二項定理クイズ

1 $(x-2y)^7$ の展開式における x^4y^3 の項の係数を求めよ。

解答　-280

解説

$(x-2y)^7$ の展開式の一般項は

$${}_7\mathrm{C}_r x^{7-r}(-2y)^r = {}_7\mathrm{C}_r(-2)^r x^{7-r}y^r$$

x^4y^3 の項は $r=3$ のときで，その係数は

$${}_7\mathrm{C}_3(-2)^3 = 35\times(-8) = -280$$

2 次の式の展開式における，[　]内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(2x+3)^6$ $[x^2]$　　(2)　$(3x-2y)^5$ $[x^2y^3]$

解答　(1)　4860　　(2)　-720

解説

(1)　$(2x+3)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}3^r = {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}3^r x^{6-r}$$

x^2 の項は $r=4$ のときで，その係数は

$${}_6\mathrm{C}_4 2^2\cdot 3^4 = 15\times 4\times 81 = 4860$$

(2)　$(3x-2y)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}(-2y)^r = {}_5\mathrm{C}_r 3^{5-r}(-2)^r x^{5-r}y^r$$

x^2y^3 の項は $r=3$ のときで，その係数は

$${}_5\mathrm{C}_3 3^2(-2)^3 = 10\times 9\times(-8) = -720$$

3 $(a+b+c)^7$ の展開式における $a^3b^2c^2$ の項の係数を求めよ。

解答　210

解説

$\{(a+b)+c\}^7$ の展開式において，c^2 を含む項は

$${}_7\mathrm{C}_2(a+b)^5c^2$$

また，$(a+b)^5$ の展開式において，a^3b^2 の項の係数は

$${}_5\mathrm{C}_2$$

よって，$a^3b^2c^2$ の項の係数は

$${}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2 = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\times\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 210$$

4 $(a+b+c)^7$ の展開式における次の項の係数を求めよ。

(1)　a^4bc^2　　(2)　a^3b^3c　　(3)　b^4c^3

解答　(1)　105　　(2)　140　　(3)　35

解説

(1)　$\{(a+b)+c\}^7$ の展開式において，c^2 を含む項は　${}_7\mathrm{C}_2(a+b)^5c^2$

また，$(a+b)^5$ の展開式において，a^4b の項の係数は　${}_5\mathrm{C}_1$

よって，a^4bc^2 の項の係数は　${}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1 = \dfrac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\times 5 = 105$

(2)　$\{(a+b)+c\}^7$ の展開式において，c を含む項は　${}_7\mathrm{C}_1(a+b)^6c$

また，$(a+b)^6$ の展開式において，a^3b^3 の項の係数は　${}_6\mathrm{C}_3$

よって，a^3b^3c の項の係数は　${}_7\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_3 = 7\times\dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 140$

(3)　$\{(a+b)+c\}^7$ の展開式において，c^3 を含む項は　${}_7\mathrm{C}_3(a+b)^4c^3$

また，$(a+b)^4$ の展開式における b^4 の項の係数は　${}_4\mathrm{C}_4$

よって，b^4c^3 の項の係数は　${}_7\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_4 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\times 1 = 35$

5 $(a+b+c)^{10}$ の展開式における $a^5b^2c^3$ の項の係数を求めよ。

解答　2520

解説

$$\frac{10!}{5!2!3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 1\times 3\cdot 2\cdot 1} = 2520$$

6 次の式の展開式における，[　]内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(2x^2-3)^6$ $[x^2]$　　(2)　$(x-3y-z)^5$ $[x^2yz^2]$

解答　(1)　-2916　　(2)　-90

解説

(1)　$(2x^2-3)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_r(2x^2)^{6-r}(-3)^r = {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-3)^r x^{12-2r}$$

であるから，$12-2r=2$ とすると

$$r=5$$

したがって，x^2 の項の係数は　${}_6\mathrm{C}_5\cdot 2(-3)^5 = -2916$

(2)　$\{(x-3y)-z\}^5$ の展開式において，z^2 を含む項は

$${}_5\mathrm{C}_2(x-3y)^3(-z)^2$$

また，$(x-3y)^3$ の展開式において，x^2y の項は

$${}_3\mathrm{C}_1 x^2(-3y)$$

したがって，x^2yz^2 の項の係数は

$${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1\times(-3)\times(-1)^2 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times 3\times(-3)\times 1 = -90$$

別解　$(x-3y-z)^5$ の展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}x^p(-3y)^q(-z)^r = \frac{5!(-3)^q(-1)^r}{p!q!r!}x^py^qz^r$$

（ただし，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$，$p+q+r=5$）

であるから，$p=2$，$q=1$，$r=2$ とすると x^2yz^2 の項の係数は

$$\frac{5!(-3)\cdot(-1)^2}{2!1!2!} = -90$$

7 次の問いに答えよ。[各 10 点]

(1)　$(a-2b)^5$ を展開せよ。

(2)　$(x+2)^7$ の展開式における x^3 の項の係数を求めよ。

(3)　$(2x-y)^6$ の展開式における x^2y^4 の項の係数を求めよ。

解答　(1)　係数をパスカルの三角形で求めると

$$a^5+5a^4(-2b)+10a^3(-2b)^2+10a^2(-2b)^3+5a(-2b)^4+(-2b)^5$$
$$=a^5-10a^4b+40a^3b^2-80a^2b^3+80ab^4-32b^5$$

(2)　展開式の一般項は　${}_7\mathrm{C}_r x^{7-r}\cdot 2^r = {}_7\mathrm{C}_r 2^r x^{7-r}$

x^3 の項は $r=4$ のときで，その係数は

$${}_7\mathrm{C}_4\,2^4 = {}_7\mathrm{C}_3\,2^4 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^4 = 560$$

(3)　展開式の一般項は　${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}(-y)^r = {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r x^{6-r}y^r$

x^2y^4 の項は $r=4$ のときで，その係数は

$${}_6\mathrm{C}_4 2^2(-1)^4 = {}_6\mathrm{C}_2 2^2 = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot 2^2 = 60$$

解説

(1)　係数をパスカルの三角形で求めると

$$a^5+5a^4(-2b)+10a^3(-2b)^2+10a^2(-2b)^3+5a(-2b)^4+(-2b)^5$$
$$=a^5-10a^4b+40a^3b^2-80a^2b^3+80ab^4-32b^5$$

(2)　展開式の一般項は　${}_7\mathrm{C}_r x^{7-r}\cdot 2^r = {}_7\mathrm{C}_r 2^r x^{7-r}$

x^3 の項は $r=4$ のときで，その係数は

$${}_7\mathrm{C}_4\,2^4 = {}_7\mathrm{C}_3\,2^4 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^4 = 560$$

(3)　展開式の一般項は　${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}(-y)^r = {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r x^{6-r}y^r$

x^2y^4 の項は $r=4$ のときで，その係数は

$${}_6\mathrm{C}_4 2^2(-1)^4 = {}_6\mathrm{C}_2 2^2 = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot 2^2 = 60$$

8 $(2x-y-1)^6$ の展開式における x^3y^2 の項の係数を求めよ。[15 点]

解答　$\{2x-(y+1)\}^6$ の展開式における x^3 を含む項は

$${}_6\mathrm{C}_3(2x)^3\{-(y+1)\}^3 = {}_6\mathrm{C}_3 2^3(-1)^3x^3(y+1)^3$$

また，$(y+1)^3$ の展開式において，y^2 の項の係数は ${}_3\mathrm{C}_1 1^1$

よって，x^3y^2 の項の係数は

$${}_6\mathrm{C}_3 2^3(-1)^3\times{}_3\mathrm{C}_1 1^1 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^3\cdot(-1)\times 3 = -480$$

解説

$\{2x-(y+1)\}^6$ の展開式における x^3 を含む項は

$${}_6\mathrm{C}_3(2x)^3\{-(y+1)\}^3 = {}_6\mathrm{C}_3 2^3(-1)^3x^3(y+1)^3$$

また，$(y+1)^3$ の展開式において，y^2 の項の係数は ${}_3\mathrm{C}_1 1^1$

よって，x^3y^2 の項の係数は

$${}_6\mathrm{C}_3 2^3(-1)^3\times{}_3\mathrm{C}_1 1^1 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^3\cdot(-1)\times 3 = -480$$

9 $(a+b+c)^7$ の展開式における $a^2b^3c^2$ の項の係数を求めよ。

解答　210

解説

求める係数は　$\dfrac{7!}{2!3!2!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 1\times 2\cdot 1} = 210$

10 次の展開式における，[　]内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(a-3b)^5$　$[a^3b^2]$　　(2)　$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$　$[x^6$，定数項$]$

解答　(1)　90　　(2)　順に 60，240

解説

(1)　$(a-3b)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5\mathrm{C}_r a^{5-r}(-3b)^r = {}_5\mathrm{C}_r(-3)^r a^{5-r}b^r$$

a^3b^2 の項は $r=2$ のときで，その係数は

$${}_5\mathrm{C}_2(-3)^2 = 10\cdot 9 = 90$$

(2)　$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r = {}_6\mathrm{C}_r x^{12-2r}\cdot\frac{(-2)^r}{x^r}$$

$$=_6\mathrm{C}_r(-2)^r\cdot\frac{x^{12-2r}}{x^r}$$
$$=_6\mathrm{C}_r(-2)^r\cdot x^{12-2r-r}$$
$$=_6\mathrm{C}_r(-2)^r\cdot x^{12-3r} \quad \cdots\cdots ①$$

x^6 の項は，$12-3r=6$ より $r=2$ のときである。

その係数は，① から　${}_6\mathrm{C}_2(-2)^2=15\cdot4=60$

定数項は，$12-3r=0$ より $r=4$ のときである。

したがって，① から　${}_6\mathrm{C}_4(-2)^4=15\cdot16=240$

$\boxed{11}$ 次の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(a^2-3)^5$　$[a^6]$　　　(2)　$\left(2x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^6$　　$[x^3$，定数項$]$

解答　(1)　90　　(2)　x^3 の係数 -20，定数項 $\dfrac{15}{4}$

解説

(1)　$(a^2-3)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5\mathrm{C}_r(a^2)^{5-r}(-3)^r={}_5\mathrm{C}_r(-3)^r a^{2(5-r)}$$

$2(5-r)=6$ とすると　$5-r=3$　　よって　$r=2$

したがって，a^6 の項の係数は

$${}_5\mathrm{C}_2(-3)^2=10\cdot9=90$$

(2)　$\left(2x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_r(2x^2)^{6-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\cdot2^{6-r}(x^2)^{6-r}(-1)^r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$={}_6\mathrm{C}_r\cdot(-1)^r\cdot\frac{2^{6-r}}{2^r}\cdot\frac{x^{12-2r}}{x^r}$$
$$={}_6\mathrm{C}_r\cdot(-1)^r\cdot2^{6-r-r}\cdot x^{12-2r-r}$$
$$={}_6\mathrm{C}_r\cdot(-1)^r\cdot2^{6-2r}\cdot x^{12-3r} \quad \cdots\cdots ①$$

x^3 の項は，$12-3r=3$ より $r=3$ のときである。

その係数は，① から　${}_6\mathrm{C}_3\cdot(-1)^3\cdot2^0=20\cdot(-1)\cdot1=-20$

定数項は，$12-3r=0$ より $r=4$ のときである。

したがって，① から　${}_6\mathrm{C}_4\cdot(-1)^4\cdot2^{6-8}=15\cdot1\cdot\dfrac{2^6}{2^8}=\dfrac{15}{4}$

$\boxed{12}$ 次の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(2x-y-3z)^6$　$[xy^3z^2]$　　　(2)　$(1+x+x^2)^8$　$[x^4]$

解答　(1)　-1080　　(2)　266

解説

(1)　展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!}\cdot(2x)^p\cdot(-y)^q\cdot(-3z)^r$$

ただし　$p+q+r=6$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

xy^3z^2 の項は，$p=1$，$q=3$，$r=2$ のときで，その係数は

$$\frac{6!}{1!3!2!}\cdot2\cdot(-1)^3\cdot(-3)^2=-\frac{6\cdot5\cdot4}{2}\cdot2\cdot9=-1080$$

別解　$\{(2x-y)-3z\}^6$ の展開式において，z^2 を含む項は

$${}_6\mathrm{C}_2(2x-y)^4(-3z)^2=135(2x-y)^4z^2$$

$(2x-y)^4$ の展開式において，xy^3 を含む項は

$${}_4\mathrm{C}_3(2x)(-y)^3=-8xy^3$$

よって，xy^3z^2 の項の係数は

$$135\times(-8)=-1080$$

(2)　展開式の一般項は

$$\frac{8!}{p!q!r!}\cdot1^p\cdot x^q\cdot(x^2)^r=\frac{8!}{p!q!r!}\cdot x^{q+2r}$$

ただし　$p+q+r=8$　$\cdots\cdots$ ①，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^4 の項は，$q+2r=4$　すなわち　$q=4-2r$　$\cdots\cdots$ ②

のときであり，①，② から　　$p=r+4$　$\cdots\cdots$ ③

ここで，② と $q\geqq0$ から　　$4-2r\geqq0$

r は 0 以上の整数であるから　　$r=0$，1，2

これと ②，③ から

$$(p,\ q,\ r)=(4,\ 4,\ 0),\ (5,\ 2,\ 1),\ (6,\ 0,\ 2)$$

よって，求める係数は

$$\frac{8!}{4!4!0!}+\frac{8!}{5!2!1!}+\frac{8!}{6!0!2!}=70+168+28=266$$

$\boxed{13}$ 次の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x-2y+z)^8$　　$[x^2y^3z^3]$　　　(2)　$(x^2-2x+3)^5$　　$[x^3]$

解答　(1)　-4480　　(2)　-1800

解説

(1)　展開式の一般項は　$\dfrac{8!}{p!q!r!}x^p\cdot(-2y)^q\cdot z^r$

ただし　$p+q+r=8$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

$x^2y^3z^3$ の項は $p=2$，$q=3$，$r=3$ のときで，その係数は

$$\frac{8!}{2!3!3!}\cdot(-2)^3=560\cdot(-8)=-4480$$

(2)　展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}(x^2)^p\cdot(-2x)^q\cdot3^r=\frac{5!}{p!q!r!}\cdot(-2)^q\cdot3^rx^{2p+q}$$

ただし　$p+q+r=5$　$\cdots\cdots$ ①，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^3 の項は $2p+q=3$ のときである。

$2p+q=3$ から　　$q=3-2p$　$\cdots\cdots$ ②

①，② から　　$r=p+2$　$\cdots\cdots$ ③

ここで，② と $q\geqq0$ から　　$3-2p\geqq0$

p は 0 以上の整数であるから　　$p=0$，1

② から　　$p=0$ のとき　$q=3$，　$p=1$ のとき　$q=1$

ゆえに，③ から　　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 2)$，$(1,\ 1,\ 3)$

したがって，求める係数は

$$\frac{5!}{0!3!2!}\cdot(-2)^3\cdot3^2+\frac{5!}{1!1!3!}\cdot(-2)^1\cdot3^3=-720-1080=-1800$$

$\boxed{14}$ $\left(x+\dfrac{1}{x^2}+1\right)^5$ の展開式における定数項を求めよ。

解答　31

解説

展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}x^p\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^q\cdot1^r=\frac{5!}{p!q!r!}x^p\cdot\frac{1}{x^{2q}}\cdot1=\frac{5!}{p!q!r!}x^{p-2q}$$

ただし　$p+q+r=5$ $\cdots\cdots$ ①，　$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

定数項は，$p-2q=0$ のときである。

$p-2q=0$ から　　$p=2q$　$\cdots\cdots$ ②

これを ① に代入して　　$3q+r=5$　　　ゆえに　　$r=5-3q$　$\cdots\cdots$ ③

$r\geqq0$ であるから　　$5-3q\geqq0$

q は 0 以上の整数であるから　　$q=0$，1

③ から　　$q=0$ のとき　$r=5$，　$q=1$ のとき　$r=2$

よって，② から　　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 5)$，$(2,\ 1,\ 2)$

したがって，定数項は　　$\dfrac{5!}{0!0!5!}+\dfrac{5!}{2!1!2!}=1+30=31$

$\boxed{15}$ $\left(x^2-x^3-\dfrac{3}{x}\right)^5$ の展開式における x^7 の項の係数を求めよ。

解答　-105

解説

$\left(x^2-x^3-\dfrac{3}{x}\right)^5$ の展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}(x^2)^p(-x^3)^q\left(-\frac{3}{x}\right)^r=\frac{5!}{p!q!r!}\cdot(-1)^{q+r}\cdot3^rx^{2p+3q-r}$$

ただし　$p+q+r=5$ $\cdots\cdots$ ①，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^7 の項は，$2p+3q-r=7$ $\cdots\cdots$ ② のときである。

①+② から　　$3p+4q=12$ $\cdots\cdots$ ③

$3p=12-4q$ と $p\geqq0$ から　　$12-4q\geqq0$

q は 0 以上の整数であるから　　$q=0$，1，2，3

③ から　　$q=0$ のとき　$3p=12$，　$q=1$ のとき　$3p=8$

　　　　　$q=2$ のとき　$3p=4$，　$q=3$ のとき　$3p=0$

p は 0 以上の整数であるから　　$(p,\ q)=(0,\ 3)$，$(4,\ 0)$

よって，① から　　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 2)$，$(4,\ 0,\ 1)$

したがって，求める係数は

$$\frac{5!}{0!3!2!}\cdot(-1)^5\cdot3^2+\frac{5!}{4!0!1!}\cdot(-1)\cdot3=-90-15=-105$$

$\boxed{16}$ $(x^3+1)^4$ の展開式における x^9 の係数は ${}^{ア}\boxed{\quad}$ で，x^6 の係数は ${}^{イ}\boxed{\quad}$ であり，

$(x^3+x-1)^3$ の展開式における x^5 の係数は ${}^{ウ}\boxed{\quad}$ で，x^2 の係数は ${}^{エ}\boxed{\quad}$ である。

また，$(x^3+1)^4(x^3+x-1)^3$ の展開式における x^{11} の係数は ${}^{オ}\boxed{\quad}$ である。

解答　(ア)　4　　(イ)　6　　(ウ)　3　　(エ)　-3　　(オ)　6

解説

$(x^3+1)^4$ の展開式の一般項は　　${}_4\mathrm{C}_r(x^3)^{4-r}\cdot1^r={}_4\mathrm{C}_rx^{12-3r}$

(ア)　x^9 の項は，$12-3r=9$ より $r=1$ のときで，その係数は　　${}_4\mathrm{C}_1=4$

(イ)　x^6 の項は，$12-3r=6$ より $r=2$ のときで，その係数は　　${}_4\mathrm{C}_2=6$

(ウ)　$(x^3+x-1)^3$ の展開式の一般項は

$$\frac{3!}{p!q!r!}x^{3p}x^q\cdot(-1)^r=\frac{3!}{p!q!r!}(-1)^rx^{3p+q}$$

ただし　$p+q+r=3$　$\cdots\cdots$ ①，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^5 の項は，$3p+q=5$　すなわち　$q=5-3p$　$\cdots\cdots$ ② のときである。

①，② から　　$r=2p-2$　$\cdots\cdots$ ③

$q\geqq0$，$r\geqq0$ であるから　　$5-3p\geqq0$，$2p-2\geqq0$

この 2 つの不等式を同時に満たす 0 以上の整数 p は　　$p=1$

②，③ から　　$p=1$ のとき　$q=2$，$r=0$

よって，x^5 の係数は　　$\dfrac{3!}{1!2!0!}(-1)^0=3$

(エ)　x^2 の項は，$3p+q=2$　すなわち　$q=2-3p$　$\cdots\cdots$ ④ のときである。

①，④ から　　$r=2p+1$　$\cdots\cdots$ ⑤

$q\geqq0$，$r\geqq0$ であるから　　$2-3p\geqq0$，$2p+1\geqq0$

この 2 つの不等式を同時に満たす 0 以上の整数 p は　　$p=0$

④，⑤ から　　$p=0$ のとき　$q=2,\ r=1$

よって，x^2 の係数は　　$\dfrac{3!}{0!2!1!}(-1)^1=-3$

（オ）$(x^3+1)^4$ の展開式は，x^{12}，x^9，x^6，x^3 の項と定数項からなる。

このことと $(x^3+x-1)^3$ の展開式の項を考えると，x^{11} の項は，$x^{11}=x^9\cdot x^2$，$x^{11}=x^6\cdot x^5$ の場合がある。

よって，(ア)～(エ)から，x^{11} の係数は　　$4\cdot(-3)+6\cdot3=6$

17 $(a-2b)^6$ の展開式で，a^5b の項の係数は ア$\boxed{}$，a^2b^4 の項の係数は イ$\boxed{}$ である。

また，$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式で，x^6 の項の係数は ウ$\boxed{}$，定数項は エ$\boxed{}$ である。

解答　(ア)　-12　　(イ)　240　　(ウ)　60　　(エ)　240

解説

$(a-2b)^6$ の展開式の一般項は　　${}_6C_r a^{6-r}(-2b)^r={}_6C_r(-2)^r a^{6-r}b^r$

a^5b の項は $r=1$ のときで，その係数は　　${}_6C_1(-2)=$ア-12

a^2b^4 の項は $r=4$ のときで，その係数は　　${}_6C_4(-2)^4=$イ240

また，$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r(-2)^r\cdot\frac{x^{12-2r}}{x^r}={}_6C_r(-2)^r\cdot x^{12-2r-r}$$
$$={}_6C_r(-2)^r\cdot x^{12-3r}\quad\cdots\cdots\ ①$$

x^6 の項は，$12-3r=6$ より $r=2$ のときである。

その係数は，① から　　${}_6C_2(-2)^2=$ウ60

定数項は，$12-3r=0$ より $r=4$ のときである。

したがって，① から　　${}_6C_4(-2)^4=$エ240

18 次の式の展開式における，[　] 内に指定されたものを求めよ。

(1)　$(x+2)^7$　　[x^4 の係数]　　　(2)　$(x^2-1)^7$　　[x^4，x^3 の係数]

(3)　$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$　[x^{11} の係数]　　　(4)　$\left(2x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$　[定数項]

解答　(1)　280　　(2)　x^4 の項の係数は -21，x^3 の項の係数は 0　　(3)　120　　(4)　180

解説

(1)　$(x+2)^7$ の展開式の一般項は　　${}_7C_r x^{7-r}2^r={}_7C_r\cdot2^r x^{7-r}$

x^4 の項は，$7-r=4$ より $r=3$ のときである。

ゆえに，求める係数は　　${}_7C_3\cdot2^3=35\times8=280$

(2)　$(x^2-1)^7$ の展開式の一般項は　　${}_7C_r(x^2)^{7-r}\cdot(-1)^r=(-1)^r{}_7C_r x^{14-2r}$

x^4 の項は，$14-2r=4$ より $r=5$ のときである。

ゆえに，x^4 の項の係数は　　$(-1)^5{}_7C_5=-21$

x^3 の項は，$14-2r=3$ のときであるが，この等式を満たす 0 以上の整数 r は存在しない。

よって，x^3 の項の係数は　　0

(3)　$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式の一般項は　　${}_{10}C_r(x^2)^{10-r}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_{10}C_r\cdot\dfrac{x^{20-2r}}{x^r}={}_{10}C_r x^{20-3r}$

x^{11} の項は，$20-3r=11$ より $r=3$ のときである。

よって，求める係数は　　${}_{10}C_3=120$

(4)　$\left(2x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式の一般項は

$${}_{10}C_r(2x^4)^{10-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r{}_{10}C_r\cdot2^{10-r}\cdot\frac{x^{40-4r}}{x^r}=(-1)^r{}_{10}C_r\cdot2^{10-r}\cdot x^{40-5r}$$

定数項は，$40-5r=0$ より $r=8$ のときである。

よって　　$(-1)^8{}_{10}C_8\cdot2^{10-8}={}_{10}C_2\cdot2^2=180$

19 次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x+2y+3z)^4$　　[x^2yz]　　　(2)　$(1+x+x^2)^8$　[x^4]

解答　(1)　72　　(2)　266

解説

(1)　$(x+2y+3z)^4$ の展開式の一般項は

$$\frac{4!}{p!q!r!}x^p(2y)^q(3z)^r=\left(\frac{4!}{p!q!r!}\cdot2^q\cdot3^r\right)x^py^qz^r$$

ただし　$p+q+r=4$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^2yz の項は，$p=2$，$q=1$，$r=1$ のときであるから　　$\dfrac{4!}{2!1!1!}\cdot2\cdot3=72$

別解　$\{(x+2y)+3z\}^4$ の展開式において，z を含む項は

$${}_4C_1(x+2y)^3\cdot3z=12(x+2y)^3z$$

また，$(x+2y)^3$ の展開式において，x^2y を含む項は

$${}_3C_1x^2\cdot2y=6x^2y$$

よって，x^2yz の項の係数は　　$12\times6=72$

(2)　$(1+x+x^2)^8$ の展開式の一般項は

$$\frac{8!}{p!q!r!}\cdot1^p\cdot x^q\cdot(x^2)^r=\frac{8!}{p!q!r!}\cdot x^{q+2r}$$

ただし　$p+q+r=8$　……①，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^4 の項は，　$q+2r=4$　すなわち　$q=4-2r$　……②

のときであり，①，② から　　$p=r+4$　……③

ここで，② と $q\geqq0$ から　　$4-2r\geqq0$

r は 0 以上の整数であるから　　$r=0,\ 1,\ 2$

②，③ から　　$r=0$ のとき　　$p=4$，$q=4$

　　　　　　　$r=1$ のとき　　$p=5$，$q=2$

　　　　　　　$r=2$ のとき　　$p=6$，$q=0$

よって，求める係数は　　$\dfrac{8!}{4!4!0!}+\dfrac{8!}{5!2!1!}+\dfrac{8!}{6!0!2!}=70+168+28=266$

別解　$(1+x+x^2)^8=\{(1+x)+x^2\}^8=(1+x)^8+{}_8C_1(1+x)^7x^2+{}_8C_2(1+x)^6(x^2)^2+\cdots\cdots$

この展開式の中で，x^4 を含む項は　　${}_8C_4x^4$，${}_8C_1\cdot{}_7C_2x^2\cdot x^2$，${}_8C_2\cdot1\cdot x^4$

よって，求める係数は　　${}_8C_4+{}_8C_1\cdot{}_7C_2+{}_8C_2=70+8\cdot21+28=266$

20 次の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(1+2a-3b)^7$　　[a^2b^3]　　　(2)　$(x^2-3x+1)^{10}$　　[x^3]

解答　(1)　-22680　　(2)　-3510

解説

(1)　$(1+2a-3b)^7$ の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{p!q!r!}\cdot1^p\cdot(2a)^q\cdot(-3b)^r=\left\{\frac{7!}{p!q!r!}\cdot2^q\cdot(-3)^r\right\}a^qb^r$$

ただし　$p+q+r=7$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

a^2b^3 の項は，$q=2$，$r=3$，$p=2$ のときである。

よって，求める係数は　　$\dfrac{7!}{2!2!3!}\cdot2^2\cdot(-3)^3=-22680$

(2)　$(x^2-3x+1)^{10}$ の展開式の一般項は

$$\frac{10!}{p!q!r!}\cdot(x^2)^p\cdot(-3x)^q\cdot1^r=\frac{10!}{p!q!r!}\cdot(-3)^qx^{2p+q}$$

ただし　$p+q+r=10$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^3 の項は，$2p+q=3$ のときである。

$q=3-2p$ と $q\geqq0$ から　　$3-2p\geqq0$

p は 0 以上の整数であるから　　$p=0,\ 1$

したがって，$2p+q=3$ と $p+q+r=10$ を満たす 0 以上の整数 p，q，r の組は

$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 7)$，$(1,\ 1,\ 8)$

よって，求める係数は

$$\frac{10!}{0!3!7!}\cdot(-3)^3+\frac{10!}{1!1!8!}\cdot(-3)=-3240-270=-3510$$

21 (1)　$(x^3+1)^{10}$ の展開式における x^{15} の係数を求めよ。

(2)　$(x-1)^{10}(x^2+x+1)^{10}$ の展開式における x^{15} の係数を求めよ。

(3)　$(x^2+2\sqrt{2}x+3)^5$ を展開したとき，x^6 の係数を求めよ。

解答　(1)　252　　(2)　-252　　(3)　1130

解説

(1)　$(x^3+1)^{10}$ の展開式の一般項は　　${}_{10}C_r(x^3)^{10-r}\cdot1^r={}_{10}C_rx^{30-3r}$

x^{15} の項は $30-3r=15$ から $r=5$ のときで，その係数は　　${}_{10}C_5=252$

(2)　$(x-1)^{10}(x^2+x+1)^{10}=\{(x-1)(x^2+x+1)\}^{10}=(x^3-1)^{10}$

よって，$(x-1)^{10}(x^2+x+1)^{10}$ の展開式の一般項は

$${}_{10}C_r(x^3)^{10-r}\cdot(-1)^r={}_{10}C_r(-1)^rx^{30-3r}$$

x^{15} は $30-3r=15$ から $r=5$ のときで，その係数は　　${}_{10}C_5(-1)^5=-252$

(3)　$(x^2+2\sqrt{2}x+3)^5$ の展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}(x^2)^p(2\sqrt{2}x)^q3^r=\frac{5!}{p!q!r!}\cdot(2\sqrt{2})^q3^rx^{2p+q}$$

ただし　$p+q+r=5$ ……①，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^6 の項は，$2p+q=6$ すなわち $q=6-2p$ ……② のときである。

①，② から　　$r=p-1$　……③

②，③ と $q\geqq0$，$r\geqq0$ から　　$6-2p\geqq0$，$p-1\geqq0$

よって　　$1\leqq p\leqq3$　すなわち　$p=1,\ 2,\ 3$

②，③ から　　$(p,\ q,\ r)=(1,\ 4,\ 0)$，$(2,\ 2,\ 1)$，$(3,\ 0,\ 2)$

よって，x^6 の係数は

$$\frac{5!}{1!4!0!}\cdot(2\sqrt{2})^43^0+\frac{5!}{2!2!1!}\cdot(2\sqrt{2})^23^1+\frac{5!}{3!0!2!}\cdot(2\sqrt{2})^03^2=320+720+90=1130$$

22 次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(3x+1)^5$　　[x^4]　　　(2)　$(3x-2)^5$　　[x^3]

(3)　$(2-x)^{10}$　　[x^7]　　　(4)　$(2x-3y)^7$　　[x^5y^2]

解答　(1)　405　　(2)　1080　　(3)　-960　　(4)　6048

解説

(1)　$(3x+1)^5$ の展開式の一般項は　　${}_5C_r(3x)^{5-r}\cdot1^r={}_5C_r\cdot3^{5-r}x^{5-r}$

x^4 の項は $r=1$ のときで，その係数は　　${}_5C_1\cdot3^4=5\cdot81=405$

(2)　$(3x-2)^5$ の展開式の一般項は　　${}_5C_r(3x)^{5-r}(-2)^r={}_5C_r\cdot3^{5-r}(-2)^rx^{5-r}$

x^3 の項は $r=2$ のときで，その係数は　　${}_5C_2\cdot3^3(-2)^2=10\cdot27\cdot4=1080$

(3)　$(2-x)^{10}$ の展開式の一般項は　　${}_{10}C_r\cdot2^{10-r}(-x)^r={}_{10}C_r\cdot2^{10-r}(-1)^rx^r$

x^7 の項は $r=7$ のときで，その係数は　　${}_{10}C_7\cdot2^3(-1)^7=120\cdot8\cdot(-1)=-960$

(4)　$(2x-3y)^7$ の展開式の一般項は　　${}_7C_r(2x)^{7-r}(-3y)^r={}_7C_r\cdot2^{7-r}(-3)^rx^{7-r}y^r$

x^5y^2 の項は $r=2$ のときで，その係数は　　${}_7C_2\cdot2^5(-3)^2=21\cdot32\cdot9=6048$

$\boxed{23}$ 次の式の展開式における，[ ]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(2x^2-1)^6$ $[x^6]$　　(2) $(2x^3-3x)^5$ $[x^9]$

解答 (1) -160　(2) -1080

解説

(1) $(2x^2-1)^6$ の展開式の一般項は　${}_6\mathrm{C}_r(2x^2)^{6-r}(-1)^r={}_6\mathrm{C}_r\cdot 2^{6-r}(-1)^r x^{12-2r}$

x^6 の項は $r=3$ のときで，その係数は　${}_6\mathrm{C}_3\cdot 2^3(-1)^3=20\cdot 8\cdot(-1)=-160$

(2) $(2x^3-3x)^5$ の展開式の一般項は　${}_5\mathrm{C}_r(2x^3)^{5-r}(-3x)^r={}_5\mathrm{C}_r\cdot 2^{5-r}(-3)^r x^{15-2r}$

x^9 の項は $r=3$ のときで，その係数は　${}_5\mathrm{C}_3\cdot 2^2(-3)^3=10\cdot 4\cdot(-27)=-1080$

$\boxed{24}$ 次の式の展開式における，[ ]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(a+b+c)^6$ $[ab^2c^3]$　　(2) $(x+y-3z)^8$ $[x^5yz^2]$

解答 (1) 60　(2) 1512

解説

(1) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において，c^3 を含む項は　${}_6\mathrm{C}_3(a+b)^3c^3$

また，$(a+b)^3$ の展開式において，ab^2 の項の係数は　${}_3\mathrm{C}_2$

よって，ab^2c^3 の項の係数は　${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2=20\cdot 3=60$

(2) $\{(x+y)-3z\}^8$ の展開式において，z^2 を含む項は

${}_8\mathrm{C}_2(x+y)^6(-3z)^2=9\cdot{}_8\mathrm{C}_2(x+y)^6z^2$

また，$(x+y)^6$ の展開式において，x^5y の項の係数は　${}_6\mathrm{C}_1$

よって，x^5yz^2 の項の係数は　$9\cdot{}_8\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1=9\cdot 28\cdot 6=1512$

$\boxed{25}$ 次の式の展開式における，[ ]内のものを求めよ。

(1) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$ [x^2 の項の係数]　　(2) $\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ [定数項]

解答 (1) 35　(2) $-\dfrac{40}{27}$

解説

(1) 展開式の一般項は　${}_7\mathrm{C}_r(x^2)^{7-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_7\mathrm{C}_r\dfrac{x^{14-2r}}{x^r}$

$\dfrac{x^{14-2r}}{x^r}=x^2$ とすると　$x^{14-2r}=x^2x^r$

よって　$x^{14-2r}=x^{2+r}$

両辺の x の指数を比較して　$14-2r=2+r$

ゆえに　$r=4$

したがって，x^2 の項の係数は　${}_7\mathrm{C}_4=35$

(2) 展開式の一般項は　${}_5\mathrm{C}_r(2x^3)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{3x^2}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r\cdot 2^{5-r}(x^3)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^r\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^r$

$={}_5\mathrm{C}_r\cdot 2^{5-r}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^r\dfrac{x^{15-3r}}{x^{2r}}$

これが定数項のとき　$\dfrac{x^{15-3r}}{x^{2r}}=1$

よって　$x^{15-3r}=x^{2r}$

両辺の x の指数を比較して　$15-3r=2r$

ゆえに　$r=3$

したがって，定数項は　${}_5\mathrm{C}_3\cdot 2^2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3=10\cdot 4\cdot\left(-\dfrac{1}{27}\right)=-\dfrac{40}{27}$

$\boxed{26}$ 次の式の展開式における，[ ]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(x+y+z)^6$ $[x^2yz^3]$　　(2) $(x+2y+3z)^6$ $[x^3y^2z]$

(3) $(2x-3y+z)^7$ $[x^2y^2z^3]$　　(4) $(x+y-3z)^8$ $[x^5z^3]$

解答 (1) 60　(2) 720　(3) 7560　(4) -1512

解説

(1) x^2yz^3 の項の係数は　$\dfrac{6!}{2!1!3!}=60$

(2) x^3y^2z の項は　$\dfrac{6!}{3!2!1!}x^3(2y)^2(3z)^1$

よって，その係数は　$\dfrac{6!}{3!2!1!}\cdot 2^2\cdot 3^1=720$

(3) $x^2y^2z^3$ の項は　$\dfrac{7!}{2!2!3!}(2x)^2(-3y)^2\cdot z^3$

よって，その係数は　$\dfrac{7!}{2!2!3!}\cdot 2^2\cdot(-3)^2=7560$

(4) x^5z^3 の項は　$\dfrac{8!}{5!0!3!}x^5y^0(-3z)^3$

よって，その係数は　$\dfrac{8!}{5!0!3!}(-3)^3=-1512$

$\boxed{27}$ 次の式の展開式における，[ ]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(x^2-x+2)^4$ $[x^5]$　　(2) $(1+2x-x^2)^{10}$ $[x^3]$

解答 (1) -28　(2) 780

解説

(1) 展開式の一般項は　$\dfrac{4!}{p!q!r!}(x^2)^p(-x)^q\cdot 2^r=\dfrac{4!}{p!q!r!}(-1)^q\cdot 2^rx^{2p+q}$

ただし　$p+q+r=4$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$

x^5 の項は $2p+q=5$ のときで，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$ であるから　$p=0,\ 1,\ 2$

よって，$2p+q=5$ と $p+q+r=4$ を満たす負でない整数 p，q，r の組は

$(p,\ q,\ r)=(1,\ 3,\ 0),\ (2,\ 1,\ 1)$

したがって，求める係数は　$\dfrac{4!}{1!3!0!}(-1)^3\cdot 2^0+\dfrac{4!}{2!1!1!}(-1)^1\cdot 2^1=-28$

(2) 展開式の一般項は　$\dfrac{10!}{p!q!r!}\cdot 1^p(2x)^q(-x^2)^r=\dfrac{10!}{p!q!r!}\cdot 2^q(-1)^rx^{q+2r}$

ただし　$p+q+r=10$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$

x^3 の項は $q+2r=3$ のときで，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$ であるから　$r=0,\ 1$

よって，$q+2r=3$ と $p+q+r=10$ を満たす負でない整数 p，q，r の組は

$(p,\ q,\ r)=(7,\ 3,\ 0),\ (8,\ 1,\ 1)$

したがって，求める係数は　$\dfrac{10!}{7!3!0!}\cdot 2^3(-1)^0+\dfrac{10!}{8!1!1!}\cdot 2^1(-1)^1=780$

$\boxed{28}$ $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における x^3 の項の係数を求めよ。

解答 -160

解説

展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_r(2x^2)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\cdot 2^{6-r}(x^2)^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\cdot 2^{6-r}(-1)^r\frac{x^{12-2r}}{x^r}$$

$\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}=x^3$ とすると　$x^{12-2r}=x^3x^r$　　よって　$x^{12-2r}=x^{3+r}$

両辺の x の指数を比較して　$12-2r=3+r$　　ゆえに　$r=3$

したがって，x^3 の項の係数は　${}_6\mathrm{C}_3\cdot 2^{6-3}(-1)^3=20\cdot 8\cdot(-1)=-160$

$\boxed{29}$ $(x+y-2z)^7$ の展開式における $x^3y^2z^2$ の項の係数を求めよ。

解答 840

解説

$x^3y^2z^2$ の項は　$\dfrac{7!}{3!2!2!}x^3y^2(-2z)^2$

よって，その係数は　$\dfrac{7!}{3!2!2!}\cdot(-2)^2=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 2}\cdot 4=840$

$\boxed{30}$ (1) $(x-1)^5(x^2+x+1)^5$ の展開式における x^9 の項の係数を求めよ。

(2) $(x^2+2x+c)^6$ の展開式における x^7 の項の係数が -288 であるとき，定数 c の値を求めよ。

解答 (1) 10　(2) $c=-2$

解説

(1) $(x-1)^5(x^2+x+1)^5=\{(x-1)(x^2+x+1)\}^5=(x^3-1)^5$

よって，$(x-1)^5(x^2+x+1)^5$ の展開式の一般項は

${}_5\mathrm{C}_r(x^3)^{5-r}\cdot(-1)^r={}_5\mathrm{C}_r(-1)^rx^{15-3r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5)$

x^9 は $r=2$ のときであるから，その係数は　${}_5\mathrm{C}_2(-1)^2=10$

(2) $(x^2+2x+c)^6$ の展開式の一般項は　$\dfrac{6!}{p!q!r!}(x^2)^p(2x)^qc^r=\dfrac{6!}{p!q!r!}\cdot 2^qc^rx^{2p+q}$

ただし　$p+q+r=6$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$　……①

x^7 の項は $2p+q=7$ のときである。

これと ① を満たす整数 p，q，r の組は

$(p,\ q,\ r)=(1,\ 5,\ 0),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2)$

よって，x^7 の項の係数は

$\dfrac{6!}{1!5!0!}\cdot 2^5c^0+\dfrac{6!}{2!3!1!}\cdot 2^3c^1+\dfrac{6!}{3!1!2!}\cdot 2^1c^2$

$=6\cdot 32\cdot 1+60\cdot 8\cdot c+60\cdot 2\cdot c^2$

$=192+480c+120c^2$

これが -288 であるから　$192+480c+120c^2=-288$

整理すると　$c^2+4c+4=0$

左辺を因数分解すると　$(c+2)^2=0$

これを解いて　$c=-2$

$\boxed{31}$ $(x^2+2x-1)^6$ の展開式における x^4 の項の係数を求めよ。

解答 15

解説

展開式の一般項は　$\dfrac{6!}{p!q!r!}(x^2)^p(2x)^q(-1)^r=\dfrac{6!}{p!q!r!}\cdot 2^q(-1)^rx^{2p+q}$

ただし　$p+q+r=6$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$

x^4 の項は $2p+q=4$ のときで，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$ であるから　$p=0,\ 1,\ 2$

よって，$2p+q=4$ と $p+q+r=6$ を満たす負でない整数 p，q，r の組は

$(p,\ q,\ r)=(0,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 0,\ 4)$

したがって，求める係数は

$$\frac{6!}{0!4!2!}\cdot 2^4(-1)^2+\frac{6!}{1!2!3!}\cdot 2^2(-1)^3+\frac{6!}{2!0!4!}\cdot 2^0(-1)^4=15$$