

等式の証明クイズ

1 次の等式を証明せよ。

- (1) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
- (2) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

- (1) $(a-b)^3+3ab(a-b)=(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(3a^2b-3ab^2)$
 $=a^3-b^3$
よって $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
- (2) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$
 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)+(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$
 $=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$
よって $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

2 次の等式を証明せよ。

- (1) $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
- (2) $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

- (1) 右辺 $=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}=(x^2+1)^2-x^2$
 $=x^4+2x^2+1-x^2=x^4+x^2+1$
よって $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
- (2) 左辺 $=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$
右辺 $=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(a^2y^2+2abxy+b^2x^2)$
 $=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$
よって $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$

3 $a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$a^3+b^3+c^3=3abc$

解答 略

解説

- $a+b+c=0$ より、 $c=-(a+b)$ であるから
- $$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)$$
- $$=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3a^2b+3ab^2=0$$
- よって $a^3+b^3+c^3=3abc$

4 $a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

- (1) $a^2-bc=b^2-ac$
- (2) $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

- $a+b+c=0$ から $c=-(a+b)$
- (1) 左辺 $-$ 右辺 $=a^2-b^2+c(a-b)=a^2-b^2-(a+b)(a-b)$
 $=a^2-b^2-(a^2-b^2)=0$
よって $a^2-bc=b^2-ac$
- 別解 1 $a^2-bc=a^2+b(a+b)=a^2+ab+b^2$
 $b^2-ac=b^2+a(a+b)=a^2+ab+b^2$
よって $a^2-bc=b^2-ac$

- 別解 2 左辺 $-$ 右辺 $=(a+b)(a-b)+c(a-b)$
 $=(a+b+c)(a-b)=0$

- (2) 左辺 $=a^2+b^2+c^2+2\{ab+c(a+b)\}$
 $=a^2+b^2+\{-(a+b)\}^2+2\{ab-(a+b)^2\}$
 $=a^2+b^2+(a+b)^2+2\{ab-(a^2+2ab+b^2)\}$
 $=a^2+b^2+a^2+2ab+b^2-2a^2-2ab-2b^2=0$

- 別解 1 左辺 $=a^2+2ab+b^2+c^2+2c(a+b)$
 $=(a+b)^2+\{-(a+b)\}^2+2\{-(a+b)\}(a+b)$
 $=(a+b)^2+(a+b)^2-2(a+b)^2$
 $=2(a+b)^2-2(a+b)^2=0$

- 別解 2 左辺 $=(a+b+c)^2=0$

5 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき、等式 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ が成り立つことを証明せよ。

解答 略

解説

- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと $a=bk, \quad c=dk$
- よって $\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$
- $\frac{a-c}{b-d}=\frac{bk-dk}{b-d}=\frac{k(b-d)}{b-d}=k$
- ゆえに $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$

6 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

- (1) $\frac{3a+2c}{3b+2d}=\frac{3a-2c}{3b-2d}$
- (2) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{c^2-d^2}{c^2+d^2}$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと $a=bk, \quad c=dk$
- (1) $\frac{3a+2c}{3b+2d}=\frac{3bk+2dk}{3b+2d}=\frac{k(3b+2d)}{3b+2d}=k$
 $\frac{3a-2c}{3b-2d}=\frac{3bk-2dk}{3b-2d}=\frac{k(3b-2d)}{3b-2d}=k$
よって $\frac{3a+2c}{3b+2d}=\frac{3a-2c}{3b-2d}$
- (2) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{(bk)^2-b^2}{(bk)^2+b^2}=\frac{b^2(k^2-1)}{b^2(k^2+1)}=\frac{k^2-1}{k^2+1}$
 $\frac{c^2-d^2}{c^2+d^2}=\frac{(dk)^2-d^2}{(dk)^2+d^2}=\frac{d^2(k^2-1)}{d^2(k^2+1)}=\frac{k^2-1}{k^2+1}$
よって $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{c^2-d^2}{c^2+d^2}$

7 次の等式を証明せよ。

- (1) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
- (2) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

- (1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\left(3x+\frac{3}{x}\right)$
 $=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}-3x-\frac{3}{x}=x^3+\frac{1}{x^3}$

よって $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

- (2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^3-3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\left(3x-\frac{3}{x}\right)$
 $=x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}+3x-\frac{3}{x}=x^3-\frac{1}{x^3}$

よって $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

8 $a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$

解答 略

解説

- $a+b+c=0$ から $a+b=-c, \quad b+c=-a, \quad c+a=-b$
- よって 左辺 $=ab(-c)+bc(-a)+ca(-b)+3abc$
 $=-3abc+3abc=0$
- ゆえに $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$

9 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{a}{b}$

解答 略

解説

- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと $a=bk, \quad c=dk$
- よって $\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{mbk+ndk}{mb+nd}=\frac{k(mb+nd)}{mb+nd}=k$
- $\frac{a}{b}=k$
- ゆえに $\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{a}{b}$

10 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$\frac{x+2y+3z}{a+2b+3c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$

解答 略

解説

- $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ とおくと $x=ak, \quad y=bk, \quad z=ck$
- よって $\frac{x+2y+3z}{a+2b+3c}=\frac{ak+2bk+3ck}{a+2b+3c}=\frac{k(a+2b+3c)}{a+2b+3c}=k$
- $\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ak+bk+ck}{a+b+c}=\frac{k(a+b+c)}{a+b+c}=k$
- ゆえに $\frac{x+2y+3z}{a+2b+3c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$

[11] $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a(y-z) + b(z-x) + c(x-y) = 0$$

【解答】 略

【解説】

$$\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b} = k \text{ とおくと}$$

$$x = k(b+c), \quad y = k(c+a), \quad z = k(a+b)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & a(y-z) + b(z-x) + c(x-y) \\ &= a\{k(c+a) - k(a+b)\} + b\{k(a+b) - k(b+c)\} + c\{k(b+c) - k(c+a)\} \\ &= k(ac - ab + ab - bc + bc - ac) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad a(y-z) + b(z-x) + c(x-y) = 0$$

[12] 次の等式が成り立つことを証明せよ。 [10 点]

$$(x+1)^3 = x(x+1)^2 + x(x+1) + (x+1)$$

【解答】 左辺 $= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$$\text{右辺} = x(x^2 + 2x + 1) + x^2 + x + x + 1$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\text{よって} \quad (x+1)^3 = x(x+1)^2 + x(x+1) + (x+1)$$

【解説】

$$\text{左辺} = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\text{右辺} = x(x^2 + 2x + 1) + x^2 + x + x + 1$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\text{よって} \quad (x+1)^3 = x(x+1)^2 + x(x+1) + (x+1)$$

[13] $a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。 [各 20 点]

$$(1) \quad 2a^2 + bc = (b-a)(c-a)$$

$$(2) \quad ab(a+b)^2 + bc(b+c)^2 + ca(c+a)^2 = 0$$

【解答】 (1) $a+b+c=0$ であるから $c = -(a+b)$

$$\text{左辺} = 2a^2 - b(a+b) = 2a^2 - ab - b^2$$

$$\text{右辺} = (b-a)(-2a-b) = 2a^2 - ab - b^2$$

$$\text{ゆえに} \quad 2a^2 + bc = (b-a)(c-a)$$

(2) $a+b+c=0$ であるから $c = -(a+b)$

$$\text{左辺} = ab(a+b)^2 - b(a+b)(-a)^2 - (a+b)a(-b)^2$$

$$= ab(a+b)\{(a+b) - a - b\} = 0$$

【別解】 $a+b+c=0$ から

$$a+b = -c, \quad b+c = -a, \quad c+a = -b$$

$$\text{左辺} = ab(-c)^2 + bc(-a)^2 + ca(-b)^2$$

$$= abc^2 + a^2bc + ab^2c$$

$$= abc(a+b+c) = 0$$

【解説】

$$(1) \quad a+b+c=0 \text{ であるから} \quad c = -(a+b)$$

$$\text{左辺} = 2a^2 - b(a+b) = 2a^2 - ab - b^2$$

$$\text{右辺} = (b-a)(-2a-b) = 2a^2 - ab - b^2$$

$$\text{ゆえに} \quad 2a^2 + bc = (b-a)(c-a)$$

(2) $a+b+c=0$ であるから $c = -(a+b)$

$$\text{左辺} = ab(a+b)^2 - b(a+b)(-a)^2 - (a+b)a(-b)^2$$

$$= ab(a+b)\{(a+b) - a - b\} = 0$$

【別解】 $a+b+c=0$ から

$$a+b = -c, \quad b+c = -a, \quad c+a = -b$$

$$\text{左辺} = ab(-c)^2 + bc(-a)^2 + ca(-b)^2$$

$$= abc^2 + a^2bc + ab^2c$$

$$= abc(a+b+c) = 0$$

[14] $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。 [各15 点]

$$(1) \quad \frac{2a+3c}{2b+3d} = \frac{3a+c}{3b+d}$$

$$(2) \quad \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} = \frac{ab-cd}{ab+cd}$$

【解答】 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと $a = bk, \quad c = dk$

$$(1) \quad \text{左辺} = \frac{k(2b+3d)}{2b+3d} = k, \quad \text{右辺} = \frac{k(3b+d)}{3b+d} = k$$

$$\text{よって} \quad \frac{2a+3c}{2b+3d} = \frac{3a+c}{3b+d}$$

$$(2) \quad \text{左辺} = \frac{k^2(b^2-d^2)}{k^2(b^2+d^2)} = \frac{b^2-d^2}{b^2+d^2}, \quad \text{右辺} = \frac{k(b^2-d^2)}{k(b^2+d^2)} = \frac{b^2-d^2}{b^2+d^2}$$

$$\text{よって} \quad \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} = \frac{ab-cd}{ab+cd}$$

【解説】

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと} \quad a = bk, \quad c = dk$$

$$(1) \quad \text{左辺} = \frac{k(2b+3d)}{2b+3d} = k, \quad \text{右辺} = \frac{k(3b+d)}{3b+d} = k$$

$$\text{よって} \quad \frac{2a+3c}{2b+3d} = \frac{3a+c}{3b+d}$$

$$(2) \quad \text{左辺} = \frac{k^2(b^2-d^2)}{k^2(b^2+d^2)} = \frac{b^2-d^2}{b^2+d^2}, \quad \text{右辺} = \frac{k(b^2-d^2)}{k(b^2+d^2)} = \frac{b^2-d^2}{b^2+d^2}$$

$$\text{よって} \quad \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} = \frac{ab-cd}{ab+cd}$$

[15] 次の等式を証明せよ。

$$(1) \quad (x-a)(x-b) + a(x-b) + bx = x^2$$

$$(2) \quad (a^2-b^2)(c^2-d^2) = (ac+bd)^2 - (ad+bc)^2$$

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

$$(1) \quad (\text{左辺}) = \{x^2 - (a+b)x + ab\} + (ax - ab) + bx$$

$$= x^2 - ax - bx + ab + ax - ab + bx$$

$$= x^2$$

$$\text{よって、与えられた等式は成り立つ。}$$

$$(2) \quad (\text{左辺}) = a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$$

$$(\text{右辺}) = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - (a^2d^2 + 2adb^2 + b^2c^2)$$

$$= a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$$

$$\text{よって、与えられた等式は成り立つ。}$$

【別解】 (右辺) $= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2)$

$$= a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$$

$$= a^2(c^2 - d^2) - b^2(c^2 - d^2) = (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)$$

$$\text{よって、与えられた等式は成り立つ。}$$

[16] $a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a^3 + b^3 + c^3 = -3(a+b)(b+c)(c+a)$$

【解答】 略

【解説】

$$a+b+c=0 \text{ より、} \quad c = -(a+b) \text{ であるから}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a+b)^3 = a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

$$= -3a^2b - 3ab^2$$

$$-3(a+b)(b+c)(c+a) = -3(a+b)\{b-(a+b)\}\{-(a+b)+a\}$$

$$= -3(a+b)(-a)(-b) = -3a^2b - 3ab^2$$

$$\text{よって} \quad a^3 + b^3 + c^3 = -3(a+b)(b+c)(c+a)$$

【別解】 条件式より、 $a+b=-c, \quad b+c=-a, \quad c+a=-b$ であるから

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(-c)(-a)(-b)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\text{よって} \quad a^3 + b^3 + c^3 = -3(a+b)(b+c)(c+a)$$

[17] $a+b+c=1, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ のとき、 a, b, c のうち少なくとも1つは1であることを証明せよ。

【解答】 略

【解説】

$$(\text{解答 1}) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \text{ から} \quad bc + ca + ab = abc \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$P = (a-1)(b-1)(c-1) \text{ とすると}$$

$$P = abc - (bc + ca + ab) + a + b + c - 1$$

$$a+b+c=1 \text{ と ① を代入すると}$$

$$P = abc - abc + 1 - 1 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad (a-1)(b-1)(c-1) = 0$$

$$\text{よって} \quad a-1=0 \text{ または } b-1=0 \text{ または } c-1=0$$

$$\text{したがって、} a, b, c \text{ のうち少なくとも1つは1である。}$$

$$(\text{解答 2}) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \text{ から} \quad bc + ca + ab = abc \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$a+b+c=1 \text{ から} \quad c = 1 - (a+b) \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{① から} \quad (a+b)c + ab(1-c) = 0$$

$$\text{② を代入して} \quad (a+b)\{1-(a+b)\} + ab(a+b) = 0$$

$$\text{よって} \quad (a+b)\{ab-(a+b)+1\} = 0$$

$$\text{すなわち} \quad (a+b)(a-1)(b-1) = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad a+b=0 \text{ または } a-1=0 \text{ または } b-1=0$$

$$a+b=0 \text{ のとき、② から} \quad c=1$$

$$\text{よって} \quad a=1 \text{ または } b=1 \text{ または } c=1$$

$$\text{したがって、} a, b, c \text{ のうち少なくとも1つは1である。}$$

[18] 次の等式を証明せよ。

$$(1) \quad a^4 + b^4 = \frac{1}{2}\{(a^2 + b^2)^2 + (a-b)^2(a+b)^2\}$$

$$(2) \quad (a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = (ac - 3bd)^2 + 3(ad + bc)^2$$

$$(3) \quad a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$$

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略

【解説】

$$(1) \quad \text{右辺} = \frac{1}{2}\{(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2\} = \frac{1}{2}\{(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)\}$$

$$= \frac{1}{2}(2a^4 + 2b^4) = a^4 + b^4 = \text{左辺}$$

よって、等式は成り立つ。

$$\begin{aligned}(2) \quad \text{左辺} &= a^2c^2 + 3a^2d^2 + 3b^2c^2 + 9b^2d^2 \\ \text{右辺} &= (a^2c^2 - 6abcd + 9b^2d^2) + 3(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) \\ &= a^2c^2 + 3a^2d^2 + 3b^2c^2 + 9b^2d^2\end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

$$\begin{aligned}(3) \quad \text{左辺} &= a^2b - ca^2 + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2 \\ \text{右辺} &= (b^2c - bc^2) + (c^2a - ca^2) + (a^2b - ab^2) = a^2b - ca^2 + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2\end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

注意 上の解答の証明法は一例である。例えば、(2)で、左辺－右辺を変形して0になることを示してもよい。

$$\begin{aligned}& (a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) - \{(ac - 3bd)^2 + 3(ad + bc)^2\} \\ &= (a^2c^2 + 3a^2d^2 + 3b^2c^2 + 9b^2d^2) - \{(a^2c^2 - 6abcd + 9b^2d^2) + 3(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2)\} \\ &= (a^2c^2 + 3a^2d^2 + 3b^2c^2 + 9b^2d^2) - (a^2c^2 + 3a^2d^2 + 3b^2c^2 + 9b^2d^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

19 $a + b + c = 0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

- (1) $a^2 - 2bc = b^2 + c^2$
- (2) $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = 0$
- (3) $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 3abc = 0$

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略

解説

$a + b + c = 0$ から $c = -(a + b)$ …… ①

(1) ①を代入すると

$$\begin{aligned}a^2 - 2bc - (b^2 + c^2) &= a^2 + 2b(a + b) - b^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2b^2 - b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

(2) ①を左辺に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (a + b)(b - (a + b))\{-(a + b) + a\} + ab\{-(a + b)\} \\ &= ab(a + b) - ab(a + b) \\ &= 0\end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

(3) ①を左辺に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= a^2\{b - (a + b)\} + b^2\{-(a + b) + a\} + \{-(a + b)\}^2(a + b) + 3ab\{-(a + b)\} \\ &= -a^3 - b^3 + (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - (3a^2b + 3ab^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

別解 $a + b + c = 0$ から $b + c = -a$, $c + a = -b$, $a + b = -c$ …… ②

(2) ②を左辺に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (-c)(-a)(-b) + abc = -abc + abc \\ &= 0\end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

(3) 左辺を式変形すると

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 3abc \\ &= ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc\end{aligned}$$

②を代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= ab(-c) + bc(-a) + ca(-b) + 3abc = -abc - abc - abc + 3abc \\ &= 0\end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

20 $a + b + c = 0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -3$$

解答 略

解説

$$\text{左辺} = \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

ここで、 $a + b + c = 0$ から $c = -(a + b)$

$$\text{よって} \quad \text{左辺} = \frac{b - (a + b)}{a} + \frac{-(a + b) + a}{b} + \frac{a + b}{-(a + b)} = -3$$

$$\text{ゆえに} \quad a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -3$$

$$\text{別解} \quad \text{左辺} = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

ここで、 $a + b + c = 0$ から $b + c = -a$, $c + a = -b$, $a + b = -c$

$$\text{よって} \quad \text{左辺} = \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} = -3$$

ゆえに、等式は成り立つ。

21 $\frac{y+z}{b-c} = \frac{z+x}{c-a} = \frac{x+y}{a-b}$ のとき、 $x + y + z = 0$ であることを証明せよ。

解答 略

解説

$$\frac{y+z}{b-c} = \frac{z+x}{c-a} = \frac{x+y}{a-b} = k \text{ とおくと}$$

$$y + z = (b - c)k, \quad z + x = (c - a)k, \quad x + y = (a - b)k$$

これらの辺々を加えると

$$(y + z) + (z + x) + (x + y) = (b - c)k + (c - a)k + (a - b)k$$

整理すると $2(x + y + z) = 0$

$$\text{よって} \quad x + y + z = 0$$

22 $a : b : c = x : y : z$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$$

解答 略

解説

$a : b : c = x : y : z$ から、 k を定数として

$$a = xk, \quad b = yk, \quad c = zk$$

と表される。

$$\text{よって} \quad \text{左辺} = (x^2k^2 + y^2k^2 + z^2k^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2k^2$$

$$\text{右辺} = (x^2k + y^2k + z^2k)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2k^2$$

$$\text{ゆえに} \quad (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$$

23 (1) $x + y + z = -1$, $xy + yz + zx + xyz = 0$ ならば、 x , y , z のうち少なくとも1つは -1 であることを示せ。

(2) $(bc + ca + ab)(a + b + c) = abc$ ならば、 a , b , c のうちどれか2つの和は0であることを示せ。

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$$(1) \quad (x + 1)(y + 1)(z + 1) = (xyz + xy + yz + zx) + (x + y + z) + 1$$

よって、 $x + y + z = -1$, $xy + yz + zx + xyz = 0$ が成り立つとき

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 0 - 1 + 1 = 0$$

したがって

$$x + 1 = 0 \text{ または } y + 1 = 0 \text{ または } z + 1 = 0$$

であるから、 x , y , z のうち少なくとも1つは -1 である。

$$(2) \quad \text{条件の式から} \quad abc + ca^2 + a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + c^2a + abc = abc$$

$$a \text{ について整理すると} \quad (b + c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + bc(b + c) = 0$$

$$\text{よって} \quad (b + c)\{a^2 + (b + c)a + bc\} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (b + c)(a + b)(a + c) = 0$$

したがって

$$b + c = 0 \text{ または } a + b = 0 \text{ または } a + c = 0$$

であるから、 a , b , c のうちどれか2つの和は0である。

24 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$ のとき、 x , y , z のうち、どれか2つの和は0であることを証明せよ。

解答 略

解説

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z} \text{ から} \quad \frac{yz + zx + xy}{xyz} = \frac{1}{x + y + z}$$

$$\text{よって} \quad (x + y + z)(yz + zx + xy) = xyz$$

$$\text{ゆえに} \quad \{x + (y + z)\}\{(y + z)x + yz\} - xyz = 0$$

$$(y + z)x^2 + (y + z)^2x + yz(y + z) = 0$$

$$(y + z)\{x^2 + (y + z)x + yz\} = 0$$

$$(y + z)(x + y)(x + z) = 0$$

$$\text{よって} \quad y + z = 0 \text{ または } x + y = 0 \text{ または } x + z = 0$$

したがって、 x , y , z のうちどれか2つの和は0である。

25 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、等式 $\frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} = \frac{ab + cd}{ab - cd}$ が成り立つことを証明せよ。

解答 略

解説

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと} \quad a = bk, \quad c = dk$$

$$\text{よって} \quad \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} = \frac{b^2k^2 + d^2k^2}{b^2k^2 - d^2k^2} = \frac{(b^2 + d^2)k^2}{(b^2 - d^2)k^2} = \frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2}$$

$$\frac{ab + cd}{ab - cd} = \frac{b^2k + d^2k}{b^2k - d^2k} = \frac{(b^2 + d^2)k}{(b^2 - d^2)k} = \frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} = \frac{ab + cd}{ab - cd}$$

26 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(1) \quad \frac{a + c}{b + d} = \frac{a^2d}{b^2c} \qquad (2) \quad \frac{a}{b} = \frac{pa + qc}{pb + qd} = \frac{pa + qc + re}{pb + qd + rf}$$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{ とおくと } \quad a = bk, \ c = dk, \ e = fk$$
$$(1) \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{(b+d)k}{b+d} = k, \quad \frac{a^2d}{b^2c} = \frac{b^2k^2 \cdot d}{b^2 \cdot dk} = k$$

したがって $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a^2d}{b^2c}$

$$(2) \quad \frac{a}{b} = k, \quad \frac{pa+qc}{pb+qd} = \frac{pbk+qdk}{pb+qd} = \frac{(pb+qd)k}{pb+qd} = k,$$
$$\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf} = \frac{pbk+qdk+rfk}{pb+qd+rf} = \frac{(pb+qd+rf)k}{pb+qd+rf} = k$$

したがって $\frac{a}{b} = \frac{pa+qc}{pb+qd} = \frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$

参考 (1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ から $\frac{ad}{bc} = 1$

よって $\frac{a^2d}{b^2c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} = k$

27 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ のとき, 等式 $\frac{b+c}{c+d} = \frac{a+c}{b+d}$ が成り立つことを証明せよ。

解答 略

解説

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと } \quad a = bk, \ b = ck, \ c = dk$$

よって $a = dk^3, \ b = dk^2, \ c = dk$

ゆえに $\frac{b+c}{c+d} = \frac{dk^2+dk}{dk+d} = \frac{(dk+d)k}{dk+d} = k$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{dk^3+dk}{dk^2+d} = \frac{(dk^2+d)k}{dk^2+d} = k$$

したがって $\frac{b+c}{c+d} = \frac{a+c}{b+d}$