不等式の証明クイズ

[1] $x>1$，$y>1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$xy+1>x+y$$

解答　略

解説

$$(xy+1)-(x+y)=xy-x-y+1=x(y-1)-(y-1)$$
$$=(x-1)(y-1)$$

$x>1$，$y>1$ より，$x-1>0$，$y-1>0$ であるから

$$(x-1)(y-1)>0$$

よって　$xy+1>x+y$

[2] $a>b$，$c>d$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$ac+bd>ad+bc$$

解答　略

解説

$$(ac+bd)-(ad+bc)=ac-ad-bc+bd$$
$$=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d)$$

$a>b$，$c>d$ より，$a-b>0$，$c-d>0$ であるから　$(a-b)(c-d)>0$

よって　$ac+bd>ad+bc$

[3] 不等式 $a^2+b^2 \geqq 2ab$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

解答　証明略，等号が成り立つのは $a=b$ のとき

解説

$(a^2+b^2)-2ab=(a-b)^2 \geqq 0$　　ゆえに　$a^2+b^2 \geqq 2ab$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ すなわち $a=b$ のときである。

[4] 不等式 $a^2-ab+b^2 \geqq 0$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

解答　証明略，等号が成り立つのは $a=b=0$ のとき

解説

$$a^2-ab+b^2=\left\{a^2-2a\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2$$
$$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$$

ここで $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2 \geqq 0$，$\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$ であるから　$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$

ゆえに　$a^2-ab+b^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは　$a-\frac{b}{2}=0$　かつ　$b=0$

すなわち，$a=b=0$ のときである。

[5] 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a^2+ab+b^2 \geqq 0$　　　(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

解答　証明略

(1)　等号が成り立つのは $a=b=0$ のとき

(2)　等号が成り立つのは $ay=bx$ のとき

解説

(1)　$a^2+ab+b^2=\left\{a^2+2a\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

ここで $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 \geqq 0$，$\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$ であるから　$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$

ゆえに　$a^2+ab+b^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは，$a+\frac{b}{2}=0$ かつ $b=0$，すなわち $a=b=0$ のときである。

(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \geqq 0$$

ゆえに　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

等号が成り立つのは，$ay-bx=0$ すなわち $ay=bx$ のときである。

[6] 不等式 $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

解答　証明略，等号が成り立つのは $a=b=c$ のとき

解説

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$$

ゆえに　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

等号が成り立つのは

$a-b=0$　かつ　$b-c=0$　かつ　$c-a=0$

すなわち，$a=b=c$ のときである。

[7] 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$$

解答　証明略，等号が成り立つのは $a=b=1$ のとき

解説

$$a^2+b^2-2(a+b-1)=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)$$
$$=(a-1)^2+(b-1)^2 \geqq 0$$

ゆえに　$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは，$a-1=0$ かつ $b-1=0$，すなわち $a=b=1$ のときである。

[8] $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

解答　略

解説

両辺の平方の差を考えると

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$$
$$=2\sqrt{ab}>0$$

よって　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+b}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

[9] $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>\sqrt{9a+4b}$$

解答　略

解説

両辺の平方の差を考えると

$$(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2-(\sqrt{9a+4b})^2=(9a+12\sqrt{ab}+4b)-(9a+4b)$$
$$=12\sqrt{ab}>0$$

よって　$(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2>(\sqrt{9a+4b})^2$

$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>0$，$\sqrt{9a+4b}>0$ であるから　$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>\sqrt{9a+4b}$

[10] 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$|a+b| \leqq |a|+|b|$$

解答　証明略，等号が成り立つのは $ab \geqq 0$ のとき

解説

両辺の平方の差を考えると

$$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$$
$$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$$
$$=2(|ab|-ab) \geqq 0$$

よって　$|a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$

$|a+b| \geqq 0$，$|a|+|b| \geqq 0$ であるから

$$|a+b| \leqq |a|+|b|$$

等号が成り立つのは，$|ab|=ab$ すなわち $ab \geqq 0$ のときである。

[11] 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$|a-b| \leqq |a|+|b|$$

解答　証明略，等号が成り立つのは $ab \leqq 0$ のとき

解説

両辺の平方の差を考えると

$$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$$
$$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$$
$$=2(|ab|+ab) \geqq 0$$

よって　$|a-b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$

$|a-b| \geqq 0$，$|a|+|b| \geqq 0$ であるから　$|a-b| \leqq |a|+|b|$

等号が成り立つのは，$|ab|=-ab$ すなわち $ab \leqq 0$ のときである。

別解　$|a+b| \leqq |a|+|b|$ であるから

$|a-b|=|a+(-b)| \leqq |a|+|-b|$

ここで，$|-b|=|b|$ であるから　$|a-b| \leqq |a|+|b|$

等号が成り立つのは，$a(-b)=-ab \geqq 0$ すなわち $ab \leqq 0$ のときである。

[12] $x>0$ のとき，不等式 $x+\frac{1}{x} \geqq 2$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

解答　証明略，等号が成り立つのは $x=1$ のとき

解説

$x>0$，$\frac{1}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$　　よって　$x+\frac{1}{x} \geqq 2$

等号が成り立つのは，$x>0$ かつ $x=\frac{1}{x}$，すなわち $x=1$ のときである。

[13] $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq 4$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

解答　証明略，等号が成り立つのは $a=b$ のとき

解説

$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{a}{b}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

よって　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 2+2=4$

等号が成り立つのは，$a>0$，$b>0$ かつ $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$，すなわち $a=b$ のときである。

別解　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)-4=\dfrac{(a+b)^2}{ab}-4=\dfrac{(a+b)^2-4ab}{ab}=\dfrac{(a-b)^2}{ab}\geqq 0$

よって　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$

等号が成り立つのは $a=b$ のときである。

14 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。
ただし，a，b，c，d は正の数とする。

(1)　$2a+\dfrac{3}{a}\geqq 2\sqrt{6}$　　(2)　$\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\geqq 4$

解答　証明略

(1)　等号が成り立つのは $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき

(2)　等号が成り立つのは $ad=bc$ のとき

解説

(1)　$2a>0$，$\dfrac{3}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2a+\frac{3}{a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{3}{a}}$$

ゆえに　$2a+\dfrac{3}{a}\geqq 2\sqrt{6}$

等号が成り立つのは，$a>0$ かつ $2a=\dfrac{3}{a}$，すなわち $a=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のときである。

(2)　$\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)=2+\dfrac{bc}{ad}+\dfrac{ad}{bc}$

$\dfrac{bc}{ad}>0$，$\dfrac{ad}{bc}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}\geqq 2\sqrt{\frac{bc}{ad}\cdot\frac{ad}{bc}}=2$$

ゆえに　$\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\geqq 2+2=4$

等号が成り立つのは，a，b，c，d が正の数かつ $\dfrac{bc}{ad}=\dfrac{ad}{bc}$，すなわち $ad=bc$ のときである。

15 $a>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}$$

解答　略

解説

両辺の平方の差を考えると，$a>0$ から

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-(\sqrt{1+a})^2=\left(1+a+\frac{a^2}{4}\right)-(1+a)=\frac{a^2}{4}>0$$

よって　$\left(1+\dfrac{a}{2}\right)^2>(\sqrt{1+a})^2$

$1+\dfrac{a}{2}>0$，$\sqrt{1+a}>0$ であるから　$\sqrt{1+a}<1+\dfrac{a}{2}$

16 次の不等式を証明せよ。

(1)　$|a|-|b|\leqq|a-b|$　　(2)　$|a|-|b|\leqq|a+b|$

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　[1]　$|a|-|b|\geqq 0$ のとき

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}|a-b|^2-(|a|-|b|)^2&=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)\\&=(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2|ab|+b^2)\\&=2(|ab|-ab)\geqq 0\end{aligned}$$

よって　$|a-b|^2\geqq(|a|-|b|)^2$

$|a|-|b|\geqq 0$，$|a-b|\geqq 0$ であるから

$|a|-|b|\leqq|a-b|$

[2]　$|a|-|b|<0$ のとき，$|a-b|\geqq 0$ であるから　$|a|-|b|<|a-b|$

[1]，[2] から　$|a|-|b|\leqq|a-b|$

等号が成り立つのは，$|a|\geqq|b|$ かつ $|ab|=ab$ すなわち $a\geqq b\geqq 0$ または $a\leqq b\leqq 0$ のときである。

(2)　[1]　$|a|-|b|\geqq 0$ のとき

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}|a+b|^2-(|a|-|b|)^2&=(a+b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)\\&=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2|ab|+b^2)\\&=2(|ab|+ab)\geqq 0\end{aligned}$$

よって　$|a+b|^2\geqq(|a|-|b|)^2$

$|a|-|b|\geqq 0$，$|a+b|\geqq 0$ であるから

$|a|-|b|\leqq|a+b|$

[2]　$|a|-|b|<0$ のとき，$|a+b|\geqq 0$ であるから　$|a|-|b|<|a+b|$

[1]，[2] から　$|a|-|b|\leqq|a+b|$

等号が成り立つのは，$|a|\geqq|b|$ かつ $|ab|=-ab$ すなわち $a\geqq -b\geqq 0$ または $a\leqq -b\leqq 0$ のときである。

別解　(1)　$|a+b|\leqq|a|+|b|$ において，a を $a-b$ でおき換えると

$|(a-b)+b|\leqq|a-b|+|b|$

すなわち　$|a|\leqq|a-b|+|b|$

よって　$|a|-|b|\leqq|a-b|$

(2)　$|a|-|b|\leqq|a-b|$ において，b を $-b$ でおき換えると

$|a|-|-b|\leqq|a-(-b)|$

よって　$|a|-|b|\leqq|a+b|$

17 $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$ab+\dfrac{4}{ab}\geqq 4$　　(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

解答　(1)　略　等号は $ab=2$ のとき成り立つ　(2)　略

解説

(1)　$a>0$，$b>0$ から　$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$

よって，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}$$

ゆえに　$ab+\dfrac{4}{ab}\geqq 4$

等号は $ab=\dfrac{4}{ab}$　つまり　$ab=2$ のときである。

(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

よって，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}$$

ゆえに　$ab+\dfrac{4}{ab}\geqq 4$　よって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 4+5=9$

等号は $ab=\dfrac{4}{ab}$　つまり　$ab=2$ のときである。

18 正の数 a，b，c に対し，不等式 $a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$ を示せ。

解答　略　等号は $a=b=c$ のとき成り立つ

解説

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0\end{aligned}$$

$a>0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$　より　$a+b+c>0$

よって　$\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$

ゆえに　$a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$

等号が成り立つのは，　$a-b=0$　かつ　$b-c=0$　かつ　$c-a=0$

つまり　$a=b=c$ のときである。

19 (1)　$x>1$ のとき，$3x+1>x+3$ であることを証明せよ。

(2)　不等式 $a^2-2ab+3b^2\geqq 0$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

解答　(1)　略　(2)　証明略 等号は $a=b=0$ のとき成り立つ

解説

(1)　$(3x+1)-(x+3)=2x-2=2(x-1)$

$x>1$ のとき $2(x-1)>0$ であるから　$(3x+1)-(x+3)>0$

よって　$3x+1>x+3$

(2)　$a^2-2ab+3b^2=(a^2-2ab+b^2)-b^2+3b^2$

$=(a-b)^2+2b^2$

$(a-b)^2\geqq 0$，$2b^2\geqq 0$ であるから　$(a-b)^2+2b^2\geqq 0$

よって　$a^2-2ab+3b^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ かつ $b=0$ すなわち $a=b=0$ のときである。

20 次の不等式を証明せよ。また，(3) の等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a>1$，$b>\dfrac{1}{2}$ のとき　$2ab+1>a+2b$

(2)　$x^2>4x-7$　　(3)　$a^2+3b^2\geqq 3ab$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　証明略 等号は $a=b=0$ のとき成り立つ

解説

(1)　$(2ab+1)-(a+2b)=2ab+1-a-2b$

$=(2b-1)a-(2b-1)$

$=(a-1)(2b-1)$

ここで，$a>1$，$b>\dfrac{1}{2}$ から　$a-1>0$，$2b-1>0$

よって　$(a-1)(2b-1)>0$　ゆえに　$2ab+1>a+2b$

(2)　$x^2-(4x-7)=x^2-4x+7$

$$=(x^2-4x+4)-4+7$$
$$=(x-2)^2+3>0$$

よって　$x^2>4x-7$

(3)　$(a^2+3b^2)-3ab=a^2-3ab+\left(\frac{3}{2}b\right)^2-\left(\frac{3}{2}b\right)^2+3b^2$

$$=\left(a-\frac{3}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$$

よって　$a^2+3b^2\geqq 3ab$

等号が成り立つのは，$a-\frac{3}{2}b=0$ かつ $b=0$，すなわち $a=b=0$ のときである。

21 次の不等式を証明せよ。また，(3) の等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a>-2$，$b>\frac{1}{3}$ のとき　$3ab-2>a-6b$

(2)　$4x^2+3>4x$　(3)　$2x^2\geqq 3xy-2y^2$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　証明略 等号は $x=y=0$ のとき成り立つ

解説

(1)　$3ab-2-(a-6b)=3ab-a+6b-2$

$$=(3b-1)a+2(3b-1)$$
$$=(a+2)(3b-1)$$

ここで，$a>-2$，$b>\frac{1}{3}$ から　$a+2>0$，$3b-1>0$

よって　$(a+2)(3b-1)>0$

ゆえに　$3ab-2>a-6b$

(2)　$4x^2+3-4x=4x^2-4x+3$

$$=4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+3$$
$$=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1+3$$
$$=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2>0$$

よって　$4x^2+3>4x$

(3)　$2x^2-(3xy-2y^2)=2x^2-3yx+2y^2$

$$=2\left(x-\frac{3}{4}y\right)^2-\frac{9}{8}y^2+2y^2$$
$$=2\left(x-\frac{3}{4}y\right)^2+\frac{7}{8}y^2\geqq 0$$

よって　$2x^2\geqq 3xy-2y^2$

等号が成り立つのは，$x-\frac{3}{4}y=0$ かつ $y=0$ すなわち $x=y=0$ のときである。

22 次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，(1) の等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のとき　$5\sqrt{a+b}\geqq 3\sqrt{a}+4\sqrt{b}$

(2)　$a>b>0$ のとき　$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

解答　(1)　証明略 等号は $16a=9b$ のとき成り立つ　(2)　略

解説

(1)　$(5\sqrt{a+b})^2-(3\sqrt{a}+4\sqrt{b})^2=25(a+b)-(9a+24\sqrt{ab}+16b)$

$$=16a-24\sqrt{ab}+9b=(4\sqrt{a}-3\sqrt{b})^2\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

よって　$(5\sqrt{a+b})^2\geqq(3\sqrt{a}+4\sqrt{b})^2$

$5\sqrt{a+b}\geqq 0$，$3\sqrt{a}+4\sqrt{b}\geqq 0$ であるから　$5\sqrt{a+b}\geqq 3\sqrt{a}+4\sqrt{b}$

等号が成り立つのは，① から $4\sqrt{a}=3\sqrt{b}$ すなわち $16a=9b$ のときである。

(2)　$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)$

$$=2\sqrt{ab}-2b=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$a>b>0$ より，$2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$ であるから　$(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$\sqrt{a-b}>0$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ であるから　$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

23 $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$\sqrt{a}+2\geqq\sqrt{a+4}$　(2)　$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

解答　(1)　証明略　等号は $a=0$ のとき成り立つ

(2)　証明略　等号は $a=b$ のとき成り立つ

解説

(1)　$(\sqrt{a}+2)^2-(\sqrt{a+4})^2=(a+4\sqrt{a}+4)-(a+4)$

$$=4\sqrt{a}\geqq 0$$

よって　$(\sqrt{a}+2)^2\geqq(\sqrt{a+4})^2$

$\sqrt{a}+2>0$，$\sqrt{a+4}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+2\geqq\sqrt{a+4}$$

等号が成り立つのは，$a=0$ のときである。

(2)　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$$=a-2\sqrt{ab}+b$$
$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$$

よって　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2(a+b)}\geqq 0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

24 $x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$x+\frac{4}{x}\geqq 4$　(2)　$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)\geqq 9$

解答　(1)　証明略 等号は $x=2$ のとき成り立つ

(2)　証明略 等号は $x=\sqrt{2}$ のとき成り立つ

解説

(1)　$x>0$，$\frac{4}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{4}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=2\cdot 2=4 \quad よって \quad x+\frac{4}{x}\geqq 4$$

等号が成り立つのは $x=\frac{4}{x}$ すなわち $x=2$ のとき。

別解　$\left(x+\frac{4}{x}\right)-4=\frac{x^2+4-4x}{x}=\frac{(x-2)^2}{x}\geqq 0$

よって　$x+\frac{4}{x}\geqq 4$

等号が成り立つのは，$x=2$ のとき。

(2)　左辺を展開して

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)=x^2+x\cdot\frac{4}{x}+\frac{1}{x}\cdot x+\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{x}=x^2+\frac{4}{x^2}+5$$

$x^2>0$，$\frac{4}{x^2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x^2+\frac{4}{x^2}\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}=2\cdot 2=4$$

よって　$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}+5\geqq 4+5=9$

等号が成り立つのは $x^2=\frac{4}{x^2}$ すなわち $x=\sqrt{2}$ のとき。

25 a，b，c，d は正の数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$4a+\frac{9}{a}\geqq 12$　(2)　$\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\geqq 4$

解答　(1)　証明略　等号は $a=\frac{3}{2}$ のとき成り立つ

(2)　証明略　等号は $ad=bc$ のとき成り立つ

解説

(1)　$4a>0$，$\frac{9}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$4a+\frac{9}{a}\geqq 2\sqrt{4a\cdot\frac{9}{a}}=2\cdot 6=12$$

よって　$4a+\frac{9}{a}\geqq 12$

等号が成り立つのは，$4a=\frac{9}{a}$ すなわち $a=\frac{3}{2}$ のとき。

別解　$4a+\frac{9}{a}-12=\frac{4a^2-12a+9}{a}$

$$=\frac{(2a-3)^2}{a}$$

$a>0$，$(2a-3)^2\geqq 0$ より　$\frac{(2a-3)^2}{a}\geqq 0$

よって　$4a+\frac{9}{a}\geqq 12$

等号が成り立つのは，$2a-3=0$ すなわち　$a=\frac{3}{2}$ のとき。

(2)　左辺を展開して

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\cdot\frac{a}{b}+\frac{d}{c}\cdot\frac{c}{d}$$
$$=\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}+2$$

$\frac{bc}{ad}>0$，$\frac{ad}{bc}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}\geqq 2\sqrt{\frac{bc}{ad}\cdot\frac{ad}{bc}}=2\cdot 1=2$$

よって　$\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}+2\geqq 2+2=4$

等号が成り立つのは，$\frac{bc}{ad}=\frac{ad}{bc}$　すなわち $(ad)^2=(bc)^2$ のときであるが，$ad>0$，$bc>0$ から $ad=bc$ のとき。

別解　$\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)-4=\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}-2$

$$=\frac{(bc)^2+(ad)^2-2ad\cdot bc}{ad\cdot bc}$$
$$=\frac{(ad-bc)^2}{abcd}\geqq 0$$

よって，不等式は成り立つ。

等号が成り立つのは，$ad=bc$ のとき。

26 $0<a<b$, $a+b=2$ のとき，次の 4 つの式の大小を比較せよ。

$$a,\quad b,\quad ab,\quad \frac{a^2+b^2}{2}$$

解答 $a<ab<\dfrac{a^2+b^2}{2}<b$

解説

$a+b=2$ から　　$b=2-a$

$0<a<b$ から　　$0<a<2-a$

よって　　$0<a<1$　……①

また　　$ab=a(2-a)=-a^2+2a$

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+(2-a)^2}{2}=a^2-2a+2$$

[1]　① から　　$ab-a=(-a^2+2a)-a=-a^2+a=-a(a-1)>0$

[2]　① から　　$\dfrac{a^2+b^2}{2}-ab=(a^2-2a+2)-(-a^2+2a)$

$$=2a^2-4a+2=2(a^2-2a+1)$$
$$=2(a-1)^2>0$$

[3]　① から　　$b-\dfrac{a^2+b^2}{2}=(2-a)-(a^2-2a+2)$

$$=-a^2+a=-a(a-1)>0$$

したがって　　$a<ab<\dfrac{a^2+b^2}{2}<b$

27 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$ab+1>a+b$　　　　(2)　$abc+2>a+b+c$

解答 (1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$(ab+1)-(a+b)=(b-1)a-(b-1)=(a-1)(b-1)$

$|a|<1$，$|b|<1$ であるから　　$a-1<0$，$b-1<0$

よって　　$(a-1)(b-1)>0$　すなわち　$(ab+1)-(a+b)>0$

したがって　　$ab+1>a+b$

(2)　$|a|<1$，$|b|<1$ であるから　　$|ab|<1$

$|ab|<1$，$|c|<1$ であるから，(1) を利用して

$(ab)c+1>ab+c$

よって　　$abc+2>ab+c+1$

(1) から　　$(ab+1)+c>(a+b)+c$

ゆえに　　$abc+2>a+b+c$

別解　$(abc+2)-(a+b+c)=(bc-1)a+2-b-c$

$|b|<1$，$|c|<1$ であるから　　$|bc|<1$

よって　　$bc-1<0$

$|a|<1$ であるから　　$a<1$

ゆえに　　$(bc-1)a>(bc-1)\cdot 1$

よって　　$(bc-1)a+2-b-c>bc-1+2-b-c$

$$=(b-1)(c-1)$$

$|b|<1$，$|c|<1$ であるから　　$b-1<0$，$c-1<0$

ゆえに　　$(b-1)(c-1)>0$

したがって　　$abc+2>a+b+c$

28 $a\geqq 2$，$b\geqq 2$，$c\geqq 2$，$d\geqq 2$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$ab\geqq a+b$　　　　(2)　$abcd>a+b+c+d$

解答 (1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$ab-(a+b)=(a-1)(b-1)-1$

$a\geqq 2$，$b\geqq 2$ であるから　　$a-1\geqq 1$，$b-1\geqq 1$

よって，$(a-1)(b-1)\geqq 1$ から　　$ab-(a+b)\geqq 0$

ゆえに　　$ab\geqq a+b$

等号は　$a-1=1$，$b-1=1$　つまり　$a=b=2$のとき

(2)　(1) の不等式から　　$ab\geqq a+b$，$cd\geqq c+d$　……①

$a+b\geqq 4>0$，$c+d\geqq 4>0$ であるから，① より

$abcd\geqq (a+b)(c+d)$　……②

更に，$a+b\geqq 4>2$，$c+d\geqq 4>2$ であるから，(1) の不等式の a を $a+b$ に，b を $c+d$ におき換えた不等式は成り立つが，等号が成り立つことはない。

よって　　$(a+b)(c+d)>(a+b)+(c+d)$　……③

ゆえに，②，③ から

$abcd>a+b+c+d$

29 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$x^4+y^4\geqq x^3y+xy^3$

(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq (ax+by)^2$

(3)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq (ax+by+cz)^2$

解答 (1)　証明略　等号は $x=y$ のとき成り立つ

(2)　証明略　等号は $ay=bx$ のとき成り立つ

(3)　証明略　等号は $ay=bx$，$bz=cy$，$cx=az$ のとき成り立つ

解説

(1)　$(x^4+y^4)-(x^3y+xy^3)=x^3(x-y)-y^3(x-y)$

$$=(x-y)(x^3-y^3)$$
$$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$$
$$=(x-y)^2\left\{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right\}\geqq 0$$

よって　　$x^4+y^4\geqq x^3y+xy^3$

等号が成り立つのは，$x-y=0$ または $x+\dfrac{y}{2}=y=0$ のときである。

$x+\dfrac{y}{2}=y=0$ から　　$x=y=0$

よって，等号が成り立つのは，$x=y$ のときである。

(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2\geqq 0$$

よって　　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq (ax+by)^2$

等号が成り立つのは，$ay-bx=0$ すなわち $ay=bx$ のときである。

(3)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-2abxy-2bcyz-2cazx$$
$$=(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2cazx+a^2z^2)$$
$$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq 0$$

よって　　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq (ax+by+cz)^2$

等号が成り立つのは，

$ay-bx=0$　かつ　$bz-cy=0$　かつ　$cx-az=0$，

すなわち $ay=bx$，$bz=cy$，$cx=az$ のときである。

別解　コーシー・シュワルツの不等式から

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq (ax+by)^2$　……①

等号が成り立つのは $ay=bx$ のとき

文字をおき換えて

$(b^2+c^2)(y^2+z^2)\geqq (by+cz)^2$　……②

等号が成り立つのは $bz=cy$ のとき

$(c^2+a^2)(z^2+x^2)\geqq (cz+ax)^2$　……③

等号が成り立つのは $cx=az$ のとき

①，②，③ の辺々を加えて

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)+(b^2+c^2)(y^2+z^2)+(c^2+a^2)(z^2+x^2)$$
$$\geqq (ax+by)^2+(by+cz)^2+(cz+ax)^2\quad\cdots\cdots④$$

ここで

$$(\text{左辺})=(a^2+b^2)(x^2+y^2)+c^2(x^2+y^2)+(a^2+b^2+c^2)z^2+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$
$$(\text{右辺})=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)+(b^2y^2+2bcyz+c^2z^2)+(c^2z^2+2cazx+a^2x^2)$$

であるから，④ を整理すると

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx$$
$$=(ax+by+cz)^2$$

よって，与式は成り立つ。

等号が成り立つのは ①，②，③ のすべてで等号が成り立つ場合であるから，

$ay=bx$，$bz=cy$，$cx=az$ のときである。

30 $a>b>0>c>d$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$ad<bc$　　　　(2)　$\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$

解答 (1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$c>d$ の両辺に $a(>0)$ を掛けて　　$ac>ad$　……①

$a>b$ の両辺に $c(<0)$ を掛けて　　$ac<bc$　……②

①，② から　　$ad<bc$　……③

(2)　$b>0$，$d<0$ から　　$bd<0$

③ の両辺を $bd(<0)$ で割って　　$\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$

別解　$a>b$ の両辺を $b(>0)$ で割って　　$\dfrac{a}{b}>1$　……④

$c>d$ の両辺を $d(<0)$ で割って　　$\dfrac{c}{d}<1$　……⑤

④，⑤ から　　$\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$

31 次のことを証明せよ。

(1)　$x>-3$，$y>2$ のとき　　$xy-6>2x-3y$

(2)　$a>b>c>d$ のとき　　$ab+cd>ac+bd$

解答 (1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$(xy-6)-(2x-3y)=x(y-2)+3(y-2)=(x+3)(y-2)$

$x>-3$，$y>2$ より，$x+3>0$，$y-2>0$ であるから　　$(x+3)(y-2)>0$

よって　　$xy-6>2x-3y$

(2)　$(ab+cd)-(ac+bd)=a(b-c)-d(b-c)=(a-d)(b-c)$

$a>b>c>d$ より，$a-d>0$，$b-c>0$ であるから　　$(a-d)(b-c)>0$

よって　　$ab+cd>ac+bd$

32 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$x^2+x+1\geqq 3x$　　　　(2)　$x^2-2x+2>0$

(3) $2x^2+3y^2 \geqq 4xy$ (4) $9x^2 \geqq y(6x-y)$

解答 (1) 証明略，等号成立は $x=1$ のとき (2) 証明略
(3) 証明略，等号成立は $x=y=0$ のとき
(4) 証明略，等号成立は $3x=y$ のとき

解説

(1) $(x^2+x+1)-3x=(x-1)^2 \geqq 0$

よって $x^2+x+1 \geqq 3x$

等号が成り立つのは $x-1=0$

すなわち，$x=1$ のときである。

(2) $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$

よって $x^2-2x+2>0$

(3) $(2x^2+3y^2)-4xy=2(x-y)^2+y^2 \geqq 0$

よって $2x^2+3y^2 \geqq 4xy$

等号が成り立つのは $x-y=0$ かつ $y=0$

すなわち，$x=y=0$ のときである。

(4) $9x^2-y(6x-y)=(3x-y)^2 \geqq 0$

よって $9x^2 \geqq y(6x-y)$

等号が成り立つのは $3x-y=0$

すなわち，$3x=y$ のときである。

33 $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$ (2) $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

解答 (1) 略 (2) 略 等号成立は$a=b$のとき

解説

(1) $(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{4a+b})^2=(4a+4\sqrt{ab}+b)-(4a+b)=4\sqrt{ab}>0$

よって $(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{4a+b})^2$

$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{4a+b}>0$ であるから $2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

(2) $\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{4}$

$$=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{4}=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2 \geqq 0$$

よって $\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^2 \geqq \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$

$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}>0$，$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0$ であるから $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

等号が成り立つのは $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ のとき，すなわち $a=b$ のときである。

34 次の不等式を証明せよ。

(1) $\sqrt{7}+\sqrt{8}>\sqrt{5}+\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{7}-\sqrt{6}>\sqrt{14}-\sqrt{13}$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $(\sqrt{7}+\sqrt{8})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2=(15+2\sqrt{56})-(15+2\sqrt{50})=2(\sqrt{56}-\sqrt{50})>0$

よって $(\sqrt{7}+\sqrt{8})^2>(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2$

$\sqrt{7}+\sqrt{8}>0$，$\sqrt{5}+\sqrt{10}>0$ であるから $\sqrt{7}+\sqrt{8}>\sqrt{5}+\sqrt{10}$

(2) $(\sqrt{7}+\sqrt{13})^2-(\sqrt{6}+\sqrt{14})^2=(20+2\sqrt{91})-(20+2\sqrt{84})=2(\sqrt{91}-\sqrt{84})>0$

よって $(\sqrt{7}+\sqrt{13})^2>(\sqrt{6}+\sqrt{14})^2$

$\sqrt{7}+\sqrt{13}>0$，$\sqrt{6}+\sqrt{14}>0$ であるから $\sqrt{7}+\sqrt{13}>\sqrt{6}+\sqrt{14}$

ゆえに $\sqrt{7}-\sqrt{6}>\sqrt{14}-\sqrt{13}$

35 $0<a<b$ のとき，不等式 $a^2<\dfrac{3a^2+2b^2}{5}<b^2$ が成り立つことを証明せよ。

解答 略

解説

$0<a<b$ であるから $a^2<b^2$

ゆえに $\dfrac{3a^2+2b^2}{5}-a^2=\dfrac{2}{5}(b^2-a^2)>0$

よって $\dfrac{3a^2+2b^2}{5}>a^2$ …… ①

また $b^2-\dfrac{3a^2+2b^2}{5}=\dfrac{3}{5}(b^2-a^2)>0$

ゆえに $b^2>\dfrac{3a^2+2b^2}{5}$ …… ②

①，② から $a^2<\dfrac{3a^2+2b^2}{5}<b^2$

36 $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $ab+\dfrac{1}{ab} \geqq 2$ (2) $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right) \geqq 4$ (3) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right) \geqq 16$

解答 (1) 略 等号成立は $ab=1$ のとき
(2) 略 等号成立は $a=b$ のとき (3) 略 等号成立は $ab=3$ のとき

解説

(1) $ab>0$，$\dfrac{1}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{1}{ab} \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}=2$$

よって $ab+\dfrac{1}{ab} \geqq 2$

等号が成り立つのは $ab=\dfrac{1}{ab}$ のとき，すなわち，$a>0$，$b>0$ から $ab=1$ のときである。

(2) $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{a}{b}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqq 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$$

よって $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right) \geqq 4$

等号が成り立つのは $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$ のとき，すなわち，$a>0$，$b>0$ から $a=b$ のときである。

(3) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)=10+ab+\dfrac{9}{ab}$

$ab>0$，$\dfrac{9}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$10+ab+\frac{9}{ab} \geqq 10+2\sqrt{ab\cdot\frac{9}{ab}}=16$$

よって $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right) \geqq 16$

等号が成り立つのは $ab=\dfrac{9}{ab}$ のとき，すなわち，$a>0$，$b>0$ から $ab=3$ のときである。

37 次の不等式を証明せよ。

(1) $(x^4+y^4)(x^2+y^2) \geqq (x^3+y^3)^2$ (2) $x^4+y^4 \geqq x^3y+xy^3$

解答 (1) 略 等号成立は $x=0$ または $y=0$ または $x=y$ のとき
(2) 略 等号成立は $x=y$ のとき

解説

(1) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)-(x^3+y^3)^2=x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6-(x^6+2x^3y^3+y^6)$

$$=x^2y^2(x^2-2xy+y^2)=x^2y^2(x-y)^2 \geqq 0$$

よって $(x^4+y^4)(x^2+y^2) \geqq (x^3+y^3)^2$

等号が成り立つのは，$x^2=0$ または $y^2=0$ または $x-y=0$

つまり $x=0$ または $y=0$ または $x=y$ のときである。

(2) $(x^4+y^4)-(x^3y+xy^3)=x^3(x-y)-y^3(x-y)=(x-y)(x^3-y^3)$

$$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$$

ここで $(x-y)^2 \geqq 0$，$x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2 \geqq 0$

よって $(x-y)^2(x^2+xy+y^2) \geqq 0$

ゆえに $x^4+y^4 \geqq x^3y+xy^3$

等号が成り立つのは $x=y$ または $x=y=0$ のとき，すなわち $x=y$ のときである。

38 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $x^2+y^2 \geqq 6(x-y-3)$ (2) $a^2-ab+b^2 \geqq a+b-1$

(3) $x^2+xy+y^2+3z(x+y+z) \geqq 0$ (4) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geqq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

解答 (1) 証明略，等号成立は $x=3$ かつ $y=-3$ のとき
(2) 証明略，等号成立は $a=b=1$ のとき
(3) 証明略，等号成立は $x=y=-z$ のとき
(4) 証明略，等号成立は $a=b=c$ のとき

解説

(1) $x^2+y^2-6(x-y-3)=(x^2-6x+9)+(y^2+6y+9)=(x-3)^2+(y+3)^2 \geqq 0$

よって $x^2+y^2 \geqq 6(x-y-3)$

等号が成り立つのは $x-3=0$ かつ $y+3=0$

すなわち，$x=3$ かつ $y=-3$ のときである。

(2) $a^2-ab+b^2-(a+b-1)=a^2-(b+1)a+b^2-b+1$

$$=\left\{a^2-(b+1)a+\left(\frac{b+1}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{b+1}{2}\right)^2+b^2-b+1$$

$$=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2 \geqq 0$$

よって $a^2-ab+b^2 \geqq a+b-1$

等号が成り立つのは $a-\dfrac{b+1}{2}=0$ かつ $b-1=0$

すなわち，$a=b=1$ のときである。

(3) 左辺$=x^2+(y+3z)x+y^2+3yz+3z^2$

$$=\left\{x^2+(y+3z)x+\left(\frac{y+3z}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{y+3z}{2}\right)^2+y^2+3yz+3z^2$$

$$=\left(x+\frac{y+3z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+z)^2 \geqq 0$$

よって　$x^2+xy+y^2+3z(x+y+z) \geqq 0$

等号が成り立つのは　$x+\frac{y+3z}{2}=0$ かつ $y+z=0$

すなわち，$x=y=-z$ のときである。

(4)　$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\frac{1}{9}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$$=\frac{1}{9}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$$

よって　$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

等号が成り立つのは　$a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$

すなわち，$a=b=c$ のときである。

別解　$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$=\frac{2}{9}\{a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2\}$$

$$=\frac{2}{9}\left[\left\{a^2-(b+c)a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+b^2-bc+c^2\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left\{\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3b^2-6bc+3c^2}{4}\right\}$$

$$=\frac{2}{9}\left\{\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2\right\} \geqq 0$$

等号が成り立つのは　$a=\frac{b+c}{2}$ かつ $b=c$

すなわち，$a=b=c$ のときである。

39 $a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$，$\frac{2ab}{a+b}$ の大小関係を調べよ。

解答　$\sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b}$，等号成立は $a=b$ のとき

解説

$\sqrt{ab}>0$，$\frac{2ab}{a+b}>0$　……①

また　$(\sqrt{ab})^2-\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2=\frac{ab(a+b)^2-4a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \geqq 0$

よって　$(\sqrt{ab})^2 \geqq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$

① から　$\sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b}$

等号が成り立つのは $a=b$ のときである。

注意　この問題の場合，自分で大小関係を調べるので，等号が成り立つ条件も述べる必要がある。

40 $0<a<b$，$a+b=2$ のとき，1，ab，a^2+b^2 を小さい方から順に並べよ。

解答　ab，1，a^2+b^2

解説

$a+b=2$ から　$b=2-a$　……①

① を $a<b$ に代入すると　$a<2-a$　すなわち　$a<1$

したがって　$0<a<1$

① から　$1-ab=1-a(2-a)=a^2-2a+1=(a-1)^2$

$0<a<1$ であるから　$(a-1)^2>0$

ゆえに　$ab<1$　……②

また，同様にして，① から

$$(a^2+b^2)-1=a^2+(2-a)^2-1=2a^2-4a+3=2(a-1)^2+1>0$$

したがって　$1<a^2+b^2$　……③

②，③ から　$ab<1<a^2+b^2$

よって，小さい方から順に並べると　ab，1，a^2+b^2

41 次の不等式を証明せよ。

$$14(x^2+y^2+z^2) \geqq (3x-2y-z)^2$$

解答　略　等号成立は　$x:y:z=3:(-2):(-1)$ のとき

解説

$$14(x^2+y^2+z^2)-(3x-2y-z)^2=5x^2+10y^2+13z^2+12xy-4yz+6zx$$

$$=5x^2+6(2y+z)x+10y^2-4yz+13z^2$$

$$=5\left\{x+\frac{3(2y+z)}{5}\right\}^2+\frac{14}{5}(y-2z)^2 \geqq 0$$

よって　$14(x^2+y^2+z^2) \geqq (3x-2y-z)^2$

等号が成り立つのは　$x+\frac{3(2y+z)}{5}=0$　かつ　$y-2z=0$

$y=2z$ を代入して　$x+\frac{3(4z+z)}{5}=0$　より　$x=-3z$　のとき

ゆえに　$x:y:z=(-3z):2z:z=3:(-2):(-1)$　のとき