$\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ のとりうる最小の値を求めよ。

解答 $a=b=c$ のとき最小値 8

解説

$P=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ とおくと

$$P=\frac{a+b}{a}\cdot\frac{b+c}{b}\cdot\frac{c+a}{c}=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$$
$$=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)$$
$$=\left(1+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\right)$$
$$=2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$ (等号成立は $a=b$ のとき)

$\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{b}}=2$ (等号成立は $b=c$ のとき)

$\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\geqq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}=2$ (等号成立は $c=a$ のとき)

よって $P\geqq 2+2\times3=8$

したがって，$a=b=c$ のとき最小値 8 をとる。

別解 $a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$，$b+c\geqq 2\sqrt{bc}$，$c+a\geqq 2\sqrt{ca}$

(等号成立は，それぞれ $a=b$，$b=c$，$c=a$ のとき)

それぞれ，両辺ともに正であるから辺々を掛けると

$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$

よって $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geqq 8$

したがって，$a=b=c$ のとき最小値 8 をとる。

5 (1) $x>0$ のとき，$x+\dfrac{16}{x+2}$ の最小値を求めよ。

(2) $x>0$，$y>0$ とする。$(3x+2y)\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$ の最小値を求めよ。

解答 (1) $x=2$ のとき最小値 6 (2) $x=y$ のとき最小値 25

解説

(1) $x+\dfrac{16}{x+2}=x+2+\dfrac{16}{x+2}-2$

$x>0$ より $x+2>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$$x+2+\frac{16}{x+2}\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{16}{x+2}}=2\cdot4=8$$

ゆえに $x+\dfrac{16}{x+2}\geqq 6$

等号が成り立つのは，$x+2=\dfrac{16}{x+2}$ のときである。

このとき $(x+2)^2=16$ $x+2>0$ であるから $x=2$

したがって $x=2$ のとき最小値 6

(2) $(3x+2y)\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}\right)=9+\dfrac{6x}{y}+\dfrac{6y}{x}+4=13+6\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$

$x>0$，$y>0$ より，$\dfrac{x}{y}>0$，$\dfrac{y}{x}>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=2$$

よって $13+6\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\geqq 13+6\cdot2=25$

等号が成り立つのは，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x}$ のときである。

このとき $x^2=y^2$ $x>0$，$y>0$ であるから $x=y$

したがって $x=y$ のとき最小値 25

$\boxed{6}$ (1)　$a>0$ のとき，$a-2+\dfrac{2}{a+1}$ の最小値を求めよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，$(2a+3b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{3}{b}\right)$ の最小値を求めよ。

解答　(1)　$a=\sqrt{2}-1$ のとき最小値 $2\sqrt{2}-3$　　(2)　$a=2b$ のとき最小値 49

解説

(1)　$a-2+\dfrac{2}{a+1}=a+1+\dfrac{2}{a+1}-3$

$a>0$ より，$a+1>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$a+1+\frac{2}{a+1}\geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{2}{a+1}}=2\sqrt{2}$$

よって　$a-2+\dfrac{2}{a+1}\geqq 2\sqrt{2}-3$

等号が成り立つのは，$a+1=\dfrac{2}{a+1}$ のときである。

このとき　$(a+1)^2=2$　　$a+1>0$ であるから　$a=\sqrt{2}-1$

したがって　$a=\sqrt{2}-1$ のとき最小値 $2\sqrt{2}-3$

(2)　$(2a+3b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{3}{b}\right)=25+\dfrac{24b}{a}+\dfrac{6a}{b}$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{24b}{a}>0$，$\dfrac{6a}{b}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$\frac{24b}{a}+\frac{6a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{24b}{a}\cdot\frac{6a}{b}}=24$$

よって　$25+\dfrac{24b}{a}+\dfrac{6a}{b}\geqq 25+24=49$

等号が成り立つのは，$\dfrac{24b}{a}=\dfrac{6a}{b}$ のときである。

このとき　$a^2=4b^2$　　$a>0$，$b>0$ であるから　$a=2b$

したがって　$a=2b$ のとき最小値 49

$\boxed{7}$ (1)　実数 a，b が $a>0$，$b>0$，$ab=6$ を満たすとき，$3a+8b$ の最小値は $\boxed{}$ である。

(2)　$x^2+2x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+2}+2$ は，$x=$ ${}^{ア}\boxed{}$ のとき，最小値 ${}^{イ}\boxed{}$ をとる。ただし，$x>0$ とする。

(3)　$x>0$，$y>0$，$z>0$ とする。$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ のとき，$x+2y+3z$ の最小値を求めよ。

解答　(1)　24　　(2)　(ア)　$-1+\sqrt{3}$　　(イ)　6
(3)　$x=y=z=24$ のとき最小値 144

解説

(1)　$3a>0$，$8b>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$3a+8b\geqq 2\sqrt{3a\cdot 8b}=4\sqrt{6ab}=4\sqrt{6\cdot 6}=24$$

等号は，$3a=8b$ かつ $ab=6$，すなわち $a=4$，$b=\dfrac{3}{2}$ のとき成り立つ。

よって，$3a+8b$ の最小値は　24

別解　$a\neq 0$ であるから，$ab=6$ より　$b=\dfrac{6}{a}$

よって　$3a+8b=3a+\dfrac{48}{a}$

$3a>0$，$\dfrac{48}{a}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$3a+\frac{48}{a}\geqq 2\sqrt{3a\cdot\frac{48}{a}}=24$$

等号は，$3a=\dfrac{48}{a}$ すなわち $a=4$ のとき成り立つ。

よって，$3a+8b$ の最小値は　24

(2)　$x^2+2x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+2}+2=x(x+2)+\dfrac{2\{(x+2)-x\}}{x(x+2)}+2$

$$=x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}+2$$

$x>0$ より，$x(x+2)>0$，$\dfrac{4}{x(x+2)}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}+2\geqq 2\sqrt{x(x+2)\cdot\frac{4}{x(x+2)}}+2=6$$

等号が成り立つのは，$x(x+2)=\dfrac{4}{x(x+2)}$ すなわち $x^2(x+2)^2=4$ かつ $x>0$ のときである。

$x^2(x+2)^2=4$ から　$(x^2+2x)^2-4=0$

ゆえに　$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=0$

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ であるから　$x^2+2x-2=0$

よって　$x=-1\pm\sqrt{3}$　　$x>0$ から　$x=-1+\sqrt{3}$

したがって，$x={}^{ア}-1+\sqrt{3}$ のとき最小値 ${}^{イ}6$ をとる。

(3)　$(x+2y+3z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\right)=14+2\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+6\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right)+3\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ から　$x+2y+3z=4\left\{14+2\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+6\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right)+3\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)\right\}$

$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2,\quad \frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geqq 2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}=2,\quad \frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}=2$$

この 3 つの不等式の等号は，それぞれ $\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{z}{y}=\dfrac{y}{z}$，$\dfrac{x}{z}=\dfrac{z}{x}$ のとき成立するから，$x=y=z$ のときすべての等号が成立する。

このとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ から　$\dfrac{6}{x}=\dfrac{1}{4}$

よって　$x=y=z=24$

したがって，$x+2y+3z$ は，$x=y=z=24$ のとき最小値 $24+2\cdot 24+3\cdot 24=144$ をとる。

別解　$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，コーシー・シュワルツの不等式により

$$\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2y})^2+(\sqrt{3z})^2\}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2\right\}$$

$$\geqq\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{2y}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{3z}\cdot\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2$$

すなわち　$(x+2y+3z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\right)\geqq(1+2+3)^2$

よって　$(x+2y+3z)\cdot\dfrac{1}{4}\geqq 6^2$

ゆえに　$x+2y+3z\geqq 144$

等号は，$\sqrt{x}:\sqrt{2y}:\sqrt{3z}=\sqrt{\dfrac{1}{x}}:\sqrt{\dfrac{2}{y}}:\sqrt{\dfrac{3}{z}}$　かつ　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$

すなわち，$x=y=z=24$ のとき成り立つ。

したがって，求める最小値は　144

$\boxed{8}$ (1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x}$ の最小値を求めよ。

(2)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x+2}$ の最小値を求めよ。

解答　(1)　$x=3$ で最小値 6　　(2)　$x=1$ で最小値 4

解説

(1)　$x>0$，$\dfrac{9}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{9}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=2\cdot 3=6$$

等号が成り立つのは $x=\dfrac{9}{x}$ すなわち $x=3$ のとき。

よって，$x=3$ で最小値 6 をとる。

(2)　$x+\dfrac{9}{x+2}=x+2+\dfrac{9}{x+2}-2$

$x>0$ より　$x+2>0$，$\dfrac{9}{x+2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+2+\frac{9}{x+2}\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{9}{x+2}}=2\cdot 3=6$$

ゆえに　$x+\dfrac{9}{x+2}=x+2+\dfrac{9}{x+2}-2\geqq 6-2=4$

等号が成り立つのは $x+2=\dfrac{9}{x+2}$ のとき。

このとき　$(x+2)^2=9$

$x+2>0$ であるから　$x+2=3$　　ゆえに　$x=1$

したがって，$x=1$ で最小値 4 をとる。

$\boxed{9}$ (1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{16}{x}$ の最小値を求めよ。

(2)　$x>1$ のとき，$x+\dfrac{1}{x-1}$ の最小値を求めよ。

解答　(1)　$x=4$ で最小値 8　　(2)　$x=2$ で最小値 3

解説

(1)　$x>0$，$\dfrac{16}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{16}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}=2\cdot 4=8$$

等号が成り立つのは $x=\dfrac{16}{x}$ すなわち $x=4$ のとき。

よって，$x=4$ で最小値 8 をとる。

(2)　$x+\dfrac{1}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1$

$x-1>0$，$\dfrac{1}{x-1}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x-1+\frac{1}{x-1}\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}=2$$

ゆえに　$x+\dfrac{1}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1\geqq 2+1=3$

等号が成り立つのは $x-1=\dfrac{1}{x-1}$ のとき。

このとき　$(x-1)^2=1$

$x-1>0$ であるから　$x-1=1$

ゆえに　$x=2$

したがって，$x=2$ で最小値 3 をとる。

$\boxed{10}$ (1)　$x>0$ のとき，$\dfrac{x^2-4x+3}{x}$ は $x=$ ${}^{ア}\boxed{}$ のとき，最小値 ${}^{イ}\boxed{}$ をとる。

(2)　$x>0$ のとき，$x^2+2x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+2}+2$ は $x=$ ${}^{ウ}\boxed{}$ のとき，最小値 ${}^{エ}\boxed{}$ をとる。

解答 (1) (ア) $\sqrt{3}$ (イ) $2\sqrt{3}-4$ (2) (ウ) $-1+\sqrt{3}$ (エ) 6

解説

(1) $\dfrac{x^2-4x+3}{x}=x-4+\dfrac{3}{x}$

$x>0$，$\dfrac{3}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{3}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{3}$$

ゆえに $\dfrac{x^2-4x+3}{x}=x-4+\dfrac{3}{x}\geqq 2\sqrt{3}-4$

等号が成り立つのは $x=\dfrac{3}{x}$ すなわち $x=\sqrt{3}$ のとき。

したがって，$\dfrac{x^2-4x+3}{x}$ は $x={}^{ア}\sqrt{3}$ のとき，最小値 ${}^{イ}2\sqrt{3}-4$ をとる。

(2) $x^2+2x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+2}+2=x(x+2)+\dfrac{2(x+2)-2x}{x(x+2)}+2$

$$=x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}+2$$

$x(x+2)>0$，$\dfrac{4}{x(x+2)}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}\geqq 2\sqrt{x(x+2)\cdot\frac{4}{x(x+2)}}=4$$

ゆえに $x(x+2)+\dfrac{4}{x(x+2)}+2\geqq 4+2=6$

等号が成り立つのは $x(x+2)=\dfrac{4}{x(x+2)}$ のとき。

このとき $x^2(x+2)^2=4$

$x(x+2)>0$ であるから $x(x+2)=2$

ゆえに $x^2+2x-2=0$

これを解いて $x=-1\pm\sqrt{3}$

$x>0$ を満たすものは $x=-1+\sqrt{3}$

したがって，$x={}^{ウ}-1+\sqrt{3}$ のとき，最小値 ${}^{エ}6$ をとる。

11 (1) $a>0$ のとき，$a+\dfrac{16}{a}$ の最小値を求めよ。

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)$ の最小値を求めよ。

(3) $a>0$，$b>0$，$ab=12$ のとき，$a+b$ の最小値を求めよ。

(4) $a>0$，$b>0$，$2a+3b=4\sqrt{2}$ のとき，ab の最大値を求めよ。

解答 (1) $a=4$ で最小値 8 (2) $ab=\sqrt{6}$ で最小値 $5+2\sqrt{6}$

(3) $a=b=2\sqrt{3}$ で最小値 $4\sqrt{3}$ (4) $a=\sqrt{2}$，$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ で最大値 $\dfrac{4}{3}$

解説

(1) $a>0$，$\dfrac{16}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{16}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{16}{a}}=8 \quad \cdots\cdots ①$$

等号が成り立つのは，$a>0$ かつ $a=\dfrac{16}{a}$ のとき，すなわち $a=4$ のときである。

したがって，$a+\dfrac{16}{a}$ は $a=4$ で最小値 8 をとる。

注意 ① が得られたからといって，すぐに「最小値が 8」としてはいけない。最小値を与える a の値が存在することをきちんと確認する必要がある。

(2) $\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)=5+ab+\dfrac{6}{ab}$

$ab>0$，$\dfrac{6}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$5+ab+\frac{6}{ab}\geqq 5+2\sqrt{ab\cdot\frac{6}{ab}}=5+2\sqrt{6}$$

よって $\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)\geqq 5+2\sqrt{6}$

等号が成り立つのは $a>0$，$b>0$ かつ $ab=\dfrac{6}{ab}$ のとき，すなわち $ab=\sqrt{6}$ のときで，

この式を満たす実数 a，b は存在する（例えば $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$）。

したがって，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)$ は $ab=\sqrt{6}$ で最小値 $5+2\sqrt{6}$ をとる。

(3) $a>0$，$b>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+b\geqq 2\sqrt{ab}=4\sqrt{3}$$

等号が成り立つのは，$a=b=2\sqrt{3}$ のときである。

したがって，$a+b$ は $a=b=2\sqrt{3}$ で最小値 $4\sqrt{3}$ をとる。

(4) $2a>0$，$3b>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2a+3b\geqq 2\sqrt{2a\cdot 3b}=2\sqrt{6ab}$$

等号が成り立つのは，$2a=3b$ のときである。

$2a+3b=4\sqrt{2}$ であるから $4\sqrt{2}\geqq 2\sqrt{6ab}$

ゆえに $\sqrt{ab}\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ よって $ab\leqq\dfrac{4}{3}$

等号が成り立つのは，$2a=3b$，$2a+3b=4\sqrt{2}$ から $a=\sqrt{2}$，$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

したがって，ab は $a=\sqrt{2}$，$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ で最大値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。

別解 $2a+3b=4\sqrt{2}$ から $b=\dfrac{1}{3}(4\sqrt{2}-2a)$ ……①

$b>0$ から $4\sqrt{2}-2a>0$

よって $a<2\sqrt{2}$

$a>0$ と合わせて $0<a<2\sqrt{2}$

① から $ab=a\cdot\dfrac{1}{3}(4\sqrt{2}-2a)=-\dfrac{2}{3}(a^2-2\sqrt{2}\,a)=-\dfrac{2}{3}(a-\sqrt{2})^2+\dfrac{4}{3}$

$0<a<2\sqrt{2}$ から，ab は $a=\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。

① から $a=\sqrt{2}$ のとき $b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって，ab は $a=\sqrt{2}$，$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ で最大値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。

12 $x>0$，$y>0$，$xy=4$ のとき，$x+y$ の最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

解答 $x=y=2$ のとき最小値 4

解説

$x>0$，$y>0$ から $x+y\geqq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{4}=4$

等号が成り立つのは，$x=y$ のときである。

$xy=4$ から，$x=y$ のとき $x^2=4$

$x>0$ から $x=2$ また $y=2$

よって $x=y=2$ のとき最小値 4

13 $2a+b=4$，$a>0$，$b>0$ のとき，

(1) ab の最大値を求めよ。 (2) a^2+b^2 の最小値を求めよ。

解答 (1) 2 (2) $\dfrac{16}{5}$

解説

$b=4-2a$，$a>0$，$b>0$ から $0<a<2$

(1) $ab=a(4-2a)=-2a^2+4a=-2(a-1)^2+2$

よって，$a=1$，$b=4-2\cdot 1=2$ のとき最大値 2

(2) $a^2+b^2=a^2+(4-2a)^2=5a^2-16a+16=5\left(a-\dfrac{8}{5}\right)^2+\dfrac{16}{5}$

よって，$a=\dfrac{8}{5}$，$b=4-2\cdot\dfrac{8}{5}=\dfrac{4}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{16}{5}$

別解 (1) $\dfrac{2a+b}{2}\geqq\sqrt{2ab}$ から $\dfrac{4}{2}\geqq\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab}$ よって $2\geqq ab$

(2) $(a^2+b^2)(2^2+1^2)\geqq(2a+b)^2$ から $5(a^2+b^2)\geqq 16$ よって $a^2+b^2\geqq\dfrac{16}{5}$

14 (1) $x>0$ のとき，$7x+\dfrac{14}{x}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2) $x>1$ のとき，$x+\dfrac{2}{x-1}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答 (1) $x=\sqrt{2}$ のとき最小値 $14\sqrt{2}$ (2) $x=1+\sqrt{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}+1$

解説

(1) $x>0$ のとき，$7x>0$，$\dfrac{14}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$7x+\frac{14}{x}\geqq 2\sqrt{7x\cdot\frac{14}{x}}=14\sqrt{2}$$

等号が成り立つのは，$x>0$ かつ $7x=\dfrac{14}{x}$，すなわち $x=\sqrt{2}$ のときである。

したがって $x=\sqrt{2}$ のとき 最小値 $14\sqrt{2}$

(2) $x>1$ のとき，$x-1>0$，$\dfrac{2}{x-1}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{2}{x-1}=(x-1)+\frac{2}{x-1}+1\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{2}{x-1}}+1=2\sqrt{2}+1$$

等号が成り立つのは，$x>1$ かつ $x-1=\dfrac{2}{x-1}$ のときである。

このとき $(x-1)^2=2$

$x-1>0$ であるから $x-1=\sqrt{2}$ すなわち $x=1+\sqrt{2}$

したがって $x=1+\sqrt{2}$ のとき 最小値 $2\sqrt{2}+1$