1 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$x^2-x=a(x-3)^2+b(x-3)+c$$

解答　$a=1$，$b=5$，$c=6$

解説

等式の右辺を x について整理すると

$$x^2-x=ax^2+(-6a+b)x+(9a-3b+c)$$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。よって

$$1=a,\quad -1=-6a+b,\quad 0=9a-3b+c$$

これを解いて　$a=1$，$b=5$，$c=6$

2 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

(1)　$a(x+2)+b(x-2)=2x+8$

(2)　$x^2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

(3)　$x^3=ax(x+1)(x+2)+bx(x+1)+cx+d$

解答　(1)　$a=3$，$b=-1$　(2)　$a=1$，$b=2$，$c=1$

(3)　$a=1$，$b=-3$，$c=1$，$d=0$

解説

(1)　等式の左辺を x について整理すると　$(a+b)x+2(a-b)=2x+8$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$a+b=2$，$2(a-b)=8$　これを解いて　$a=3$，$b=-1$

(2)　等式の右辺を x について整理すると　$x^2=ax^2-(2a-b)x+(a-b+c)$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$a=1$，$2a-b=0$，$a-b+c=0$

これを解いて　$a=1$，$b=2$，$c=1$

(3)　等式の右辺を x について整理すると　$x^3=ax^3+(3a+b)x^2+(2a+b+c)x+d$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$a=1$，$3a+b=0$，$2a+b+c=0$，$d=0$

これを解いて　$a=1$，$b=-3$，$c=1$，$d=0$

別解　与えられた等式が x についての恒等式ならば，x にどのような値を代入しても，この等式は成り立つ。

x に 0，-1，-2，1 をそれぞれ代入すると

$$0=d,\quad -1=-c+d,\quad -8=2b-2c+d,\quad 1=6a+2b+c+d$$

となる。

これを解いて　$a=1$，$b=-3$，$c=1$，$d=0$

逆に，$a=1$，$b=-3$，$c=1$，$d=0$ のとき，与えられた等式の右辺は

$$x(x+1)(x+2)-3x(x+1)+x=x^3$$

となり，与えられた等式は恒等式である。

3 等式 $\dfrac{3x-5}{(2x-1)(x+3)}=\dfrac{a}{2x-1}+\dfrac{b}{x+3}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　$a=-1$，$b=2$

解説

与えられた等式が x についての恒等式ならば，その両辺に $(2x-1)(x+3)$ を掛けて得られる等式

$$3x-5=a(x+3)+b(2x-1)$$

も x についての恒等式である。右辺を x について整理すると

$$3x-5=(a+2b)x+(3a-b)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$3=a+2b,\quad -5=3a-b$$

これを解いて　$a=-1$，$b=2$

4 等式 $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　$a=-3$，$b=5$

解説

与えられた等式の両辺に $(x+1)(x+2)$ を掛けて得られる等式

$$2x-1=a(x+2)+b(x+1)$$

も x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると　$2x-1=(a+b)x+(2a+b)$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから　$a+b=2$，$2a+b=-1$

これを解いて　$a=-3$，$b=5$

5 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$ax(x+1)+bx(x-1)+c(x-1)(x-3)=x^2+3$

(2)　$x^3+ax+2=(x-1)(x^2+bx+c)$

(3)　$\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

解答　(1)　$a=2$，$b=-2$，$c=1$　(2)　$a=-3$，$b=1$，$c=-2$

(3)　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{2}{3}$

解説

(1)　等式の左辺を x について整理すると

$$(a+b+c)x^2+(a-b-4c)x+3c=x^2+3$$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$a+b+c=1$，$a-b-4c=0$，$3c=3$

これを解いて　$a=2$，$b=-2$，$c=1$

(2)　等式の右辺を x について整理すると

$$x^3+ax+2=x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c$$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$0=b-1$，$a=c-b$，$2=-c$

これを解いて　$a=-3$，$b=1$，$c=-2$

(3)　与えられた等式が恒等式ならば，その両辺に $(x+1)(x^2-x+1)$ を掛けて得られる等式

$$1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$$

も x についての恒等式である。右辺を x について整理すると

$$1=(a+b)x^2-(a-b-c)x+(a+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0=a+b,\quad 0=a-b-c,\quad 1=a+c$$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{2}{3}$

別解　(1)　与えられた等式が x についての恒等式ならば，x にどのような値を代入しても，この等式は成り立つ。x に 0，-1，1 をそれぞれ代入すると

$$3c=3,\quad 2b+8c=4,\quad 2a=4$$

これを解いて　$a=2$，$b=-2$，$c=1$

逆に，$a=2$，$b=-2$，$c=1$ のとき，与えられた等式の左辺は

$$2x(x+1)-2x(x-1)+(x-1)(x-3)=x^2+3$$

となり，与えられた等式は恒等式である。

(2)　与えられた等式が x についての恒等式ならば，x にどのような値を代入しても，この等式は成り立つ。x に 1 を代入すると

$$a+3=0\qquad \text{よって}\quad a=-3$$

ゆえに　$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+bx+c)$

ここで，x^3-3x+2 を $x-1$ で割ると，商は x^2+x-2，余りは 0 であるから

$$x^2+bx+c=x^2+x-2$$

これが x についての恒等式であるから　$b=1$，$c=-2$

逆に，$a=-3$，$b=1$，$c=-2$ のとき，与えられた等式は

$$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$$

となり，x についての恒等式である。

6 等式 $(k+2)x+(k+1)y-3k-4=0$ が，k のどのような値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

解答　$x=1$，$y=2$

解説

等式の左辺を k について整理すると

$$k(x+y-3)+2x+y-4=0$$

これが k についての恒等式となるから

$$x+y-3=0,\quad 2x+y-4=0$$

これを解いて　$x=1$，$y=2$

7 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a, b, c, d の値を定めよ。[各 10 点]

(1)　$a(x-1)+b(x+5)=3x+3$

(2)　$x^2+4x=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

(3)　$x^2+x+2=ax(x-2)+bx(x-1)+c(x-1)(x-2)$

解答　(1)　$(a+b)x-a+5b=3x+3$

両辺の係数を比較して　$a+b=3$，$-a+5b=3$

これを解いて　$a=2$，$b=1$

(2)　$x^2+4x=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

両辺の係数を比較して　$a=1$，$2a+b=4$，$a+b+c=0$

これを解いて　$a=1$，$b=2$，$c=-3$

(3)　与えられた等式の両辺に $x=1$，2，0 を代入すると

$$4=-a,\quad 8=2b,\quad 2=2c$$

これを解いて　$a=-4$，$b=4$，$c=1$

逆に，$a=-4$，$b=4$，$c=1$ のとき，与えられた等式の右辺は

$$-4x(x-2)+4x(x-1)+(x-1)(x-2)=x^2+x+2$$

となり，与えられた等式は恒等式である。　答　$a=-4$，$b=4$，$c=1$

解説

(1)　$(a+b)x-a+5b=3x+3$

両辺の係数を比較して　$a+b=3$，$-a+5b=3$

これを解いて　$a=2,\ b=1$

(2)　$x^2+4x=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

両辺の係数を比較して　$a=1,\ 2a+b=4,\ a+b+c=0$

これを解いて　$a=1,\ b=2,\ c=-3$

(3)　与えられた等式の両辺に $x=1,\ 2,\ 0$ を代入すると

$$4=-a,\ 8=2b,\ 2=2c$$

これを解いて　$a=-4,\ b=4,\ c=1$

逆に，$a=-4,\ b=4,\ c=1$ のとき，与えられた等式の右辺は

$$-4x(x-2)+4x(x-1)+(x-1)(x-2)=x^2+x+2$$

となり，与えられた等式は恒等式である。　答　$a=-4,\ b=4,\ c=1$

$\boxed{8}$ 等式 $\dfrac{7}{(2x+1)(x-3)}=\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{b}{x-3}$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ。[20 点]

解答　与えられた等式の両辺に $(2x+1)(x-3)$ を掛けると

$$7=a(x-3)+b(2x+1)$$

すなわち　$7=(a+2b)x+(-3a+b)$

これが x についての恒等式であるから

$$a+2b=0,\ -3a+b=7$$

これを解いて　$a=-2,\ b=1$

解説

与えられた等式の両辺に $(2x+1)(x-3)$ を掛けると

$$7=a(x-3)+b(2x+1)$$

すなわち　$7=(a+2b)x+(-3a+b)$

これが x についての恒等式であるから

$$a+2b=0,\ -3a+b=7$$

これを解いて　$a=-2,\ b=1$

$\boxed{9}$ $x^3-4x^2+9x-10=(x-1)^3+a(x-2)^2+b(x-3)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。[15 点]

解答　$x^3-4x^2+9x-10=x^3+(-3+a)x^2+(3-4a+b)x+(-1+4a-3b+c)$

から，両辺の係数を比較して

$$-4=-3+a,\ 9=3-4a+b,\ -10=-1+4a-3b+c$$

これを解いて　$a=-1,\ b=2,\ c=1$

別解　$x^3-4x^2+9x-10=(x-1)^3+a(x-2)^2+b(x-3)+c$

が恒等式であるとすると，$x=1,\ 2,\ 3$ を代入して

$$-4=a-2b+c,\ 0=1-b+c,\ 8=8+a+c$$

これを解いて　$a=-1,\ b=2,\ c=1$

逆に $a=-1,\ b=2,\ c=1$ のとき，与えられた等式の右辺は

$$(x-1)^3-(x-2)^2+2(x-3)+1=x^3-4x^2+9x-10$$

となり，与えられた等式は恒等式である。　答　$a=-1,\ b=2,\ c=1$

解説

$x^3-4x^2+9x-10=x^3+(-3+a)x^2+(3-4a+b)x+(-1+4a-3b+c)$

から，両辺の係数を比較して

$$-4=-3+a,\ 9=3-4a+b,\ -10=-1+4a-3b+c$$

これを解いて　$a=-1,\ b=2,\ c=1$

別解　$x^3-4x^2+9x-10=(x-1)^3+a(x-2)^2+b(x-3)+c$

が恒等式であるとすると，$x=1,\ 2,\ 3$ を代入して

$$-4=a-2b+c,\ 0=1-b+c,\ 8=8+a+c$$

これを解いて　$a=-1,\ b=2,\ c=1$

逆に $a=-1,\ b=2,\ c=1$ のとき，与えられた等式の右辺は

$$(x-1)^3-(x-2)^2+2(x-3)+1=x^3-4x^2+9x-10$$

となり，与えられた等式は恒等式である。　答　$a=-1,\ b=2,\ c=1$

$\boxed{10}$ 次の等式が，x の恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。[20点]

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{(x-1)^2}+\frac{4x^2}{(x-1)^3}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x-1)^3}$$

解答　両辺に $(x-1)^3$ を掛けた次の等式も x の恒等式である。

$$(x-1)^2+2x(x-1)+4x^2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

x について整理すると

$$7x^2-4x+1=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$7=a,\ -4=-2a+b,\ 1=a-b+c$$

これを解いて　$a=7,\ b=10,\ c=4$

解説

両辺に $(x-1)^3$ を掛けた次の等式も x の恒等式である。

$$(x-1)^2+2x(x-1)+4x^2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

x について整理すると

$$7x^2-4x+1=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$7=a,\ -4=-2a+b,\ 1=a-b+c$$

これを解いて　$a=7,\ b=10,\ c=4$

$\boxed{11}$ $(2k-3)x-(k-1)y+2k-1=0$ が，k のどのような値に対しても成り立つように，$x,\ y$ の値を定めよ。[20 点]

解答　k について整理すると

$$(2x-y+2)k+(-3x+y-1)=0$$

これが k についての恒等式となるから

$$2x-y+2=0,\ -3x+y-1=0$$

これを解いて　$x=1,\ y=4$

解説

k について整理すると

$$(2x-y+2)k+(-3x+y-1)=0$$

これが k についての恒等式となるから

$$2x-y+2=0,\ -3x+y-1=0$$

これを解いて　$x=1,\ y=4$

$\boxed{12}$ 等式 $(a-2b+4)x+(a-3b+7)=0$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ。

解答　$a=2,\ b=3$

解説

与えられた等式が x についての恒等式となるための条件は

$$a-2b+4=0,\ a-3b+7=0$$

これを解いて　$a=2,\ b=3$

$\boxed{13}$ 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を定めよ。

$$ax^3+8x^2-3x+b+2=(2x^2+3)(cx+d)$$

解答　$a=-2,\ b=10,\ c=-1,\ d=4$

解説

与式の右辺を展開して整理すると

$$ax^3+8x^2-3x+b+2=2cx^3+2dx^2+3cx+3d$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$a=2c,\ 8=2d,\ -3=3c,\ b+2=3d$$

この連立方程式を解いて

$$a=-2,\ b=10,\ c=-1,\ d=4$$

$\boxed{14}$ 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を定めよ。

$$6x^3+ax^2+23x+b=(x+3)(cx+1)(3x+d)$$

解答　$a=25,\ b=6,\ c=2,\ d=2$

解説

与式の右辺を展開して整理すると

$$6x^3+ax^2+23x+b=3cx^3+(cd+9c+3)x^2+(3cd+d+9)x+3d$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$6=3c$　……①，　$a=cd+9c+3$　……②

$23=3cd+d+9$　……③，　$b=3d$　……④

① から　$c=2$　　③ に代入して整理すると　$7d=14$

よって　$d=2$　　④ に代入して　$b=6$

② から　$a=2\cdot2+9\cdot2+3=25$

以上から　$a=25,\ b=6,\ c=2,\ d=2$

$\boxed{15}$ 等式 $(k+1)x-(2k+3)y-3k-5=0$ がどんな k の値についても成り立つように，$x,\ y$ の値を定めよ。

解答　$x=-1,\ y=-2$

解説

k について整理すると

$$(x-2y-3)k+(x-3y-5)=0$$

これがどんな k の値についても成り立つための条件は

$$x-2y-3=0,\ x-3y-5=0$$

これを解くと　$x=-1,\ y=-2$

$\boxed{16}$ 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を定めよ。

$$x^3-3x^2+7=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$$

解答　$a=1,\ b=3,\ c=0,\ d=3$

解説

恒等式ならば，$x=0,\ 1,\ 2,\ 3$ を代入しても成り立つ。

$x=0$ を代入すると　$7=-8a+4b-2c+d$

$x=1$ を代入すると　$5=-a+b-c+d$

$x=2$ を代入すると　$3=d$

$x=3$ を代入すると　$7=a+b+c+d$

これを解いて　$a=1,\ b=3,\ c=0,\ d=3$

このとき　(右辺)$=(x-2)^3+3(x-2)^2+3=x^3-3x^2+7$

よって，与式は恒等式である。

したがって　$a=1,\ b=3,\ c=0,\ d=3$

$\boxed{17}$ $x^3+5x^2+4x-4=(x+1)^3+p(x+1)^2+q(x+1)+r$ が x についての恒等式となるように定数 $p,\ q,\ r$ の値を定めたとき，積 pqr の値を求めよ。

解答　$pqr=24$

解説

恒等式ならば，$x=-2,\ -1,\ 0$ を代入しても成り立つ。

$x=-2$ を代入すると　$0=-1+p-q+r$

$x=-1$ を代入すると　$-4=r$

$x=0$　を代入すると　$-4=1+p+q+r$

これを解くと　$p=2,\ q=-3,\ r=-4$

このとき

$$(\text{右辺})=(x+1)^3+2(x+1)^2-3(x+1)-4$$
$$=x^3+3x^2+3x+1+2(x^2+2x+1)-3x-3-4$$
$$=x^3+5x^2+4x-4$$

ゆえに，与式は恒等式である。

よって　$p=2,\ q=-3,\ r=-4$

したがって　$pqr=2\cdot(-3)\cdot(-4)=24$

別解　$x+1=X$ とおくと　$x=X-1$

よって，与えられた等式は

$$(X-1)^3+5(X-1)^2+4(X-1)-4=X^3+pX^2+qX+r$$

すなわち　$X^3+2X^2-3X-4=X^3+pX^2+qX+r$

これが X についての恒等式であるから

$$p=2,\ q=-3,\ r=-4$$

よって　$pqr=2\cdot(-3)\cdot(-4)=24$

18 等式 $\dfrac{x^2-x+6}{(x+1)(x-1)^2}=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

解答　$a=3,\ b=-1,\ c=2$

解説

両辺に $(x+1)(x-1)^2$ を掛けて得られる等式

$$x^2-x+6=a(x+1)+b(x+1)(x-1)+c(x-1)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

も x についての恒等式である。

$x=0,\ 1,\ -1$ を代入すると

$$6=a-b+c,\quad 6=2a,\quad 8=4c$$

これを解いて　$a=3,\ b=-1,\ c=2$

このとき，　$(①\text{ の右辺})=3(x+1)-(x+1)(x-1)+2(x-1)^2=x^2-x+6$

となり，① は恒等式である。

よって，① の両辺を $(x+1)(x-1)^2$ で割って得られる与式も恒等式であるから

$$a=3,\ b=-1,\ c=2$$

19 次の等式が恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

(1)　$\dfrac{x}{(3x-2)(2x+1)}=\dfrac{a}{3x-2}+\dfrac{b}{2x+1}$

(2)　$\dfrac{-2x^2+6}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{a}{x+1}-\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

解答　(1)　$a=\dfrac{2}{7},\ b=\dfrac{1}{7}$　　(2)　$a=1,\ b=3,\ c=2$

解説

(1)　両辺に $(3x-2)(2x+1)$ を掛けると　$x=a(2x+1)+b(3x-2)$

よって　$x=(2a+3b)x+a-2b$

これも x についての恒等式であるから，係数を比較して

$$2a+3b=1,\ a-2b=0$$

これを解いて　$a=\dfrac{2}{7},\ b=\dfrac{1}{7}$

(2)　$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)$

与式の両辺に $(x-1)^2(x+1)$ を掛けると

$$-2x^2+6=a(x-1)^2-b(x-1)(x+1)+c(x+1)$$

よって　$-2x^2+6=(a-b)x^2+(-2a+c)x+a+b+c$

これも x についての恒等式であるから，係数を比較して

$$a-b=-2,\quad -2a+c=0,\quad a+b+c=6$$

これを解いて　$a=1,\ b=3,\ c=2$

20 $6x^2+17xy+12y^2-11x-17y-7=(ax+3y+b)(cx+4y-7)$ が $x,\ y$ についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

解答　$a=2,\ b=1,\ c=3$

解説

右辺を展開して整理すると

$$6x^2+17xy+12y^2-11x-17y-7$$
$$=acx^2+(4a+3c)xy+12y^2+(-7a+bc)x+(4b-21)y-7b$$

これが $x,\ y$ についての恒等式となるための条件は，両辺の同類項の係数を比較して

$6=ac$　…… ①，　$17=4a+3c$　…… ②，　$-11=-7a+bc$　…… ③，

$-17=4b-21$　…… ④，　$-7=-7b$　…… ⑤

④，⑤ から　$b=1$　　このとき，③ から　$-11=-7a+c$　…… ⑥

②，⑥ を解いて　$a=2,\ c=3$　　これは ① を満たす。

よって　$a=2,\ b=1,\ c=3$

21 等式 $(x+ay-3)(2x-3y+b)=2x^2+cxy-6y^2-4x+dy-6$ が $x,\ y$ についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を定めよ。

解答　$a=2,\ b=2,\ c=1,\ d=13$

解説

左辺を展開して整理すると

$$2x^2+(2a-3)xy-3ay^2+(b-6)x+(ab+9)y-3b$$
$$=2x^2+cxy-6y^2-4x+dy-6$$

等式の両辺の係数を比較して

$$2a-3=c,\quad 3a=6,\quad b-6=-4,\quad ab+9=d,\quad 3b=6$$

よって　$a=2,\ b=2,\ c=1,\ d=13$

22 $2x+y+1=0,\ 3x+2y+z=0$ を満たす $x,\ y,\ z$ の値に対して，常に $ax^2+by^2+cz^2=3$ が成り立つような定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

解答　$a=3,\ b=-1,\ c=1$

解説

$2x+y+1=0$　…… ①，　$3x+2y+z=0$　…… ②　とする。

① から　$y=-2x-1$　…… ③

② に代入して　$3x+2(-2x-1)+z=0$　　よって　$z=x+2$　…… ④

③，④ を $ax^2+by^2+cz^2=3$ に代入すると

$$ax^2+b(-2x-1)^2+c(x+2)^2=3$$

よって　$(a+4b+c)x^2+4(b+c)x+b+4c-3=0$

これが x についての恒等式であるから

$$a+4b+c=0,\quad b+c=0,\quad b+4c-3=0$$

これを解いて　$a=3,\ b=-1,\ c=1$

23 (1)　$2x-y-3=0$ を満たすすべての $x,\ y$ に対して $ax^2+by^2+2cx-9=0$ が常に成り立つとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

(2)　$2x+y-3z=3,\ 3x+2y-z=2$ を満たすすべての実数 $x,\ y,\ z$ の値に対して，$px^2+qy^2+rz^2=12$ が成り立つような定数 $p,\ q,\ r$ の値を求めよ。

解答　(1)　$a=-4,\ b=1,\ c=6$　　(2)　$p=7,\ q=-4,\ r=21$

解説

(1)　$2x-y-3=0$ から　$y=2x-3$

これを $ax^2+by^2+2cx-9=0$ に代入すると

$$ax^2+b(2x-3)^2+2cx-9=0$$

よって　$(a+4b)x^2-2(6b-c)x+9(b-1)=0$

これが x についての恒等式であるから

$$a+4b=0,\quad 6b-c=0,\quad b-1=0$$

ゆえに　$a=-4,\ b=1,\ c=6$

(2)　$2x+y-3z=3$ …… ①，　$3x+2y-z=2$ …… ②

①×2−② から　$x=5z+4$

②×2−①×3 から　$y=-7z-5$

これらを $px^2+qy^2+rz^2=12$ に代入すると

$$p(5z+4)^2+q(-7z-5)^2+rz^2=12$$

よって　$(25p+49q+r)z^2+10(4p+7q)z+16p+25q=12$

これがすべての実数 z について成り立つから

$25p+49q+r=0$ …… ③，　$4p+7q=0$ …… ④，

$16p+25q=12$　…… ⑤

④，⑤ を解くと　$p=7,\ q=-4$

③ に代入して　$r=21$

したがって　$p=7,\ q=-4,\ r=21$

24 $2x^4+3x^3+ax^2$ を多項式 P で割ると，商が x^2-x+b，余りが $-5x-10$ である。このとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

解答　$a=-17,\ b=-1$ または $a=4,\ b=2$

解説

条件から，次の等式が成り立つ。

$$2x^4+3x^3+ax^2=P\times(x^2-x+b)-5x-10$$

よって　$2x^4+3x^3+ax^2+5x+10=P\times(x^2-x+b)$　…… ①

ゆえに，$P=2x^2+cx+d$ とおける。

よって　$P\times(x^2-x+b)=(2x^2+cx+d)(x^2-x+b)$

$$=2x^4+(c-2)x^3+(2b-c+d)x^2+(bc-d)x+bd$$

これと ① の左辺の係数を比較して

$3=c-2$　…… ②，　$a=2b-c+d$　…… ③

$5=bc-d$　…… ④，　$10=bd$　…… ⑤

② から　$c=5$

④ に代入して　$5=5b-d$　　ゆえに　$d=5(b-1)$

⑤ に代入して　$10=5b(b-1)$　　ゆえに　$b^2-b-2=0$

よって　$(b+1)(b-2)=0$　　ゆえに　$b=-1,\ 2$

$b=-1$ のとき　$d=-10,\ a=-17$

$b=2$ のとき　$d=5,\ a=4$

以上から　$a=-17,\ b=-1$ または $a=4,\ b=2$

別解　（3 行目まで同じ）

① から，$2x^4+3x^3+ax^2+5x+10$ は x^2-x+b で割り切れる。

実際に割り算を行うと，

$$\begin{array}{rrr|lllll}
 & & & 2 & 5 & a-2b+5 & & \\ \hline
1 & -1 & b & 2 & 3 & a & 5 & 10 \\
 & & & 2 & -2 & 2b & & \\ \hline
 & & & & 5 & a-2b & 5 & \\
 & & & & 5 & -5 & 5b & \\ \hline
 & & & & & a-2b+5 & 5-5b & 10 \\
 & & & & & a-2b+5 & -a+2b-5 & ab-2b^2+5b \\ \hline
 & & & & & & a-7b+10 & -ab+2b^2-5b+10
\end{array}$$

余りは　$(a-7b+10)x-ab+2b^2-5b+10$

よって　$\begin{cases} a-7b+10=0 & \cdots\cdots ⑥ \\ -ab+2b^2-5b+10=0 & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$

⑥ から　$a=7b-10$ ……⑧

⑧ を ⑦ に代入して整理すると　$b^2-b-2=0$

ゆえに　$(b+1)(b-2)=0$　よって　$b=-1,\ 2$

⑧ から　$b=-1$ のとき $a=-17$，$b=2$ のとき $a=4$

以上から　$a=-17$，$b=-1$ または $a=4$，$b=2$

25 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

(1) $a(x+2)-b(x-2)=4x$

(2) $2x^2-7x-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

(3) $a(x+2)^2+b(x+3)^2+c(x+2)(x+3)=x^2$

(4) $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d=3x^3-2x-1$

(5) $ax^3-7x^2-18x-b=(x+1)(x-4)(cx+d)$

解答 (1) $a=2$，$b=-2$　(2) $a=2$，$b=-3$，$c=-6$
(3) $a=9$，$b=4$，$c=-12$　(4) $a=3$，$b=-9$，$c=7$，$d=-2$
(5) $a=3$，$b=8$，$c=3$，$d=2$

解説

(1) 等式の左辺を x について整理すると　$(a-b)x+2a+2b=4x$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$a-b=4$，$2a+2b=0$

これを解いて　$a=2$，$b=-2$

別解 与式に $x=2$，-2 を代入すると　$4a=8$，$4b=-8$

これを解いて　$a=2$，$b=-2$

逆に，このとき

$$\text{左辺}=2(x+2)+2(x-2)=2x+4+2x-4=4x=\text{右辺}$$

となり，与式は x についての恒等式である。

よって　$a=2$，$b=-2$

(2) 等式の右辺を x について整理すると　$2x^2-7x-1=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$a=2$，$-2a+b=-7$，$a-b+c=-1$

これを解いて　$a=2$，$b=-3$，$c=-6$

別解 与式に $x=0$，1，2 を代入すると　$-1=a-b+c$，$-6=c$，$-7=a+b+c$

これを解いて　$a=2$，$b=-3$，$c=-6$

逆に，このとき

$$\text{右辺}=2(x-1)^2-3(x-1)-6=2x^2-4x+2-3x+3-6=2x^2-7x-1=\text{左辺}$$

となり，与式は x についての恒等式である。

よって　$a=2$，$b=-3$，$c=-6$

(3) 等式の左辺を x について整理すると

$$(a+b+c)x^2+(4a+6b+5c)x+4a+9b+6c=x^2$$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$a+b+c=1$，$4a+6b+5c=0$，$4a+9b+6c=0$

これを解いて　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

別解 与式に $x=-3$，-2，-1 を代入すると　$a=9$，$b=4$，$a+4b+2c=1$

これを解いて　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

逆に，このとき

$$\text{左辺}=9(x+2)^2+4(x+3)^2-12(x+2)(x+3)$$
$$=9x^2+36x+36+4x^2+24x+36-12x^2-60x-72$$
$$=x^2=\text{右辺}$$

となり，与式は x についての恒等式である。

よって　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

(4) 等式の左辺を x について整理すると

$$ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d=3x^3-2x-1$$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$a=3$，$3a+b=0$，$3a+2b+c=-2$，$a+b+c+d=-1$

これを解いて　$a=3$，$b=-9$，$c=7$，$d=-2$

別解 与式に $x=-2$，-1，0，1 を代入すると

$$-a+b-c+d=-21,\ d=-2,\ a+b+c+d=-1,\ 8a+4b+2c+d=0$$

これを解いて　$a=3$，$b=-9$，$c=7$，$d=-2$

逆に，このとき

$$\text{左辺}=3(x+1)^3-9(x+1)^2+7(x+1)-2$$
$$=3x^3+9x^2+9x+3-9x^2-18x-9+7x+7-2$$
$$=3x^3-2x-1=\text{右辺}$$

となり，与式は x についての恒等式である。

よって　$a=3$，$b=-9$，$c=7$，$d=-2$

(5) 等式の右辺を x について整理すると

$$ax^3-7x^2-18x-b=cx^3+(-3c+d)x^2+(-4c-3d)x-4d$$

この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。

よって　$c=a$，$-3c+d=-7$，$-4c-3d=-18$，$-4d=-b$

これを解いて　$a=3$，$b=8$，$c=3$，$d=2$

別解 与式に $x=-1$，4，0，1 を代入すると

$$-a-b+11=0,\ 64a-b-184=0,\ -b=-4d,\ a-b-25=-6(c+d)$$

これを解いて　$a=3$，$b=8$，$c=3$，$d=2$

逆に，このとき

$$\text{左辺}=3x^3-7x^2-18x-8$$
$$\text{右辺}=(x+1)(x-4)(3x+2)=3x^3-7x^2-18x-8$$

となり，与式は x についての恒等式である。

よって　$a=3$，$b=8$，$c=3$，$d=2$

26 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $\dfrac{4}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-3}$　(2) $\dfrac{x+1}{(x-1)(3x-1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{3x-1}$

(3) $\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

解答 (1) $a=-2$，$b=2$　(2) $a=1$，$b=-2$　(3) $a=1$，$b=-1$，$c=-2$

解説

(1) 与えられた等式が恒等式ならば，両辺に $(x-1)(x-3)$ を掛けて得られる等式

$$4=a(x-3)+b(x-1)$$

も x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると　$4=(a+b)x-3a-b$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから　$a+b=0$，$-3a-b=4$

これを解いて　$a=-2$，$b=2$

(2) 与えられた等式が恒等式ならば，両辺に $(x-1)(3x-1)$ を掛けて得られる等式

$$x+1=a(3x-1)+b(x-1)$$

も x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると　$x+1=(3a+b)x-a-b$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから　$3a+b=1$，$-a-b=1$

これを解いて　$a=1$，$b=-2$

(3) 与えられた等式が恒等式ならば，両辺に $(x-1)(x^2+x+1)\ (=x^3-1)$ を掛けて得られる等式

$$3=a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$$

も x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると　$3=(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから　$a+b=0$，$a-b+c=0$，$a-c=3$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$，$c=-2$

27 次の各場合について，定数 a，b の値を求めよ。

(1) $2x^3+ax+10$ を x^2-3x+b で割ると，余りが $3x-2$ である。

(2) x^3+ax^2-5x+4 を x^2+bx-2 で割ると，余りが 2 である。

解答 (1) $a=-11$，$b=2$　(2) $a=2$，$b=3$

解説

(1) c を定数として，次の恒等式が成り立つ。

$$2x^3+ax+10=(x^2-3x+b)(2x+c)+3x-2$$

右辺を x について整理すると

$$2x^3+ax+10=2x^3+(c-6)x^2+(2b-3c+3)x+bc-2$$

これが x についての恒等式であるから

$$0=c-6,\ a=2b-3c+3,\ 10=bc-2$$

これを解いて　$c=6$，$b=2$，$a=-11$

よって　$a=-11$，$b=2$

別解 $2x^3+ax+10$ を x^2-3x+b で割ると

商は $2x+6$，余りは $(a-2b+18)x+10-6b$

したがって，次の恒等式が成り立つ。

$$(a-2b+18)x+10-6b=3x-2$$

よって　$a-2b+18=3$，$10-6b=-2$

これを解いて　$a=-11$，$b=2$

(2) c を定数として，次の恒等式が成り立つ。

$$x^3+ax^2-5x+4=(x^2+bx-2)(x+c)+2$$

右辺を x について整理すると

$$x^3+ax^2-5x+4=x^3+(b+c)x^2+(bc-2)x-2c+2$$

これが x についての恒等式であるから

$$a=b+c,\ -5=bc-2,\ 4=-2c+2$$

これを解いて　$c=-1$，$b=3$，$a=2$

よって　$a=2$，$b=3$

別解 x^3+ax^2-5x+4 を x^2+bx-2 で割ると

商は $x+a-b$，余りは $(b^2-ab-3)x+2a-2b+4$

したがって，次の恒等式が成り立つ。

$$(b^2-ab-3)x+2a-2b+4=2$$

よって　$b^2-ab-3=0$，$2a-2b+4=2$

これを解いて　$a=2$，$b=3$

28 次の第 1 式が第 2 式で割り切れるように，定数 l，m の値を定めよ。

(1) x^3+lx^2+mx+2，x^2+2x+2　　(2) x^3+lx^2+m，$(x+2)^2$

解答　(1) $l=3$，$m=4$　(2) $l=3$，$m=-4$

解説

(1) 第 1 式が第 2 式で割り切れるとき，a を定数として，次の恒等式が成り立つ。

$$x^3+lx^2+mx+2=(x^2+2x+2)(x+a)$$

右辺を x について整理すると　$x^3+lx^2+mx+2=x^3+(a+2)x^2+(2a+2)x+2a$

これが x についての恒等式であるから　$l=a+2$，$m=2a+2$，$2=2a$

これを解いて　$a=1$，$l=3$，$m=4$

よって　$l=3$，$m=4$

別解　x^3+lx^2+mx+2 を x^2+2x+2 で割ると

商は $x+l-2$，余りは $(m-2l+2)x-2l+6$

したがって，第 1 式が第 2 式で割り切れるとき，次の恒等式が成り立つ。

$$(m-2l+2)x-2l+6=0$$

よって　$m-2l+2=0$，$-2l+6=0$

これを解いて　$l=3$，$m=4$

(2) 第 1 式が第 2 式で割り切れるとき，a を定数として，次の恒等式が成り立つ。

$$x^3+lx^2+m=(x+2)^2(x+a)$$

右辺を x について整理すると　$x^3+lx^2+m=x^3+(a+4)x^2+(4a+4)x+4a$

これが x についての恒等式であるから　$l=a+4$，$0=4a+4$，$m=4a$

これを解いて　$a=-1$，$l=3$，$m=-4$

よって　$l=3$，$m=-4$

別解　x^3+lx^2+m を $(x+2)^2$ で割ると

商は $x+l-4$，余りは $(12-4l)x+m-4l+16$

したがって，第 1 式が第 2 式で割り切れるとき，次の恒等式が成り立つ。

$$(12-4l)x+m-4l+16=0$$

よって　$12-4l=0$，$m-4l+16=0$

これを解いて　$l=3$，$m=-4$

29 次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $x^2+y^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2$　　(2) $xy=a(x+y)^2+b(x-y)^2$

(3) $x^2+axy+bx-2y+2=(x-1)(x+2y+c)$

解答　(1) $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$　(2) $a=\frac{1}{4}$，$b=-\frac{1}{4}$　(3) $a=2$，$b=-3$，$c=-2$

解説

(1) 等式の右辺を展開して整理すると　$x^2+y^2=(a+b)x^2+(2a-2b)xy+(a+b)y^2$

両辺の各項の係数を比較して　$a+b=1$，$2a-2b=0$

これを解いて　$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$

(2) 等式の右辺を展開して整理すると　$xy=(a+b)x^2+(2a-2b)xy+(a+b)y^2$

両辺の各項の係数を比較して　$a+b=0$，$2a-2b=1$

これを解いて　$a=\frac{1}{4}$，$b=-\frac{1}{4}$

(3) 等式の右辺を展開して整理すると

$$x^2+axy+bx-2y+2=x^2+2xy+(c-1)x-2y-c$$

両辺の各項の係数を比較して　$a=2$，$b=c-1$，$2=-c$

これを解いて　$a=2$，$b=-3$，$c=-2$

30 $x+y=1$ を満たす x，y に対して，常に $ax^2+by^2+cx=1$ が成り立つとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=-1$，$b=1$，$c=2$

解説

$x+y=1$ から　$y=1-x$

これを $ax^2+by^2+cx=1$ に代入して　$ax^2+b(1-x)^2+cx=1$

左辺を x について整理すると　$(a+b)x^2+(-2b+c)x+b=1$

これが x についての恒等式であるから　$a+b=0$，$-2b+c=0$，$b=1$

これを解いて　$a=-1$，$b=1$，$c=2$

31 等式 $(x+y)(2x+y+a)=bx^2+cxy+y^2-x-y$ が，x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

解答　$a=-1$，$b=2$，$c=3$

解説

等式の左辺を展開して整理すると

$$2x^2+3xy+y^2+ax+ay=bx^2+cxy+y^2-x-y$$

両辺の各項の係数を比較して　$2=b$，$3=c$，$a=-1$

すなわち　$a=-1$，$b=2$，$c=3$

32 x の整式 $x^4+x^3-x^2+ax+b$ (a，b は実数) が，ある 2 次式の 2 乗になるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=-\frac{5}{8}$，$b=\frac{25}{64}$

解説

$x^4+x^3-x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ とおく。

右辺を展開すると　$x^4+x^3-x^2+ax+b=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

これが x についての恒等式であるから，両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$2p=1,\ p^2+2q=-1,\ 2pq=a,\ q^2=b$$

これを解いて　$p=\frac{1}{2}$，$q=-\frac{5}{8}$，$a=-\frac{5}{8}$，$b=\frac{25}{64}$

33 $x+y+z=5$，$3x+y-z=-15$ を満たす任意の x，y，z に対して常に $ax^2+by^2+cz^2=5^2$ が成り立つとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=1$，$b=-\frac{1}{3}$，$c=\frac{1}{3}$

解説

$x+y+z=5$　…… ①

$3x+y-z=-15$　…… ②

① + ② から　$4x+2y=-10$　よって　$y=-2x-5$　…… ③

① − ② から　$-2x+2z=20$　よって　$z=x+10$　…… ④

③，④ を $ax^2+by^2+cz^2=5^2$ に代入すると　$ax^2+b(-2x-5)^2+c(x+10)^2=25$

x について整理すると　$(a+4b+c)x^2+20(b+c)x+25(b+4c-1)=0$

この等式はすべての x に対して成り立つから，x についての恒等式である。

よって　$a+4b+c=0$，$b+c=0$，$b+4c-1=0$

これを解いて　$a=1$，$b=-\frac{1}{3}$，$c=\frac{1}{3}$