等式を満たす整数クイズ

$\boxed{1}$ 次の等式を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

(1) $xy-5x-y=0$　　(2) $xy+3x-4y-18=0$

(3) $xy+8x+4y=-40$　　(4) $2xy-2x-5y=7$

解答 (1) $(x,\ y)=(2,\ 10),\ (6,\ 6),\ (0,\ 0),\ (-4,\ 4)$

(2) $(x,\ y)=(5,\ 3),\ (10,\ -2),\ (6,\ 0),\ (7,\ -1),\ (3,\ -9),\ (-2,\ -4),\ (2,\ -6),\ (1,\ -5)$

(3) $(x,\ y)=(-3,\ -16),\ (-12,\ -7),\ (-2,\ -12),\ (-8,\ -6),\ (-5,\ 0),\ (4,\ -9),\ (-6,\ -4),\ (0,\ -10)$

(4) $(x,\ y)=(3,\ 13),\ (4,\ 5),\ (2,\ -11),\ (1,\ -3)$

解説

(1) $xy-5x-y=x(y-5)-(y-5)-5=(x-1)(y-5)-5$

よって，等式は　$(x-1)(y-5)-5=0$

すなわち　$(x-1)(y-5)=5$

x, y は整数であるから，$x-1$, $y-5$ も整数である。

よって　$(x-1,\ y-5)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 10),\ (6,\ 6),\ (0,\ 0),\ (-4,\ 4)$

(2) $xy+3x-4y=x(y+3)-4(y+3)+12=(x-4)(y+3)+12$

よって，等式は　$(x-4)(y+3)+12-18=0$

すなわち　$(x-4)(y+3)=6$

x, y は整数であるから，$x-4$, $y+3$ も整数である。

よって　$(x-4,\ y+3)=(1,\ 6),\ (6,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (-1,\ -6),\ (-6,\ -1),\ (-2,\ -3),\ (-3,\ -2)$

ゆえに　$(x,\ y)=(5,\ 3),\ (10,\ -2),\ (6,\ 0),\ (7,\ -1),\ (3,\ -9),\ (-2,\ -4),\ (2,\ -6),\ (1,\ -5)$

(3) $xy+8x+4y=x(y+8)+4(y+8)-32=(x+4)(y+8)-32$

よって，等式は　$(x+4)(y+8)-32=-40$

すなわち　$(x+4)(y+8)=-8$

x, y は整数であるから，$x+4$, $y+8$ も整数である。

よって　$(x+4,\ y+8)=(1,\ -8),\ (-8,\ 1),\ (2,\ -4),\ (-4,\ 2),\ (-1,\ 8),\ (8,\ -1),\ (-2,\ 4),\ (4,\ -2)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-3,\ -16),\ (-12,\ -7),\ (-2,\ -12),\ (-8,\ -6),\ (-5,\ 0),\ (4,\ -9),\ (-6,\ -4),\ (0,\ -10)$

(4) $2xy-2x-5y=2x(y-1)-5(y-1)-5=(2x-5)(y-1)-5$

よって，等式は　$(2x-5)(y-1)-5=7$

すなわち　$(2x-5)(y-1)=12$

x, y は整数であるから，$2x-5$, $y-1$ も整数である。

また，$2x-5$ は奇数である。

よって　$(2x-5,\ y-1)=(1,\ 12),\ (3,\ 4),\ (-1,\ -12),\ (-3,\ -4)$

ゆえに　$(x,\ y)=(3,\ 13),\ (4,\ 5),\ (2,\ -11),\ (1,\ -3)$

$\boxed{2}$ 次の方程式を満たす整数 x, y の組を求めよ。

(1) $x^2-4y^2=4$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$　　(2) $xy-3x-2y+3=0$

解答 (1) $(x,\ y)=(2,\ 0)$　(2) $(x,\ y)=(3,\ 6),\ (5,\ 4),\ (1,\ 0),\ (-1,\ 2)$

解説

(1) 与式から　$(x+2y)(x-2y)=4$

x, y は 0 以上の整数であるから，$x+2y$, $x-2y$ も整数で　$x+2y\geqq 0$

また　$x+2y\geqq x-2y$

よって $\begin{cases} x+2y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-2y=1 \end{cases}$

解は順に　$(x,\ y)=(2,\ 0),\ \left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

x, y がともに整数であるものは　$(x,\ y)=(2,\ 0)$

(2) $xy-3x-2y=x(y-3)-2(y-3)-6$

$=(x-2)(y-3)-6$

与式に代入すると　$(x-2)(y-3)-6+3=0$

よって　$(x-2)(y-3)=3$

x, y は整数であるから，$x-2$, $y-3$ も整数で

$(x-2,\ y-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (-1,\ -3),\ (-3,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(3,\ 6),\ (5,\ 4),\ (1,\ 0),\ (-1,\ 2)$

別解 与式を変形すると　$x(y-3)=2y-3$

$y=3$ とすると $0=3$ となり，矛盾が生じるから　$y\neq 3$

よって　$x=\dfrac{2y-3}{y-3}=\dfrac{2(y-3)+6-3}{y-3}=2+\dfrac{3}{y-3}$　…… ①

x は整数であるから，① より $\dfrac{3}{y-3}$ も整数である。ゆえに，$y-3$ は 3 の約数であるから　$y-3=\pm 1,\ \pm 3$　よって　$y=4,\ 2,\ 6,\ 0$

したがって，① から　$(x,\ y)=(5,\ 4),\ (-1,\ 2),\ (3,\ 6),\ (1,\ 0)$

$\boxed{3}$ 次の方程式を満たす整数 x, y の組を求めよ。

(1) $x^2-y^2=60$, $x>0$, $y>0$　　(2) $xy-4x-2y-4=0$, $x>0$, $y>0$

(3) $2xy-2x-5y=0$　　(4) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}$, $0<x<y$

解答 (1) $(x,\ y)=(16,\ 14),\ (8,\ 2)$

(2) $(x,\ y)=(3,\ 16),\ (4,\ 10),\ (5,\ 8),\ (6,\ 7),\ (8,\ 6),\ (14,\ 5)$

(3) $(x,\ y)=(3,\ 6),\ (5,\ 2),\ (2,\ -4),\ (0,\ 0)$

(4) $(x,\ y)=(7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15)$

解説

(1) $x^2-y^2=60$ から　$(x+y)(x-y)=60$　…… ①

x, y は整数であるから，$x+y$, $x-y$ も整数である。

また，$x+y>0$ であるから，① より　$x-y>0$

更に，$x-y<x+y$ であるから，① より次の表を得る。

$x+y$	60	30	20	15	12	10
$x-y$	1	2	3	4	5	6
$2x$	61	32	23	19	17	16
x	$\frac{61}{2}$	16	$\frac{23}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{17}{2}$	8
y		14				2

したがって　$(x,\ y)=(16,\ 14),\ (8,\ 2)$

(2) $xy-4x-2y=x(y-4)-2(y-4)-8$

$=(x-2)(y-4)-8$

与式に代入すると　$(x-2)(y-4)-8-4=0$

よって　$(x-2)(y-4)=12$

x, y は整数であるから，$x-2$, $y-4$ も整数である。

$x\geqq 1$, $y\geqq 1$ であるから　$x-2\geqq -1$, $y-4\geqq -3$

ゆえに　$(x-2,\ y-4)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(3,\ 16),\ (4,\ 10),\ (5,\ 8),\ (6,\ 7),\ (8,\ 6),\ (14,\ 5)$

(3) $2xy-2x-5y=2x(y-1)-5(y-1)-5$

$=(2x-5)(y-1)-5$

よって，与式は　$(2x-5)(y-1)=5$

x, y は整数であるから，$2x-5$, $y-1$ も整数である。

ゆえに　$(2x-5,\ y-1)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

したがって　$(x,\ y)=(3,\ 6),\ (5,\ 2),\ (2,\ -4),\ (0,\ 0)$

(4) 与式の両辺に $6xy$ を掛けると　$6y+6x=xy$

よって　$xy-6x-6y=0$

ここで　$xy-6x-6y=x(y-6)-6(y-6)-36$

$=(x-6)(y-6)-36$

ゆえに，与式は　$(x-6)(y-6)=36$

x, y は整数であるから，$x-6$, $y-6$ も整数である。

また，$0<x<y$ から　$-6<x-6<y-6$

よって　$(x-6,\ y-6)=(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9)$

したがって　$(x,\ y)=(7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15)$

別解 $0<x<y$ であるから　$\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$

よって　$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}$　ゆえに　$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{6}<\dfrac{2}{x}$

よって　$6<x<12$　すなわち　$x=7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$

$x=7$ のとき　$y=42$　　$x=8$ のとき　$y=24$

$x=9$ のとき　$y=18$　　$x=10$ のとき　$y=15$

$x=11$ のとき　$y=\dfrac{66}{5}$（不適）

したがって　$(x,\ y)=(7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15)$

$\boxed{4}$ (1) $xy+2x-3y-10=0$ を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす自然数 x, y の値の組をすべて求めよ。

解答 (1) $(x,\ y)=(-1,\ -3),\ (1,\ -4),\ (2,\ -6),\ (4,\ 2),\ (5,\ 0),\ (7,\ -1)$

(2) $(x,\ y)=(2,\ 4),\ (3,\ 12)$

解説

(1) $xy+2x-3y=x(y+2)-3(y+2)+6=(x-3)(y+2)+6$

与式に代入すると　$(x-3)(y+2)+6-10=0$

よって　$(x-3)(y+2)=4$　…… ①

x, y は整数であるから，$x-3$, $y+2$ も整数で，① より

$(x-3,\ y+2)=(-4,\ -1),\ (-2,\ -2),\ (-1,\ -4),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-1,\ -3),\ (1,\ -4),\ (2,\ -6),\ (4,\ 2),\ (5,\ 0),\ (7,\ -1)$

(2) 両辺に $4xy$ を掛けて　$4y-4x=xy$　よって　$xy+4x-4y=0$

ゆえに　$(x-4)(y+4)+16=0$　よって　$(x-4)(y+4)=-16$　…… ②

x, y は自然数であるから，$x-4$, $y+4$ は整数である。

また，$x\geqq 1$, $y\geqq 1$ であるから　$x-4\geqq -3$, $y+4\geqq 5$

よって，② から　$(x-4,\ y+4)=(-2,\ 8),\ (-1,\ 16)$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 4),\ (3,\ 12)$

$\boxed{5}$ (1) $xy=2x+4y-5$ を満たす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

解答 (1) $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (5,\ 5),\ (7,\ 3)$

(2) $(x,\ y)=(3,\ 9),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (8,\ 4),\ (1,\ -3),\ (-1,\ 1),\ (-4,\ 2)$

解説

(1) $xy=2x+4y-5$ から　$xy-2x-4y=-5$　…… ①

ここで　$xy-2x-4y=x(y-2)-4(y-2)-8$

$=(x-4)(y-2)-8$

① に代入して　$(x-4)(y-2)-8=-5$

よって　$(x-4)(y-2)=3$　……②

x，y は正の整数であるから，$x-4$，$y-2$ は整数である。

また，$x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから　$x-4\geqq-3$，$y-2\geqq-1$

ゆえに，② から　$(x-4,\ y-2)=(-3,\ -1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$

したがって　$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (5,\ 5),\ (7,\ 3)$

(2)　両辺に xy を掛けて　$2y+3x=xy$

よって　$xy-3x-2y=0$　　ゆえに　$(x-2)(y-3)=6$　……①

x，y は整数であるから，$x-2$，$y-3$ は整数である。

よって，① から　$(x-2,\ y-3)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1),\ (-1,\ -6),\ (-2,\ -3),\ (-3,\ -2),\ (-6,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(3,\ 9),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (8,\ 4),\ (1,\ -3),\ (0,\ 0),\ (-1,\ 1),\ (-4,\ 2)$

このうち，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ は適さないから，求める組は

$(x,\ y)=(3,\ 9),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (8,\ 4),\ (1,\ -3),\ (-1,\ 1),\ (-4,\ 2)$

6 (1)　等式 $x^2-y^2+x-y=10$ を満たす自然数 x，y の組を求めよ。

(2)　$55x^2+2xy+y^2=2007$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

解答　(1)　$(x,\ y)=(5,\ 4),\ (3,\ 1)$

(2)　$(x,\ y)=(3,\ 36),\ (3,\ -42),\ (-3,\ 42),\ (-3,\ -36)$

解説

(1)　$x^2-y^2+x-y=10$ から

$(x+y)(x-y)+(x-y)=10$

よって　$(x-y)(x+y+1)=10$　……①

x，y は自然数であるから，$x-y$，$x+y+1$ は整数である。

また　$x+y+1\geqq1+1+1=3$

これと $x-y<x+y+1$ であることに注意すると，① から

$\begin{cases}x-y=1\\x+y+1=10\end{cases}$，$\begin{cases}x-y=2\\x+y+1=5\end{cases}$

したがって　$(x,\ y)=(5,\ 4),\ (3,\ 1)$

(2)　$55x^2+2xy+y^2=2007$ から　$54x^2+(x+y)^2=2007$

よって　$(x+y)^2=2007-54x^2=9(223-6x^2)$　……①

$(x+y)^2\geqq0$ であるから　$223-6x^2\geqq0$　　ゆえに　$x^2\leqq\frac{223}{6}=37.1\cdots\cdots$

x は整数であるから　$x^2=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$

ここで，① より $223-6x^2$ は整数の 2 乗となるが，そのような x^2 の値は $x^2=9$ のみである。

このとき，$x=\pm3$ で　$223-6x^2=169=13^2$

よって，① から　$(x+y)^2=3^2\cdot13^2$　すなわち　$(x+y)^2=39^2$

したがって　$x+y=\pm39$

よって　$(x,\ x+y)=(3,\ 39),\ (3,\ -39),\ (-3,\ 39),\ (-3,\ -39)$

ゆえに　$(x,\ y)=(3,\ 36),\ (3,\ -42),\ (-3,\ 42),\ (-3,\ -36)$

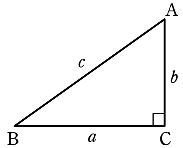
7 3 辺の長さがどれも整数である直角三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とすると，$c>a>b$ が成立しているとする。また，この直角三角形の周の長さは $\frac{ab}{2}$ になるとする。

(1)　$4(a+b)-ab=\boxed{}$ である。　　(2)　a，b，c の値の組をすべて求めよ。

解答　(1)　8　　(2)　$(a,\ b,\ c)=(12,\ 5,\ 13),\ (8,\ 6,\ 10)$

解説

(1)　△ABC の周の長さが $\frac{ab}{2}$ であるから　$a+b+c=\frac{ab}{2}$



よって　$c=\frac{ab}{2}-a-b$　……①

また，三平方の定理により　$a^2+b^2=c^2$

① を代入すると　$a^2+b^2=\left\{\frac{ab}{2}-(a+b)\right\}^2$

ゆえに　$a^2+b^2=\frac{a^2b^2}{4}-ab(a+b)+a^2+b^2+2ab$

よって　$ab\{4(a+b)-ab-8\}=0$

$a\neq0$，$b\neq0$ であるから　$4(a+b)-ab=8$　……②

(2)　② から　$ab-4(a+b)+8=0$　　ゆえに　$(a-4)(b-4)=8$　……③

a，b は正の整数であるから，$a-4$，$b-4$ も整数である。

また，$a>b\geqq1$ であるから　$a-4>b-4\geqq-3$

よって，③ から　$(a-4,\ b-4)=(8,\ 1),\ (4,\ 2)$

ゆえに　$(a,\ b)=(12,\ 5),\ (8,\ 6)$

① から　$(a,\ b)=(12,\ 5)$ のとき　$c=13$　　これは $c>a$ を満たす。

$(a,\ b)=(8,\ 6)$ のとき　$c=10$　　これは $c>a$ を満たす。

したがって　$(a,\ b,\ c)=(12,\ 5,\ 13),\ (8,\ 6,\ 10)$

8 (1)　$xy-2x+4y+1=0$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

(2)　$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=1$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

解答　(1)　$(x,\ y)=(-13,\ 3),\ (-7,\ 5),\ (-5,\ 11),\ (-3,\ -7),\ (-1,\ -1),\ (5,\ 1)$

(2)　$(x,\ y)=(2,\ 6),\ (4,\ 4)$

解説

(1)　$xy-2x+4y+1=0$ から　$(x+4)(y-2)+8+1=0$

すなわち　$(x+4)(y-2)=-9$

x，y は整数であるから，$x+4$，$y-2$ も整数である。

よって　$(x+4,\ y-2)=(-9,\ 1),\ (-3,\ 3),\ (-1,\ 9),\ (1,\ -9),\ (3,\ -3),\ (9,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-13,\ 3),\ (-7,\ 5),\ (-5,\ 11),\ (-3,\ -7),\ (-1,\ -1),\ (5,\ 1)$

(2)　両辺に xy を掛けると　$y+3x=xy$　　すなわち　$xy-3x-y=0$

変形すると　$(x-1)(y-3)=3$

x，y は自然数であるから，$x-1$，$y-3$ は整数で　$x-1\geqq0$，$y-3\geqq-2$

よって　$(x-1,\ y-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 6),\ (4,\ 4)$

9 次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$(x+2)(y-5)=7$　　(2)　$xy+3x-4y=7$

(3)　$xy+7x+5y+25=0$　　(4)　$2xy-2x+y+5=0$

解答　(1)　$(x,\ y)=(-9,\ 4),\ (-3,\ -2),\ (-1,\ 12),\ (5,\ 6)$

(2)　$(x,\ y)=(-1,\ -2),\ (3,\ 2),\ (5,\ -8),\ (9,\ -4)$

(3)　$(x,\ y)=(-15,\ -8),\ (-10,\ -9),\ (-7,\ -12),\ (-6,\ -17),\ (-4,\ 3),\ (-3,\ -2),\ (0,\ -5),\ (5,\ -6)$

(4)　$(x,\ y)=(-2,\ 3),\ (-1,\ 7),\ (0,\ -5),\ (1,\ -1)$

解説

(1)　$(x+2)(y-5)=7$

x，y は整数であるから，$x+2$，$y-5$ も整数である。

よって　$(x+2,\ y-5)=(-7,\ -1),\ (-1,\ -7),\ (1,\ 7),\ (7,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-9,\ 4),\ (-3,\ -2),\ (-1,\ 12),\ (5,\ 6)$

(2)　$xy+3x-4y=7$ から　$(x-4)(y+3)+12=7$

すなわち　$(x-4)(y+3)=-5$

x，y は整数であるから，$x-4$，$y+3$ も整数である。

よって　$(x-4,\ y+3)=(-5,\ 1),\ (-1,\ 5),\ (1,\ -5),\ (5,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-1,\ -2),\ (3,\ 2),\ (5,\ -8),\ (9,\ -4)$

(3)　$xy+7x+5y+25=0$ から　$(x+5)(y+7)-35+25=0$

すなわち　$(x+5)(y+7)=10$

x，y は整数であるから，$x+5$，$y+7$ も整数である。

よって　$(x+5,\ y+7)=(-10,\ -1),\ (-5,\ -2),\ (-2,\ -5),\ (-1,\ -10),\ (1,\ 10),\ (2,\ 5),\ (5,\ 2),\ (10,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-15,\ -8),\ (-10,\ -9),\ (-7,\ -12),\ (-6,\ -17),\ (-4,\ 3),\ (-3,\ -2),\ (0,\ -5),\ (5,\ -6)$

(4)　$2xy-2x+y+5=0$ から　$(2x+1)(y-1)+1+5=0$

すなわち　$(2x+1)(y-1)=-6$

x，y は整数であるから，$2x+1$ は奇数，$y-1$ は整数となる。

よって　$(2x+1,\ y-1)=(-3,\ 2),\ (-1,\ 6),\ (1,\ -6),\ (3,\ -2)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-2,\ 3),\ (-1,\ 7),\ (0,\ -5),\ (1,\ -1)$

10 次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

$xy-3x+4y-17=0$

解答　$(x,\ y)=(-3,\ 8),\ (1,\ 4),\ (-5,\ -2),\ (-9,\ 2)$

解説

方程式は次のように変形できる。

$(x+4)(y-3)+12-17=0$　　すなわち　$(x+4)(y-3)=5$

x，y は整数であるから，$x+4$，$y-3$ も整数である。

ゆえに　$(x+4,\ y-3)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(-3,\ 8),\ (1,\ 4),\ (-5,\ -2),\ (-9,\ 2)$

11 次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$xy+7x-y=0$　　(2)　$xy-3x+6y-23=0$

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ -14),\ (0,\ 0),\ (-6,\ -6),\ (8,\ -8)$

(2)　$(x,\ y)=(-5,\ 8),\ (-7,\ -2),\ (-1,\ 4),\ (-11,\ 2)$

解説

(1)　方程式は次のように変形できる。

$(x-1)(y+7)+7=0$

すなわち　$(x-1)(y+7)=-7$

x，y は整数であるから，$x-1$，$y+7$ も整数である。

ゆえに　$(x-1,\ y+7)=(1,\ -7),\ (-1,\ 7),\ (7,\ -1),\ (-7,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(2,\ -14),\ (0,\ 0),\ (8,\ -8),\ (-6,\ -6)$

(2)　方程式は次のように変形できる。

$(x+6)(y-3)+18-23=0$

すなわち　$(x+6)(y-3)=5$

x，y は整数であるから，$x+6$，$y-3$ も整数である。

ゆえに　$(x+6,\ y-3)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(-5,\ 8),\ (-1,\ 4),\ (-7,\ -2),\ (-11,\ 2)$

12 次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

$xy-2x+3y-1=0$

解答　$(x,\ y)=(-2,\ -3),\ (-8,\ 3),\ (-4,\ 7),\ (2,\ 1)$

解説

与式は次のように変形できる。

$(x+3)(y-2)+6-1=0$　すなわち　$(x+3)(y-2)=-5$

$x,\ y$ は整数であるから，$x+3,\ y-2$ も整数である。

ゆえに　$(x+3,\ y-2)=(1,\ -5),\ (-5,\ 1),\ (-1,\ 5),\ (5,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(-2,\ -3),\ (-8,\ 3),\ (-4,\ 7),\ (2,\ 1)$

13 次の等式を満たす整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

(1)　$(x-4)(y+1)=3$　　(2)　$(x+3)(y-2)=4$　　(3)　$(x+2y)(x+y)=5$

(4)　$xy-7x-y=0$　　(5)　$xy-3x+5y-9=0$

解答　(1)　$(x,\ y)=(5,\ 2),\ (7,\ 0),\ (3,\ -4),\ (1,\ -2)$

(2)　$(x,\ y)=(-2,\ 6),\ (-1,\ 4),\ (1,\ 3),\ (-4,\ -2),\ (-5,\ 0),\ (-7,\ 1)$

(3)　$(x,\ y)=(9,\ -4),\ (-3,\ 4),\ (-9,\ 4),\ (3,\ -4)$

(4)　$(x,\ y)=(2,\ 14),\ (8,\ 8),\ (0,\ 0),\ (-6,\ 6)$

(5)　$(x,\ y)=(-4,\ -3),\ (-11,\ 4),\ (-3,\ 0),\ (-8,\ 5),\ (-6,\ 9),\ (1,\ 2),$
$(-7,\ 6),\ (-2,\ 1)$

解説

(1)　$x,\ y$ は整数であるから，$x-4,\ y+1$ も整数である。

よって　$(x-4,\ y+1)=(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (-1,\ -3),\ (-3,\ -1)$

したがって　$(x,\ y)=(5,\ 2),\ (7,\ 0),\ (3,\ -4),\ (1,\ -2)$

(2)　$x,\ y$ は整数であるから，$x+3,\ y-2$ も整数である。

よって

$(x+3,\ y-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1),\ (-1,\ -4),\ (-2,\ -2),\ (-4,\ -1)$

したがって

$(x,\ y)=(-2,\ 6),\ (-1,\ 4),\ (1,\ 3),\ (-4,\ -2),\ (-5,\ 0),\ (-7,\ 1)$

(3)　$x,\ y$ は整数であるから，$x+2y,\ x+y$ も整数である。

よって　$(x+2y,\ x+y)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

したがって　$(x,\ y)=(9,\ -4),\ (-3,\ 4),\ (-9,\ 4),\ (3,\ -4)$

(4)　等式は次のように変形できる。

$(x-1)(y-7)-7=0$

すなわち　$(x-1)(y-7)=7$

$x,\ y$ は整数であるから，$x-1,\ y-7$ も整数である。

よって　$(x-1,\ y-7)=(1,\ 7),\ (7,\ 1),\ (-1,\ -7),\ (-7,\ -1)$

したがって　$(x,\ y)=(2,\ 14),\ (8,\ 8),\ (0,\ 0),\ (-6,\ 6)$

(5)　等式は次のように変形できる。

$(x+5)(y-3)+15-9=0$

すなわち　$(x+5)(y-3)=-6$

$x,\ y$ は整数であるから，$x+5,\ y-3$ も整数である。

よって

$(x+5,\ y-3)=(1,\ -6),\ (-6,\ 1),\ (2,\ -3),\ (-3,\ 2),\ (-1,\ 6),\ (6,\ -1),$
$(-2,\ 3),\ (3,\ -2)$

したがって

$(x,\ y)=(-4,\ -3),\ (-11,\ 4),\ (-3,\ 0),\ (-8,\ 5),\ (-6,\ 9),\ (1,\ 2),$
$(-7,\ 6),\ (-2,\ 1)$

14 次の等式を満たす整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

(1)　$(x+1)(y-2)=7$　　(2)　$(x+3)(y+2)=-6$

(3)　$xy-3x-y-1=0$　　(4)　$xy-4x+2y+1=0$

解答　(1)　$(x,\ y)=(0,\ 9),\ (6,\ 3),\ (-2,\ -5),\ (-8,\ 1)$

(2)　$(x,\ y)=(-2,\ -8),\ (-9,\ -1),\ (-1,\ -5),\ (-6,\ 0),$
$(0,\ -4),\ (-5,\ 1),\ (3,\ -3),\ (-4,\ 4)$

(3)　$(x,\ y)=(2,\ 7),\ (5,\ 4),\ (3,\ 5),\ (0,\ -1),\ (-3,\ 2),\ (-1,\ 1)$

(4)　$(x,\ y)=(-1,\ -5),\ (-11,\ 5),\ (1,\ 1),\ (-5,\ 7),\ (7,\ 3),\ (-3,\ 13)$

解説

(1)　積が 7 になる整数 $x+1,\ y-2$ の組は

$(x+1,\ y-2)=(1,\ 7),\ (7,\ 1),\ (-1,\ -7),\ (-7,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(0,\ 9),\ (6,\ 3),\ (-2,\ -5),\ (-8,\ 1)$

(2)　積が -6 になる整数 $x+3,\ y+2$ の組は

$(x+3,\ y+2)=(1,\ -6),\ (-6,\ 1),\ (2,\ -3),\ (-3,\ 2),$
$(3,\ -2),\ (-2,\ 3),\ (6,\ -1),\ (-1,\ 6)$

よって　$(x,\ y)=(-2,\ -8),\ (-9,\ -1),\ (-1,\ -5),\ (-6,\ 0),$
$(0,\ -4),\ (-5,\ 1),\ (3,\ -3),\ (-4,\ 4)$

(3)　$xy-3x-y-1=(x-1)(y-3)-4$ であるから，与えられた方程式を変形すると

$(x-1)(y-3)=4$

積が 4 になる整数 $x-1,\ y-3$ の組は

$(x-1,\ y-3)=(1,\ 4),\ (4,\ 1),\ (2,\ 2),\ (-1,\ -4),$
$(-4,\ -1),\ (-2,\ -2)$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 7),\ (5,\ 4),\ (3,\ 5),\ (0,\ -1),\ (-3,\ 2),\ (-1,\ 1)$

(4)　$xy-4x+2y+1=(x+2)(y-4)+9$ であるから，与えられた方程式を変形すると

$(x+2)(y-4)=-9$

積が -9 になる整数 $x+2,\ y-4$ の組は

$(x+2,\ y-4)=(1,\ -9),\ (-9,\ 1),\ (3,\ -3),\ (-3,\ 3),$
$(9,\ -1),\ (-1,\ 9)$

よって　$(x,\ y)=(-1,\ -5),\ (-11,\ 5),\ (1,\ 1),\ (-5,\ 7),\ (7,\ 3),\ (-3,\ 13)$

15 次の等式を満たす整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

(1)　$xy=15$　　(2)　$(x+4)(y+7)=13$

(3)　$xy-2x-y=2$　　(4)　$xy+3x-4y=18$

解答　(1)　$(x,\ y)=(1,\ 15),\ (15,\ 1),\ (3,\ 5),\ (5,\ 3),$
$(-1,\ -15),\ (-15,\ -1),\ (-3,\ -5),\ (-5,\ -3)$

(2)　$(x,\ y)=(-3,\ 6),\ (9,\ -6),\ (-5,\ -20),\ (-17,\ -8)$

(3)　$(x,\ y)=(2,\ 6),\ (5,\ 3),\ (3,\ 4),\ (0,\ -2),\ (-3,\ 1),\ (-1,\ 0)$

(4)　$(x,\ y)=(5,\ 3),\ (10,\ -2),\ (6,\ 0),\ (7,\ -1),$
$(3,\ -9),\ (-2,\ -4),\ (2,\ -6),\ (1,\ -5)$

解説

(1)　$x,\ y$ は整数であるから

$(x,\ y)=(1,\ 15),\ (15,\ 1),\ (3,\ 5),\ (5,\ 3),$
$(-1,\ -15),\ (-15,\ -1),\ (-3,\ -5),\ (-5,\ -3)$

(2)　$x,\ y$ は整数であるから，$x+4,\ y+7$ も整数である。

よって　$(x+4,\ y+7)=(1,\ 13),\ (13,\ 1),\ (-1,\ -13),\ (-13,\ -1)$

したがって　$(x,\ y)=(-3,\ 6),\ (9,\ -6),\ (-5,\ -20),\ (-17,\ -8)$

(3)　$xy-2x-y=x(y-2)-(y-2)-2=(x-1)(y-2)-2$

よって，等式は　$(x-1)(y-2)-2=2$

すなわち　$(x-1)(y-2)=4$

$x,\ y$ は整数であるから，$x-1,\ y-2$ も整数である。

よって　$(x-1,\ y-2)=(1,\ 4),\ (4,\ 1),\ (2,\ 2),$
$(-1,\ -4),\ (-4,\ -1),\ (-2,\ -2)$

したがって　$(x,\ y)=(2,\ 6),\ (5,\ 3),\ (3,\ 4),\ (0,\ -2),\ (-3,\ 1),\ (-1,\ 0)$

(4)　$xy+3x-4y=x(y+3)-4(y+3)+12=(x-4)(y+3)+12$

よって，等式は　$(x-4)(y+3)+12=18$

すなわち　$(x-4)(y+3)=6$

$x,\ y$ は整数であるから，$x-4,\ y+3$ も整数である。

よって　$(x-4,\ y+3)=(1,\ 6),\ (6,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),$
$(-1,\ -6),\ (-6,\ -1),\ (-2,\ -3),\ (-3,\ -2)$

したがって　$(x,\ y)=(5,\ 3),\ (10,\ -2),\ (6,\ 0),\ (7,\ -1),$
$(3,\ -9),\ (-2,\ -4),\ (2,\ -6),\ (1,\ -5)$

16 次の問いに答えよ。

(1)　等式 $xy+2x-3y=1$ を満たす整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

(2)　等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を満たす正の整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

解答　(1)　$(x,\ y)=(4,\ -7),\ (2,\ 3),\ (8,\ -3),\ (-2,\ -1)$

(2)　$(x,\ y)=(3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3)$

解説

(1)　等式を整理すると　$(x-3)(y+2)=-5$

$x,\ y$ は整数であるから，$x-3,\ y+2$ も整数である。

よって　$(x-3,\ y+2)=(1,\ -5),\ (-1,\ 5),\ (5,\ -1),\ (-5,\ 1)$

したがって　$(x,\ y)=(4,\ -7),\ (2,\ 3),\ (8,\ -3),\ (-2,\ -1)$

(2)　等式の両辺に $2xy$ を掛けると

$2y+2x=xy$　すなわち　$xy-2x-2y=0$

整理すると　$(x-2)(y-2)=4$

$x,\ y$ は正の整数であるから，$x-2,\ y-2$ は -1 以上の整数である。

よって　$(x-2,\ y-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

したがって　$(x,\ y)=(3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3)$

17 次の等式を満たす自然数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{3y}=\dfrac{1}{2}$　　(2)　$x^2=y^2+8$

解答　(1)　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$　　(2)　$(x,\ y)=(3,\ 1)$

解説

(1)　両辺に $6xy$ を掛けて　$2y+2x=3xy$

よって　$3xy-2x-2y=0$

これを変形して　$(3x-2)(3y-2)=4$　…… ①

$x,\ y$ は自然数であるから，$3x-2,\ 3y-2$ はともに整数である。

$x\geqq 1,\ y\geqq 1$ であるから　$3x-2\geqq 1,\ 3y-2\geqq 1$

ゆえに，① から

$(3x-2,\ 3y-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

これを満たす $x,\ y$ のうち，ともに自然数となる組は

$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(2)　$x^2=y^2+8$ から　$x^2-y^2=8$

よって　$(x+y)(x-y)=8$　…… ①

$x,\ y$ は自然数であるから，$x+y,\ x-y$ はともに整数であり，

$x+y>x-y$

また，$x+y>0$ であり，これと ① より　$x-y>0$

ゆえに，① から

$(x+y,\ x-y)=(8,\ 1),\ (4,\ 2)$

これを満たす $x,\ y$ のうち，ともに自然数となる組は

$(x,\ y)=(3,\ 1)$

18 次の等式を満たす自然数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

(1)　$\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{2y}=1$　　(2)　$x^2=y^2+12$

解答　(1)　$(x,\ y)=(6,\ 3),\ (10,\ 1)$　　(2)　$(x,\ y)=(4,\ 2)$

解説

(1)　両辺に $2xy$ を掛けて　$10y+x=2xy$

よって　$2xy-x-10y=0$

これを変形して　$(x-5)(2y-1)=5$　……①

x，y は自然数であるから，$x-5$，$2y-1$ はともに整数である。

$x\geqq 1$，$y\geqq 1$ であるから　$x-5\geqq -4$，$2y-1\geqq 1$

ゆえに，① から

$(x-5,\ 2y-1)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$

これを満たす x，y のうち，ともに自然数となる組は

$(x,\ y)=(6,\ 3),\ (10,\ 1)$

(2)　$x^2=y^2+12$ から　$x^2-y^2=12$

よって　$(x+y)(x-y)=12$　……①

x，y は自然数であるから，$x+y$，$x-y$ はともに整数であり

$x+y>x-y$

また，$x+y>0$ であり，これと ① より　$x-y>0$

ゆえに，① から

$(x+y,\ x-y)=(12,\ 1),\ (6,\ 2),\ (4,\ 3)$

これを満たす x，y のうち，ともに自然数となる組は

$(x,\ y)=(4,\ 2)$

19 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1$　　(2)　$\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}=1$　　(3)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 4),\ (3,\ 3)$　　(2)　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (3,\ 3)$

(3)　$(x,\ y)=(6,\ 30),\ (30,\ 6),\ (10,\ 10)$

解説

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1$ の両辺に xy を掛けると　$y+2x=xy$

すなわち　$xy-2x-y=0$　……①

ここで　$xy-2x-y=x(y-2)-(y-2)-2=(x-1)(y-2)-2$

よって，① は　$(x-1)(y-2)-2=0$　　すなわち　$(x-1)(y-2)=2$

x，y は自然数であるから，$x-1$，$y-2$ も整数で，$x-1\geqq 0$，$y-2\geqq -1$ である。

よって　$(x-1,\ y-2)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 4),\ (3,\ 3)$

(2)　$\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}=1$ の両辺に xy を掛けると　$4y-x=xy$

すなわち　$xy+x-4y=0$　……①

ここで　$xy+x-4y=x(y+1)-4(y+1)+4=(x-4)(y+1)+4$

よって，① は　$(x-4)(y+1)+4=0$

すなわち　$(x-4)(y+1)=-4$

x，y は自然数であるから，$x-4$，$y+1$ も整数で，$x-4\geqq -3$，$y+1\geqq 2$ である。

よって　$(x-4,\ y+1)=(-2,\ 2),\ (-1,\ 4)$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (3,\ 3)$

(3)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ の両辺に $5xy$ を掛けると　$5y+5x=xy$

すなわち　$xy-5x-5y=0$　……①

ここで　$xy-5x-5y=x(y-5)-5(y-5)-25=(x-5)(y-5)-25$

よって，① は　$(x-5)(y-5)-25=0$　　すなわち　$(x-5)(y-5)=25$

x，y は自然数であるから，$x-5$，$y-5$ も整数で，$x-5\geqq -4$，$y-5\geqq -4$ である。

よって　$(x-5,\ y-5)=(1,\ 25),\ (25,\ 1),\ (5,\ 5)$

ゆえに　$(x,\ y)=(6,\ 30),\ (30,\ 6),\ (10,\ 10)$

20 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{7}$　　(2)　$\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{2}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(8,\ 56),\ (14,\ 14),\ (56,\ 8)$

(2)　$(x,\ y)=(2,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 8),\ (5,\ 20)$

解説

(1)　両辺に $7xy$ を掛けると　$7y+7x=xy$

すなわち　$xy-7x-7y=0$

変形すると　$(x-7)(y-7)=49$

x，y は自然数であるから，$x-7$，$y-7$ は整数で

$x-7\geqq -6$，$y-7\geqq -6$

よって　$(x-7,\ y-7)=(1,\ 49),\ (7,\ 7),\ (49,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(8,\ 56),\ (14,\ 14),\ (56,\ 8)$

(2)　両辺に $2xy$ を掛けると　$6y-4x=xy$

すなわち　$xy+4x-6y=0$

変形すると　$(x-6)(y+4)=-24$

x，y は自然数であるから，$x-6$，$y+4$ は整数で

$x-6\geqq -5$，$y+4\geqq 5$

よって　$(x-6,\ y+4)=(-4,\ 6),\ (-3,\ 8),\ (-2,\ 12),\ (-1,\ 24)$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 8),\ (5,\ 20)$

21 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1+\dfrac{4}{xy}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 2),\ (3,\ 6)$　　(2)　$(x,\ y)=(3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (1,\ 1)$

解説

(1)　$\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ の両辺に $2xy$ を掛けると　$4y-2x=xy$

すなわち　$xy+2x-4y=0$

変形すると　$(x-4)(y+2)=-8$

x，y は自然数であるから，$x-4$，$y+2$ は整数で

$x-4\geqq -3$，$y+2\geqq 3$

ゆえに　$(x-4,\ y+2)=(-2,\ 4),\ (-1,\ 8)$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 2),\ (3,\ 6)$

(2)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1+\dfrac{4}{xy}$ の両辺に xy を掛けると　$2y+3x=xy+4$

すなわち　$xy-3x-2y+4=0$

変形すると　$(x-2)(y-3)=2$

x，y は自然数であるから，$x-2$，$y-3$ は整数で

$x-2\geqq -1$，$y-3\geqq -2$

ゆえに　$(x-2,\ y-3)=(-1,\ -2),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4)$

22 等式 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y)=(5,\ 10),\ (12,\ 3),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4)$

解説

等式の両辺に $2xy$ を掛けると　$4y+2x=xy$

変形すると　$(x-4)(y-2)=8$　……①

x，y は自然数であるから，$x-4$，$y-2$ は整数で

$x-4\geqq -3$，　$y-2\geqq -1$

よって，① から

$(x-4,\ y-2)=(1,\ 8),\ (8,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$

したがって

$(x,\ y)=(5,\ 10),\ (12,\ 3),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4)$

23 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y)=(4,\ 12),\ (6,\ 6),\ (12,\ 4)$

解説

与式の両辺に $3xy$ を掛けると　$3y+3x=xy$

すなわち　$xy-3x-3y=0$

よって　$(x-3)(y-3)=9$

x，y は自然数であるから，$x-3$，$y-3$ は -2 以上の整数である。

ゆえに　$(x-3,\ y-3)=(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(4,\ 12),\ (6,\ 6),\ (12,\ 4)$

24 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=1$　　(2)　$\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{y}=1$　　(3)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 6),\ (4,\ 4)$　　(2)　$(x,\ y)=(3,\ 1),\ (4,\ 2),\ (5,\ 5)$

(3)　$(x,\ y)=(6,\ 30),\ (10,\ 10),\ (30,\ 6)$

解説

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=1$ の両辺に xy を掛けると　$y+3x=xy$

すなわち　$xy-3x-y=0$

よって　$(x-1)(y-3)=3$

x，y は自然数であるから，$x-1$，$y-3$ は整数で，$x-1\geqq 0$，$y-3\geqq -2$ である。

ゆえに　$(x-1,\ y-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 6),\ (4,\ 4)$

(2)　$\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{y}=1$ の両辺に xy を掛けると　$6y-x=xy$

すなわち　$xy+x-6y=0$

よって　$(x-6)(y+1)=-6$

x，y は自然数であるから，$x-6$，$y+1$ は整数で，$x-6\geqq -5$，$y+1\geqq 2$ である。

ゆえに　$(x-6,\ y+1)=(-3,\ 2),\ (-2,\ 3),\ (-1,\ 6)$

よって　$(x,\ y)=(3,\ 1),\ (4,\ 2),\ (5,\ 5)$

(3)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ の両辺に $5xy$ を掛けると　$5y+5x=xy$

すなわち　$xy-5x-5y=0$

よって　$(x-5)(y-5)=25$

x，y は自然数であるから，$x-5$，$y-5$ は整数で，$x-5\geqq -4$，$y-5\geqq -4$ である。

ゆえに　$(x-5,\ y-5)=(1,\ 25),\ (5,\ 5),\ (25,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(6,\ 30),\ (10,\ 10),\ (30,\ 6)$

25 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$x^2-y^2=35$　　(2)　$x^2-y^2=-9$

(3)　$x^2-y^2=40$　　(4)　$x^2-4y^2=-12$

解答　(1)　$(x,\ y)=(6,\ 1),\ (18,\ 17)$　　(2)　$(x,\ y)=(4,\ 5)$

(3)　$(x,\ y)=(7,\ 3),\ (11,\ 9)$　　(4)　$(x,\ y)=(2,\ 2)$

解説

(1)　左辺を因数分解すると　$(x+y)(x-y)=35$

x，y は自然数であるから，$x+y$ は 2 以上の自然数，$x-y$ は整数である。

また　$x+y>x-y$

よって　$(x+y,\ x-y)=(7,\ 5),\ (35,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(6,\ 1),\ (18,\ 17)$

(2)　左辺を因数分解すると　$(x+y)(x-y)=-9$

x，y は自然数であるから，$x+y$ は 2 以上の自然数，$x-y$ は整数である。

また　$x+y>x-y$

よって　$(x+y,\ x-y)=(3,\ -3),\ (9,\ -1)$ …… ①

ここで，$(x+y)+(x-y)=2x$ であるから，$x+y$ と $x-y$ の和は正の偶数である。

① の中で，この条件に適するのは　$(x+y,\ x-y)=(9,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(4,\ 5)$

(3) 左辺を因数分解すると　$(x+y)(x-y)=40$

x，y は自然数であるから，$x+y$ は 2 以上の自然数，$x-y$ は整数である。

また　$x+y>x-y$

よって　$(x+y,\ x-y)=(8,\ 5),\ (10,\ 4),\ (20,\ 2),\ (40,\ 1)$ …… ①

ここで，$(x+y)+(x-y)=2x$ であるから，$x+y$ と $x-y$ の和は偶数である。

① の中で，この条件に適するのは　$(x+y,\ x-y)=(10,\ 4),\ (20,\ 2)$

ゆえに　$(x,\ y)=(7,\ 3),\ (11,\ 9)$

(4) 左辺を因数分解すると　$(x+2y)(x-2y)=-12$

x，y は自然数であるから，$x+2y$ は 3 以上の自然数，$x-2y$ は整数である。

また　$x+2y>x-2y$

よって　$(x+2y,\ x-2y)=(3,\ -4),\ (4,\ -3),\ (6,\ -2),\ (12,\ -1)$ …… ①

ここで，$(x+2y)+(x-2y)=2x$ であるから，$x+2y$ と $x-2y$ の和は偶数である。

① の中で，この条件に適するのは　$(x+2y,\ x-2y)=(6,\ -2)$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 2)$

26 n は自然数とする。$\sqrt{n^2+56}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=5,\ 13$

解説

$\sqrt{n^2+56}$ が自然数となるとき，k を自然数として，次のように表される。

$$\sqrt{n^2+56}=k$$

両辺を 2 乗して整理すると　$k^2-n^2=56$

すなわち　$(k+n)(k-n)=56$

k，n は自然数であるから，$k+n$ は 2 以上の自然数，$k-n$ は整数である。

また　$k+n>k-n$

よって　$(k+n,\ k-n)=(8,\ 7),\ (14,\ 4),\ (28,\ 2),\ (56,\ 1)$ …… ①

ここで，$(k+n)+(k-n)=2k$ であるから，$k+n$ と $k-n$ の和は偶数である。

① の中で，この条件に適するのは　$(k+n,\ k-n)=(14,\ 4),\ (28,\ 2)$

ゆえに　$(k,\ n)=(9,\ 5),\ (15,\ 13)$

したがって，求める自然数 n は　$n=5,\ 13$

27 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(1) $x^2-y^2=33$　　(2) $x^2-y^2=24$

解答　(1) $(x,\ y)=(7,\ 4),\ (17,\ 16)$　(2) $(x,\ y)=(5,\ 1),\ (7,\ 5)$

解説

(1) 左辺を因数分解すると　$(x+y)(x-y)=33$

x，y は自然数であるから，$x+y$ は 2 以上の自然数，$x-y$ は整数である。

また　$x+y>x-y$

よって　$(x+y,\ x-y)=(11,\ 3),\ (33,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(7,\ 4),\ (17,\ 16)$

(2) 左辺を因数分解すると　$(x+y)(x-y)=24$

x，y は自然数であるから，$x+y$ は 2 以上の自然数，$x-y$ は整数である。

また　$x+y>x-y$

よって　$(x+y,\ x-y)=(6,\ 4),\ (8,\ 3),\ (12,\ 2),\ (24,\ 1)$ …… ①

ここで，$(x+y)+(x-y)=2x$ であるから，$x+y$ と $x-y$ の和は偶数である。

① の中で，この条件に適するのは　$(x+y,\ x-y)=(6,\ 4),\ (12,\ 2)$

ゆえに　$(x,\ y)=(5,\ 1),\ (7,\ 5)$

28 (1) 等式 $4x^2-y^2+2x-y=8$ を満たす正の整数 x，y の組をすべて求めよ。

(2) 等式 $x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13=0$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

解答　(1) $(x,\ y)=(2,\ 3)$　(2) $(x,\ y)=(3,\ 2),\ (4,\ 3)$

解説

(1) $4x^2-y^2+2x-y=(2x+y)(2x-y)+(2x-y)=(2x-y)(2x+y+1)$

よって，等式は　$(2x-y)(2x+y+1)=8$

x，y は正の整数であるから，$2x-y$，$2x+y+1$ は整数で，$2x+y+1\geqq 4$ である。

また　$2x+y+1>2x-y$

したがって　$(2x-y,\ 2x+y+1)=(1,\ 8),\ (2,\ 4)$ …… ①

ここで，$(2x-y)+(2x+y+1)=4x+1$ であるから，$2x-y$ と $2x+y+1$ の和は奇数である。

① の中でこの条件に適するのは　$(2x-y,\ 2x+y+1)=(1,\ 8)$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 3)$

(2) $x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13=0$ から　$x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13=0$ …… ①

x についての 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(y+1)^2-(3y^2-8y+13)=-2y^2+10y-12=-2(y^2-5y+6)$$
$$=-2(y-2)(y-3)$$

① の解は整数 (実数) であるから，$D\geqq 0$ である。

よって　$-2(y-2)(y-3)\geqq 0$

これを解くと　$2\leqq y\leqq 3$

y は整数であるから　$y=2,\ 3$

[1] $y=2$ のとき

① は　$x^2-6x+9=0$　ゆえに　$x=3$

[2] $y=3$ のとき

① は　$x^2-8x+16=0$　ゆえに　$x=4$

[1]，[2] から　$(x,\ y)=(3,\ 2),\ (4,\ 3)$

29 n は自然数とする。$\sqrt{n^2+45}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=2,\ 6,\ 22$

解説

$\sqrt{n^2+45}$ が自然数となるとき，k を自然数として，次の式が成り立つ。

$$\sqrt{n^2+45}=k$$

両辺を 2 乗して移項すると　$k^2-n^2=45$

すなわち　$(k+n)(k-n)=45$ …… ①

ここで，k，n は $k>n$ を満たす自然数であるから，$k+n$，$k-n$ はともに自然数である。

$k+n>k-n$ であるから，① を満たす自然数 $k+n$，$k-n$ の組は次のようになる。

$$(k+n,\ k-n)=(45,\ 1),\ (15,\ 3),\ (9,\ 5)$$

これを満たす自然数 k，n の組は次のようになる。

$$(k,\ n)=(23,\ 22),\ (9,\ 6),\ (7,\ 2)$$

したがって，求める自然数 n は　$n=2,\ 6,\ 22$

30 $\sqrt{n^2+144}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。

解答　$n=5,\ 9,\ 16,\ 35$

解説

$\sqrt{n^2+144}=m$ …… ① (m は自然数) とおくと　$n<m$

① の両辺を平方すると　$n^2+144=m^2$

ゆえに　$(m+n)(m-n)=144$ …… ②

ここで　$(m+n)-(m-n)=2n$

n は自然数であるから，$m+n$ と $m-n$ の差は偶数である。

よって，$m+n$，$m-n$ はともに偶数，またはともに奇数である。

更に，② の右辺は偶数であるから，$m+n$，$m-n$ はともに偶数であり，

$0<m-n<m+n$ を満たす。

ゆえに，② を満たす $(m+n,\ m-n)$ の組は

$$(m+n,\ m-n)=(72,\ 2),\ (36,\ 4),\ (24,\ 6),\ (18,\ 8)$$

すなわち　$\begin{cases} m+n=72 \\ m-n=2 \end{cases}$，$\begin{cases} m+n=36 \\ m-n=4 \end{cases}$，$\begin{cases} m+n=24 \\ m-n=6 \end{cases}$，$\begin{cases} m+n=18 \\ m-n=8 \end{cases}$

それぞれを解くと　$(m,\ n)=(37,\ 35),\ (20,\ 16),\ (15,\ 9),\ (13,\ 5)$

したがって，求める n の値は　$n=5,\ 9,\ 16,\ 35$

31 (1) $m^2=4n^2+21$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

(2) $\sqrt{n^2+84}$ が整数となるような自然数 n をすべて求めよ。

解答　(1) $(m,\ n)=(11,\ 5),\ (5,\ 1)$　(2) $n=4,\ 20$

解説

(1) $m^2=4n^2+21$ から　$m^2-4n^2=21$

よって　$(m+2n)(m-2n)=21$ …… ①

m，n は自然数であるから，$m+2n$ と $m-2n$ も自然数であり，21 の約数である。

① を満たす $(m+2n,\ m-2n)$ の組は，$m+2n>m-2n\geqq 1$ に注意すると

$\begin{cases} m+2n=21 \\ m-2n=1 \end{cases}$，$\begin{cases} m+2n=7 \\ m-2n=3 \end{cases}$

それぞれを解くと　$(m,\ n)=(11,\ 5),\ (5,\ 1)$

(2) $\sqrt{n^2+84}=m$ …… ① (m は整数) とおくと　$n<m$

① の両辺を平方すると　$n^2+84=m^2$　すなわち　$m^2-n^2=84$

よって　$(m+n)(m-n)=84$ …… ②

ここで　$(m+n)-(m-n)=2n$

n は自然数であるから，$m+n$ と $m-n$ の差は偶数である。

ゆえに，$m+n$，$m-n$ はともに偶数であるか，またはともに奇数である。

更に，② の右辺は偶数であるから，$m+n$，$m-n$ はともに偶数であり，

$0<m-n<m+n$ を満たす。

よって，② を満たす $(m+n,\ m-n)$ の組は

$\begin{cases} m+n=42 \\ m-n=2 \end{cases}$，$\begin{cases} m+n=14 \\ m-n=6 \end{cases}$

それぞれを解くと　$(m,\ n)=(22,\ 20),\ (10,\ 4)$

したがって，求める n の値は　$n=4,\ 20$

32 $\sqrt{n^2+40}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。

解答　$n=9,\ 3$

解説

$\sqrt{n^2+40}=m$ (m は自然数) とおくと　$n<m$

平方して　$n^2+40=m^2$　ゆえに　$(m+n)(m-n)=40$ …… ①

m，n は自然数であるから，$m+n$，$m-n$ も自然数であり，40 の約数である。

また，$m+n>m-n\geqq 1$ であるから，① より

$\begin{cases} m+n=40 \\ m-n=1 \end{cases}$，$\begin{cases} m+n=20 \\ m-n=2 \end{cases}$，$\begin{cases} m+n=10 \\ m-n=4 \end{cases}$，$\begin{cases} m+n=8 \\ m-n=5 \end{cases}$

解は順に　$(m,\ n)=\left(\dfrac{41}{2},\ \dfrac{39}{2}\right),\ (11,\ 9),\ (7,\ 3),\ \left(\dfrac{13}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

したがって，求める n の値は　$n=9,\ 3$

33 (1) $m^2=4n^2+33$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

(2) $\sqrt{n^2+84}$ が整数となるような自然数 n をすべて求めよ。

解答 (1) $(m,\ n)=(17,\ 8),\ (7,\ 2)$ (2) $n=4,\ 20$

解説

(1) $m^2=4n^2+33$ から $m^2-4n^2=33$

よって $(m+2n)(m-2n)=33$ ……①

$m,\ n$ は自然数であるから，$m+2n$ と $m-2n$ も自然数であり，33 の約数である。

① を満たす $(m+2n,\ m-2n)$ の組は，$m+2n>m-2n\geqq 1$ に注意すると

$$\begin{cases} m+2n=33 \\ m-2n=1 \end{cases},\quad \begin{cases} m+2n=11 \\ m-2n=3 \end{cases}$$

それぞれを解くと $(m,\ n)=(17,\ 8),\ (7,\ 2)$

(2) $\sqrt{n^2+84}=m$ ……① (m は整数) とおくと $n<m$

① の両辺を平方すると $n^2+84=m^2$ すなわち $m^2-n^2=84$

よって $(m+n)(m-n)=84$ ……②

$m,\ n$ は自然数であるから，$m+n,\ m-n$ も自然数であり，$m+n>m-n\geqq 1$ を満たす。また $(m+n)-(m-n)=2n$

ゆえに，$m+n$ と $m-n$ の差は偶数であるから，$m+n,\ m-n$ の偶奇は一致する。

ここで，② の右辺は偶数であるから，$m+n,\ m-n$ はともに偶数である。

よって，② から $\begin{cases} m+n=42 \\ m-n=2 \end{cases},\quad \begin{cases} m+n=14 \\ m-n=6 \end{cases}$

それぞれを解くと $(m,\ n)=(22,\ 20),\ (10,\ 4)$

したがって，求める n の値は $n=4,\ 20$

34 $\sqrt{n^2+21}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。

解答 $n=2,\ 10$

解説

$\sqrt{n^2+21}=m$ (m は自然数) とおくと $n^2+21=m^2$

よって $m^2-n^2=21$

ゆえに $(m+n)(m-n)=21$ ……①

$m,\ n$ は自然数であるから，$m+n,\ m-n$ は 21 の約数である。

$1\leqq m-n<m+n\leqq 21$ に注意すると，① から

$\begin{cases} m+n=21 \\ m-n=1 \end{cases}$ ……② または $\begin{cases} m+n=7 \\ m-n=3 \end{cases}$ ……③

② を解くと $m=11,\ n=10$ これらは自然数であるから適する。

③ を解くと $m=5,\ n=2$ これらは自然数であるから適する。

したがって $n=2,\ 10$

35 n は自然数とする。$\sqrt{n^2+72}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

解答 $n=3,\ 7,\ 17$

解説

$\sqrt{n^2+72}$ が自然数となるとき，k を自然数として $\sqrt{n^2+72}=k$ と表される。

$\sqrt{n^2+72}=k$ の両辺を 2 乗して整理すると

$$k^2-n^2=72$$

すなわち $(k+n)(k-n)=72$ ……①

$k,\ n$ は自然数であるから，$k+n,\ k-n$ は整数で $k+n\geqq 2$

また $k+n>k-n$

よって，① から

$(k+n,\ k-n)=(9,\ 8),\ (12,\ 6),\ (18,\ 4),\ (24,\ 3),\ (36,\ 2),\ (72,\ 1)$ ……②

ここで，$(k+n)+(k-n)=2k$ であるから，$k+n$ と $k-n$ の和は偶数である。

② の中で，この条件に適するのは

$(k+n,\ k-n)=(12,\ 6),\ (18,\ 4),\ (36,\ 2)$

ゆえに $(k,\ n)=(9,\ 3),\ (11,\ 7),\ (19,\ 17)$

したがって，求める自然数 n は $n=3,\ 7,\ 17$

36 n は自然数とする。$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

解答 $n=2,\ 7$

解説

$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるとき，k を自然数として，次の式が成り立つ。

$$\sqrt{n^2+32}=k$$

両辺を 2 乗して移項すると $k^2-n^2=32$

すなわち $(k+n)(k-n)=32$ ……①

ここで，$k,\ n$ は $k>n$ を満たす自然数であるから，$k+n,\ k-n$ はともに自然数である。

$k+n>k-n$ であるから，① を満たす自然数 $k+n,\ k-n$ の組は次のようになる。

$(k+n,\ k-n)=(32,\ 1),\ (16,\ 2),\ (8,\ 4)$

$(k+n)+(k-n)=2k$ は偶数であるから

$(k+n,\ k-n)=(16,\ 2),\ (8,\ 4)$

これを満たす自然数 $k,\ n$ の組は次のようになる。

$(k,\ n)=(9,\ 7),\ (6,\ 2)$

したがって，求める自然数 n は $n=2,\ 7$

37 次の問いに答えよ。

(1) $2x^2+7xy+3y^2+11x+13y+12$ を因数分解せよ。

(2) 等式 $2x^2+7xy+3y^2+11x+13y=60$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

解答 (1) $(x+3y+4)(2x+y+3)$ (2) $(x,\ y)=(2,\ 1)$

解説

(1) $2x^2+7xy+3y^2+11x+13y+12$

$=2x^2+(7y+11)x+(3y^2+13y+12)$

$=2x^2+(7y+11)x+(y+3)(3y+4)$

$=\{x+(3y+4)\}\{2x+(y+3)\}$

$=(x+3y+4)(2x+y+3)$

1	$3y+4$	$\longrightarrow$	$6y+8$
2	$y+3$	$\longrightarrow$	$y+3$
2	$(3y+4)(y+3)$		$7y+11$

(2) $2x^2+7xy+3y^2+11x+13y=60$ から

$2x^2+7xy+3y^2+11x+13y+12=72$

(1) の結果から $(x+3y+4)(2x+y+3)=72$ ……①

$x,\ y$ は自然数であるから，$x+3y+4,\ 2x+y+3$ はともに自然数である。

$x+3y+4\geqq 8,\ 2x+y+3\geqq 6$ であるから，① を満たす自然数 $x+3y+4,\ 2x+y+3$ の組は次のようになる。

$(x+3y+4,\ 2x+y+3)=(12,\ 6),\ (9,\ 8),\ (8,\ 9)$

[1] $x+3y+4=12,\ 2x+y+3=6$ のとき

整理すると $x+3y=8,\ 2x+y=3$

これを満たす自然数 $x,\ y$ の組は存在しない。

[2] $x+3y+4=9,\ 2x+y+3=8$ のとき

整理すると $x+3y=5,\ 2x+y=5$

これを解くと $x=2,\ y=1$

[3] $x+3y+4=8,\ 2x+y+3=9$ のとき

整理すると $x+3y=4,\ 2x+y=6$

これを満たす自然数 $x,\ y$ の組は存在しない。

[1]～[3] から，求める自然数 $x,\ y$ の組は

$(x,\ y)=(2,\ 1)$

38 次の方程式を満たす整数 $x,\ y$ の組を求めよ。

$$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$$

解答 $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-1,\ 0)$

解説

$(x+2y+a)(2x-y+b)=2x^2+3xy-2y^2+(2a+b)x+(-a+2b)y+ab$

である。$2a+b=-3,\ -a+2b=4$ とすると $a=-2,\ b=1$

ゆえに $(x+2y-2)(2x-y+1)=2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2$ ……①

方程式は $(2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2)-3=0$

① を代入して $(x+2y-2)(2x-y+1)=3$

$x,\ y$ は整数であるから，$x+2y-2,\ 2x-y+1$ も整数である。

よって，次のような表が得られる。

$x+2y-2$	1	3	-1	-3
$2x-y+1$	3	1	-3	-1
$x+2y$	3	5	1	-1
$2x-y$	2	0	-4	-2
$5x$	7	5	-7	-5
x	$\frac{7}{5}$	1	$-\frac{7}{5}$	-1
y		2		0

したがって $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-1,\ 0)$

39 次の方程式を満たす整数 $x,\ y$ の組を求めよ。

$$3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-28=0$$

解答 $(x,\ y)=(4,\ -3),\ (4,\ 3)$

解説

$3x^2+4xy-4y^2=(x+2y)(3x-2y)$ である。

$(x+2y+a)(3x-2y+b)=3x^2+4xy-4y^2+(3a+b)x+(-2a+2b)y+ab$ であり，

$3a+b=4,\ -2a+2b=-16$ とすると $a=3,\ b=-5$

ゆえに $(x+2y+3)(3x-2y-5)=3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-15$ ……①

方程式は $(3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-15)-13=0$

① を代入して $(x+2y+3)(3x-2y-5)=13$

$x,\ y$ は整数であるから，$x+2y+3,\ 3x-2y-5$ も整数である。

よって，次のような表が得られる。

$x+2y+3$	1	13	-1	-13
$3x-2y-5$	13	1	-13	-1
$x+2y$	-2	10	-4	-16
$3x-2y$	18	6	-8	4
$4x$	16	16	-12	-12
x	4	4	-3	-3
y	-3	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{2}$

したがって $(x,\ y)=(4,\ -3),\ (4,\ 3)$

40 (1) $P=2x^2+11xy+12y^2-5y-2$ を因数分解せよ。

(2) $P=56$ を満たす自然数 $x,\ y$ の値を求めよ。

解答 (1) $P=(x+4y+1)(2x+3y-2)$ (2) $x=3,\ y=1$

解説

(1) $P=2x^2+11yx+(4y+1)(3y-2)$

$=(x+4y+1)(2x+3y-2)$

$$\begin{array}{lll} 1 \diagdown\!\!\!\!\diagup & 4y+1 & \longrightarrow 8y+2 \\ 2 & 3y-2 & \longrightarrow 3y-2 \\ \hline 2 & (4y+1)(3y-2) & \quad 11y \end{array}$$

(2)　x, y は自然数であるから　$x \geqq 1$, $y \geqq 1$

また，$x+4y+1$, $2x+3y-2$ は整数であり

$x+4y+1 \geqq 1+4\cdot1+1=6$

$2x+3y-2 \geqq 2\cdot1+3\cdot1-2=3$

よって，$P=56$ を満たす整数 $x+4y+1$, $2x+3y-2$ の組は

$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(7,\ 8),\ (8,\ 7),\ (14,\ 4)$

[1]　$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(7,\ 8)$ のとき

$x=\dfrac{22}{5}$, $y=\dfrac{2}{5}$

x, y は自然数であるから，不適。

[2]　$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(8,\ 7)$ のとき

$x=3$, $y=1$

x, y は自然数であるから，適する。

[3]　$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(14,\ 4)$ のとき

$x=-3$, $y=4$

x, y は自然数であるから，不適。

[1]，[2]，[3] から，$P=56$ を満たす自然数 x, y の値は

$x=3$, $y=1$

$\boxed{41}$ 次の等式を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

(1)　$x^2+2xy-3y^2=5$　　　(2)　$x^2+2xy-3y^2+2x+14y=15$

解答　(1)　$(x,\ y)=(4,\ -1),\ (2,\ 1),\ (-4,\ 1),\ (-2,\ -1)$

(2)　$(x,\ y)=(3,\ 0),\ (0,\ 3),\ (-8,\ 3),\ (-5,\ 0)$

解説

(1)　左辺を因数分解すると　$(x+3y)(x-y)=5$

x, y は整数であるから，$x+3y$, $x-y$ も整数である。

ゆえに　$(x+3y,\ x-y)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(4,\ -1),\ (2,\ 1),\ (-4,\ 1),\ (-2,\ -1)$

(2)　$x^2+2xy-3y^2+2x+14y=15$　…… ①

(1) から，k, l を整数として，① を変形すると次のようになる。

$(x+3y+k)(x-y+l)-kl=15$　…… ②

展開すると　$x^2+2xy-3y^2+(k+l)x+(-k+3l)y=15$　…… ③

①，③ の係数を比較すると　$k+l=2$, $-k+3l=14$

これを解くと　$k=-2$, $l=4$

これを ② に代入して　$(x+3y-2)(x-y+4)=7$

x, y は整数であるから，$x+3y-2$, $x-y+4$ も整数である。

ゆえに　$(x+3y-2,\ x-y+4)=(1,\ 7),\ (7,\ 1),\ (-1,\ -7),\ (-7,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(3,\ 0),\ (0,\ 3),\ (-8,\ 3),\ (-5,\ 0)$

$\boxed{42}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$2x^2+3xy-5=0$　　　(2)　$x^2-xy+3x-3y-2=0$

解答　(1)　$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (5,\ -3),\ (-5,\ 3)$

(2)　$(x,\ y)=(-2,\ -4),\ (-4,\ -2),\ (-1,\ -2),\ (-5,\ -4)$

解説

(1)　移項すると　$2x^2+3xy=5$

左辺を因数分解すると　$x(2x+3y)=5$

x, y は整数であるから，$2x+3y$ も整数である。

ゆえに　$(x,\ 2x+3y)=(1,\ 5),\ (-1,\ -5),\ (5,\ 1),\ (-5,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (5,\ -3),\ (-5,\ 3)$

(2)　移項すると　$x^2-xy+3x-3y=2$

すなわち　$x^2-(y-3)x-3y=2$

左辺を因数分解すると　$(x+3)(x-y)=2$

x, y は整数であるから，$x+3$, $x-y$ も整数である。

ゆえに　$(x+3,\ x-y)=(1,\ 2),\ (-1,\ -2),\ (2,\ 1),\ (-2,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(-2,\ -4),\ (-4,\ -2),\ (-1,\ -2),\ (-5,\ -4)$

$\boxed{43}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$xy-3x-2y-1=0$　　　(2)　$x^2-xy-6y^2+4x-7y=0$

解答　(1)　$(x,\ y)=(3,\ 10),\ (1,\ -4),\ (9,\ 4),\ (-5,\ 2)$

(2)　$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (-4,\ 0)$

解説

(1)　方程式は次のように変形できる。

$(x-2)(y-3)=7$

x, y は整数であるから，$x-2$, $y-3$ も整数である。

ゆえに　$(x-2,\ y-3)=(1,\ 7),\ (-1,\ -7),\ (7,\ 1),\ (-7,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(3,\ 10),\ (1,\ -4),\ (9,\ 4),\ (-5,\ 2)$

(2)　方程式は，k, l を整数として，次のように変形できる。

$(x-3y+k)(x+2y+l)-kl=0$　…… ①

左辺を展開すると　$x^2-xy-6y^2+(k+l)x+(2k-3l)y=0$

与式と係数を比較すると　$k+l=4$,　$2k-3l=-7$

これを解いて　$k=1$, $l=3$

これらを ① に代入して　$(x-3y+1)(x+2y+3)=3$

x, y は整数であるから，$x-3y+1$, $x+2y+3$ も整数である。

ゆえに　$(x-3y+1,\ x+2y+3)=(1,\ 3),\ (-1,\ -3),\ (3,\ 1),\ (-3,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(0,\ 0),\ \left(-\dfrac{22}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right),\ \left(-\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right),\ (-4,\ 0)$

x, y は整数であるから，求める x, y は　$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (-4,\ 0)$

$\boxed{44}$ 次の等式を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

(1)　$x^2-y^2=21$　　　(2)　$4x^2-y^2=-9$

(3)　$x^2-y^2=28$　　　(4)　$9x^2-4y^2=81$

解答　(1)　$(x,\ y)=(5,\ 2),\ (11,\ 10)$　　(2)　$(x,\ y)=(2,\ 5)$

(3)　$(x,\ y)=(8,\ 6)$　　(4)　$(x,\ y)=(5,\ 6)$

解説

(1)　等式を変形すると　$(x+y)(x-y)=21$

x, y は自然数であるから，$x+y$, $x-y$ は整数で，$x+y>x-y$, $x+y\geqq 2$ である。

ゆえに　$(x+y,\ x-y)=(7,\ 3),\ (21,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(5,\ 2),\ (11,\ 10)$

(2)　等式を変形すると　$(2x+y)(2x-y)=-9$

x, y は自然数であるから，$2x+y$, $2x-y$ は整数で，$2x+y>2x-y$, $2x+y\geqq 3$ である。

ゆえに　$(2x+y,\ 2x-y)=(3,\ -3),\ (9,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(0,\ 3),\ (2,\ 5)$

x, y は自然数であるから　$(x,\ y)=(2,\ 5)$

(3)　等式を変形すると　$(x+y)(x-y)=28$

x, y は自然数であるから，$x+y$, $x-y$ は整数で，$x+y>x-y$, $x+y\geqq 2$ である。

ゆえに　$(x+y,\ x-y)=(7,\ 4),\ (14,\ 2),\ (28,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=\left(\dfrac{11}{2},\ \dfrac{3}{2}\right),\ (8,\ 6),\ \left(\dfrac{29}{2},\ \dfrac{27}{2}\right)$

x, y は自然数であるから　$(x,\ y)=(8,\ 6)$

参考　$(x+y)+(x-y)=2x$ であるから，和が偶数となる組 $(x+y,\ x-y)=(14,\ 2)$ に絞り込んでもよい。

(4)　等式を変形すると　$(3x+2y)(3x-2y)=81$

x, y は自然数であるから，$3x+2y$, $3x-2y$ は整数で，$3x+2y>3x-2y$, $3x+2y\geqq 5$ である。

ゆえに　$(3x+2y,\ 3x-2y)=(27,\ 3),\ (81,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(5,\ 6),\ \left(\dfrac{41}{3},\ 20\right)$

x, y は自然数であるから　$(x,\ y)=(5,\ 6)$

参考　$(3x+2y)+(3x-2y)=6x$ であるから，和が 6 の倍数となる組 $(3x+2y,\ 3x-2y)=(27,\ 3)$ に絞り込んでもよい。

$\boxed{45}$ 次の等式を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

(1)　$x^2+2xy-3y^2=5$　　　(2)　$3xy+9x-y-8=0$

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (4,\ -1),\ (-2,\ -1),\ (-4,\ 1)$

(2)　$(x,\ y)=(0,\ -8),\ (2,\ -2)$

解説

(1)　等式を変形すると　$(x-y)(x+3y)=5$

x, y は整数であるから，$x-y$, $x+3y$ も整数である。

よって　$(x-y,\ x+3y)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

したがって　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (4,\ -1),\ (-2,\ -1),\ (-4,\ 1)$

(2)　等式は次のように変形できる。

$(3x-1)(y+3)+3-8=0$

すなわち　$(3x-1)(y+3)=5$

x, y は整数であるから，$3x-1$, $y+3$ も整数である。

ゆえに　$(3x-1,\ y+3)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

したがって　$(x,\ y)=\left(\dfrac{2}{3},\ 2\right),\ (2,\ -2),\ (0,\ -8),\ \left(-\dfrac{4}{3},\ -4\right)$

x, y は整数であるから　$(x,\ y)=(0,\ -8),\ (2,\ -2)$

参考　$3x-1$ は 3 で割ると 2 余る整数であることに着目すると

$(3x-1,\ y+3)=(-1,\ -5),\ (5,\ 1)$