1 (1) 5で割ると2余り，14で割ると5余るような自然数のうち，3桁で最大のものと最小のものを求めよ。

(2) 3で割ると1余り，7で割ると3余るような自然数のうち，3桁で最大のものと最小のものを求めよ。

(3) 8で割ると4余り，13で割ると9余るような自然数のうち，4桁で最大のものと最小のものを求めよ。

解答 最大のもの，最小のものの順に
(1) 957，117　(2) 997，115　(3) 9980，1036

解説

(1) 求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$$n=5x+2,\quad n=14y+5$$

よって　$5x+2=14y+5$

すなわち　$5x-14y=3$ ……①

①の右辺を1とした方程式 $5x-14y=1$ について，$x=3$，$y=1$ はその整数解の1つである。

よって　$5\cdot3-14\cdot1=1$

両辺に3を掛けて　$5\cdot9-14\cdot3=3$ ……②

①−②から　$5(x-9)-14(y-3)=0$

すなわち　$5(x-9)=14(y-3)$

5と14は互いに素であるから，$x-9$ は14の倍数である。

よって，k を整数として，$x-9=14k$ と表される。

ゆえに　$x=14k+9$

したがって　$n=5x+2=5(14k+9)+2=70k+47$

$70k+47$ が3桁で最大の自然数となるのは，$k=13$ のときで　$n=70\cdot13+47=957$

$70k+47$ が3桁で最小の自然数となるのは，$k=1$ のときで　$n=70\cdot1+47=117$

別解 $x=-5$，$y=-2$ が①の整数解の1つであることに気がつけば，次のようになる。

$x=-5$，$y=-2$ は，①の整数解の1つであるから

$$5\cdot(-5)-14\cdot(-2)=3 \quad\cdots\cdots③$$

①−③から　$5(x+5)-14(y+2)=0$

すなわち　$5(x+5)=14(y+2)$

5と14は互いに素であるから，$x+5$ は14の倍数である。

よって，k を整数として，$x+5=14k$ と表される。

ゆえに　$x=14k-5$

したがって　$n=5x+2=5(14k-5)+2=70k-23$

参考 $n+23$ は5でも14でも割り切れるから，k を整数として，$n+23=5\cdot14k$ と表される。

よって　$n=70k-23$

(2) 求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$$n=3x+1,\quad n=7y+3$$

よって　$3x+1=7y+3$

すなわち　$3x-7y=2$ ……①

$x=3$，$y=1$ は，①の整数解の1つであるから　$3\cdot3-7\cdot1=2$ ……②

①−②から　$3(x-3)-7(y-1)=0$

すなわち　$3(x-3)=7(y-1)$

3と7は互いに素であるから，$x-3$ は7の倍数である。

よって，k を整数として，$x-3=7k$ と表される。

ゆえに　$x=7k+3$

したがって　$n=3x+1=3(7k+3)+1=21k+10$

$21k+10$ が3桁で最大の自然数となるのは，$k=47$ のときで　$n=21\cdot47+10=997$

$21k+10$ が3桁で最小の自然数となるのは，$k=5$ のときで　$n=21\cdot5+10=115$

参考 $n-10$ は3でも7でも割り切れるから，k を整数として，$n-10=3\cdot7k$ と表される。

よって　$n=21k+10$

(3) 求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$$n=8x+4,\quad n=13y+9$$

よって　$8x+4=13y+9$

すなわち　$8x-13y=5$ ……①

$x=-1$，$y=-1$ は，①の整数解の1つであるから

$$8\cdot(-1)-13\cdot(-1)=5 \quad\cdots\cdots②$$

①−②から　$8(x+1)-13(y+1)=0$

すなわち　$8(x+1)=13(y+1)$

8と13は互いに素であるから，$x+1$ は13の倍数である。

よって，k を整数として，$x+1=13k$ と表される。

ゆえに　$x=13k-1$

したがって　$n=8x+4=8(13k-1)+4=104k-4$

$104k-4$ が4桁で最大の自然数となるのは，$k=96$ のときで　$n=104\cdot96-4=9980$

$104k-4$ が4桁で最小の自然数となるのは，$k=10$ のときで　$n=104\cdot10-4=1036$

参考 $n+4$ は8でも13でも割り切れるから，k を整数として，$n+4=8\cdot13k$ と表される。

よって　$n=104k-4$

2 6で割ると1余り，11で割ると5余るような自然数のうち，3桁で最小のものを求めよ。

解答 115

解説

求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$$n=6x+1,\quad n=11y+5$$

よって　$6x+1=11y+5$

すなわち　$6x-11y=4$ ……①

①の右辺を1とした方程式 $6x-11y=1$ について，$x=2$，$y=1$ はその整数解の1つである。

よって　$6\cdot2-11\cdot1=1$

両辺に4を掛けて　$6\cdot8-11\cdot4=4$ ……②

①−②から　$6(x-8)-11(y-4)=0$

すなわち　$6(x-8)=11(y-4)$

6と11は互いに素であるから，$x-8$ は11の倍数である。

よって，k を整数として，$x-8=11k$ と表される。

ゆえに　$x=11k+8$

したがって　$n=6x+1=6(11k+8)+1$
$=66k+49$

$66k+49$ が3桁で最小の自然数となるのは，$k=1$ のときで

$n=66\cdot1+49=115$　答 115

3 3で割ると2余り，5で割ると1余り，11で割ると5余る自然数 n のうち，最小のものを求めよ。

解答 71

解説

条件から，n は x，y，z を整数として

$n=3x+2=5y+1=11z+5$　と表される。

$3x+2=5y+1$ から　$3x-5y=-1$

$x=3$，$y=2$ はこの方程式の整数解の1つであるから

$$3(x-3)=5(y-2)$$

3と5は互いに素であるから，k を整数として

$x-3=5k$　すなわち　$x=5k+3$ ……①　と表される。

次に，$3x+2=11z+5$ から　$3x-11z=3$

①を代入して整理すると　$11z-15k=6$

$z=6$，$k=4$ はこの方程式の整数解の1つであるから

$$11(z-6)=15(k-4)$$

11と15は互いに素であるから，l を整数として

$k-4=11l$　すなわち　$k=11l+4$　と表される。

これを①に代入して　$x=5(11l+4)+3=55l+23$

よって　$n=3x+2=3(55l+23)+2=165l+71$

これを満たす自然数 n の最小値は，$l=0$ のときで　71

別解 $3\cdot5\cdot a$ が11で割ると1余るのは　$a=3$　のとき。

$5\cdot11\cdot b$ が3で割ると1余るのは　$b=1$　のとき。

$11\cdot3\cdot c$ が5で割ると1余るのは　$c=2$　のとき。

ゆえに，$m=3\cdot5\cdot3\cdot5+5\cdot11\cdot1\cdot2+11\cdot3\cdot2\cdot1=401$ は，3で割ると2余り，5で割ると1余り，11で割ると5余る数である。

よって，n は k を整数として　$n=401+3\cdot5\cdot11k=401+165k$　と表される。

ゆえに，n が最小の自然数となるのは，$k=-2$ のときで　$401+165\cdot(-2)=71$

参考 合同式を用いた解法

a，b，c を整数として，$p=3\cdot5\cdot a+5\cdot11\cdot b+11\cdot3\cdot c$ ……① とおくと

①から　$p\equiv55b \pmod 3$　ここで，$55b\equiv b \pmod 3$ であるから　$p\equiv b \pmod 3$

よって，$b=2$ とすると，$p=3l+2$（l は整数）と表されるから，p は3で割ると2余る整数となる。

同様にして，①から　$p\equiv33c\equiv3c \pmod 5$

$c=2$ とすると $p=5l'+6=5(l'+1)+1$（l' は整数）と表されるから，p は5で割ると1余る整数となる。

再び，①から　$p\equiv15a\equiv4a \pmod{11}$

$a=4$ とすると $p=11l''+16=11(l''+1)+5$（l'' は整数）と表されるから，p は11で割ると5余る整数となる。

したがって，①で $a=4$，$b=2$，$c=2$ としたときの p の値，すなわち

$15\cdot4+55\cdot2+33\cdot2=60+110+66=236$ は題意を満たす数であるから，k を整数として　$n=236+3\cdot5\cdot11k=236+165k$　と表される。

n が最小の自然数となるのは，$k=-1$ のときで　$236+165\cdot(-1)=71$

4 3で割ると2余り，5で割ると3余り，7で割ると4余る自然数 n のうち，最小のものを求めよ。

解答 53

解説

条件から，n は x，y，z を整数として，次のように表される。

$$n=3x+2,\quad n=5y+3,\quad n=7z+4$$

$3x+2=5y+3$ から　$3x-5y=1$ ……①

$x=2$，$y=1$ は①の整数解の1つであるから

$3(x-2)-5(y-1)=0$　すなわち　$3(x-2)=5(y-1)$

3と5は互いに素であるから，k を整数として $x-2=5k$ と表される。

よって　$x=5k+2$（k は整数）……②

② を $3x+2=7z+4$ に代入して　$3(5k+2)+2=7z+4$

ゆえに　$7z-15k=4$　…… ③

$z=-8$，$k=-4$ は ③ の整数解の 1 つであるから

$7(z+8)-15(k+4)=0$　すなわち　$7(z+8)=15(k+4)$

7 と 15 は互いに素であるから，l を整数として $z+8=15l$ と表される。

よって　$z=15l-8$（l は整数）

これを $n=7z+4$ に代入すると　$n=7(15l-8)+4=105l-52$

最小となる自然数 n は，$l=1$ を代入して　$105\cdot1-52=53$

別解 1．$3\cdot5\cdot a$ が 7 で割ると 1 余るのは　$a=1$ のとき。

$5\cdot7\cdot b$ が 3 で割ると 1 余るのは　$b=2$ のとき。

$7\cdot3\cdot c$ が 5 で割ると 1 余るのは　$c=1$ のとき。

ゆえに，$m=3\cdot5\cdot1\cdot4+5\cdot7\cdot2\cdot2+7\cdot3\cdot1\cdot3=263$ は，3 で割ると 2 余り，5 で割ると 3 余り，7 で割ると 4 余る数である。

よって，n は k を整数として　$n=263+3\cdot5\cdot7k=263+105k$

と表される。

n が最小の自然数となるのは，$k=-2$ のときで　$263+105\cdot(-2)=53$

別解 2．a，b，c を整数として，$p=3\cdot5\cdot a+5\cdot7\cdot b+7\cdot3\cdot c$ …… ① とおくと，① から

$p\equiv35b\pmod 3$

ここで，$35b\equiv2b\pmod 3$ であるから　$p\equiv2b\pmod 3$

よって，$b=1$ とすると，p は 3 で割ると 2 余る数となる。

同様にして，① から　$p\equiv21c\pmod 5$

ここで，$21c\equiv c\pmod 5$ であるから　$p\equiv c\pmod 5$

ゆえに，$c=3$ とすると，p は 5 で割ると 3 余る数となる。

再び，① から　$p\equiv15a\pmod 7$

ここで，$15a\equiv a\pmod 7$ であるから　$p\equiv a\pmod 7$

よって，$a=4$ とすると，p は 7 で割ると 4 余る数となる。

したがって，$3\cdot5\cdot4+5\cdot7\cdot1+7\cdot3\cdot3=158$ は，3 で割ると 2 余り，5 で割ると 3 余り，7 で割ると 4 余る数であるから，n を整数として　$n=158+3\cdot5\cdot7k=158+105k$

と表される。

n が最小の自然数となるのは，$k=-1$ のときで　$158+105\cdot(-1)=53$

$\boxed{5}$ 3 で割ると 2 余り，5 で割ると 1 余り，11 で割ると 5 余る自然数 n のうちで，1000 を超えない最大のものを求めよ。

解答　896

解説

n は x，y，z を整数として，次のように表される。

$n=3x+2$，$n=5y+1$，$n=11z+5$

$3x+2=5y+1$ から　$3x-5y=-1$ …… ①

$x=3$，$y=2$ は，① の整数解の 1 つであるから

$3(x-3)-5(y-2)=0$　すなわち　$3(x-3)=5(y-2)$

3 と 5 は互いに素であるから，k を整数として，$x-3=5k$ と表される。

よって　$x=5k+3$（k は整数）

次に，$3x+2=11z+5$ に $x=5k+3$ を代入して　$3(5k+3)+2=11z+5$

ゆえに　$11z-15k=6$ …… ②

$z=6$，$k=4$ は，② の整数解の 1 つであるから

$11(z-6)-15(k-4)=0$　すなわち　$11(z-6)=15(k-4)$

11 と 15 は互いに素であるから，l を整数として，$z-6=15l$ と表される。

よって　$z=15l+6$（l は整数）

$n=11z+5$ に代入して　$n=11(15l+6)+5=165l+71$

$165l+71<1000$ すなわち $165l<929$ を満たす最大の整数 l は，$l=5$ である。

このとき　$n=165\cdot5+71=896$

$\boxed{6}$ 12 で割ると 1 余り，7 で割ると 4 余る 3 桁の自然数のうち最大の数を求めよ。

解答　949

解説

求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$n=12x+1$，　$n=7y+4$

よって　$12x+1=7y+4$

すなわち　$12x-7y=3$　…… ①

$x=3$，$y=5$ は，$12x-7y=1$ の整数解の 1 つであるから

$12\cdot3-7\cdot5=1$

両辺に 3 を掛けると

$12\cdot9-7\cdot15=3$　…… ②

①−②から　$12(x-9)-7(y-15)=0$

すなわち　$12(x-9)=7(y-15)$　…… ③

12 と 7 は互いに素であるから，③を満たす整数 x は

$x-9=7k$　すなわち　$x=7k+9$（k は整数）

と表される。

したがって　$n=12x+1=12(7k+9)+1=84k+109$

$84k+109$ が 3 桁で最大となるのは，$84k+109\leqq999$ を満たす k が最大のときであり，その値は　$k=10$

このとき　$n=84\cdot10+109=949$

$\boxed{7}$ 11 で割ると 9 余り，5 で割ると 2 余る 3 桁の自然数のうち最大の数を求めよ。

解答　977

解説

求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$n=11x+9$，　$n=5y+2$

よって　$11x+9=5y+2$

すなわち　$5y-11x=7$　…… ①

$y=-2$，$x=-1$ は，$5y-11x=1$ の整数解の 1 つであるから

$5\cdot(-2)-11\cdot(-1)=1$

両辺に 7 を掛けると

$5\cdot(-14)-11\cdot(-7)=7$　…… ②

①−②から　$5(y+14)-11(x+7)=0$

すなわち　$5(y+14)=11(x+7)$　…… ③

5 と 11 は互いに素であるから，③を満たす整数 x は

$x+7=5k$　すなわち　$x=5k-7$（k は整数）

と表される。

したがって　$n=11x+9=11(5k-7)+9=55k-68$

$55k-68$ が 3 桁で最大となるのは，$55k-68\leqq999$ を満たす k が最大のときであり，その値は　$k=19$

このとき　$n=55\cdot19-68=977$

$\boxed{8}$ 11 で割ると 2 余り，6 で割ると 5 余る 4 桁の自然数のうち最大の数を求めよ。

解答　9935

解説

求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$n=11x+2$，　$n=6y+5$

よって　$11x+2=6y+5$

すなわち　$11x-6y=3$　…… ①

$x=-1$，$y=-2$ は，$11x-6y=1$ の整数解の 1 つであるから

$11\cdot(-1)-6\cdot(-2)=1$

両辺に 3 を掛けると

$11\cdot(-3)-6\cdot(-6)=3$　…… ②

①−② から　$11(x+3)-6(y+6)=0$

すなわち　$11(x+3)=6(y+6)$　…… ③

11 と 6 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は

$x+3=6k$　すなわち　$x=6k-3$（k は整数）

と表される。

したがって　$n=11x+2=11(6k-3)+2=66k-31$

$66k-31$ が 4 桁で最大となるのは，$66k-31\leqq9999$ を満たす k が最大のときであり，その値は　$k=151$

このとき　$n=66\cdot151-31=9935$

$\boxed{9}$ 7 で割ると 2 余り，9 で割ると 7 余る自然数 n を，63 で割ったときの余りを求めよ。

解答　16

解説

自然数 n は，x，y を整数として

$n=7x+2$，　$n=9y+7$　と表される。

よって　$7x+2=9y+7$

すなわち　$7x-9y=5$　…… ①

$x=2$，$y=1$ は ① の整数解の 1 つである。

よって　$7\cdot2-9\cdot1=5$　…… ②

①−② から　$7(x-2)-9(y-1)=0$

すなわち　$7(x-2)=9(y-1)$

7 と 9 は互いに素であるから，$x-2$ は 9 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-2=9k$ と表される。

ゆえに，$x=9k+2$ であるから　$n=7(9k+2)+2=63k+16$

したがって，n を 63 で割ったときの余りは　16

$\boxed{10}$ (1)　5 で割ると 4 余り，8 で割ると 3 余るような自然数 n を，40 で割ったときの余りを求めよ。

(2)　4 で割ると 3 余り，9 で割ると 6 余るような自然数のうち，3 桁で最大のものと最小のものを求めよ。

解答　(1)　19　　(2)　最大 987，最小 123

解説

(1)　自然数 n は，x，y を整数として

$n=5x+4$，　$n=8y+3$　と表される。

よって　$5x+4=8y+3$

すなわち　$5x-8y=-1$　…… ①

$x=3$，$y=2$ は ① の整数解の 1 つである。

よって　$5\cdot3-8\cdot2=-1$　…… ②

①−② から　$5(x-3)-8(y-2)=0$

すなわち　$5(x-3)=8(y-2)$

5 と 8 は互いに素であるから，$x-3$ は 8 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-3=8k$ と表される。

ゆえに，$x=8k+3$ であるから

$n=5(8k+3)+4=40k+19$

したがって，n を 40 で割ったときの余りは　19

(2)　求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として　$n=4x+3$，　$n=9y+6$　と表される。

よって　$4x+3=9y+6$

すなわち　$4x-9y=3$　……①
$x=3$，$y=1$ は①の整数解の1つである。
よって　$4\cdot3-9\cdot1=3$　……②
①−② から　$4(x-3)-9(y-1)=0$
すなわち　$4(x-3)=9(y-1)$
4 と 9 は互いに素であるから，k を整数として，$x-3=9k$ と表される。
ゆえに，$x=9k+3$ であるから　$n=4(9k+3)+3=36k+15$
$36k+15\leqq999$ とすると　$k\leqq\dfrac{984}{36}=27.3\cdots\cdots$
よって，$36k+15$ が3桁で最大となるのは，$k=27$ のときで　$n=36\cdot27+15=987$
また，$36k+15$ が3桁で最小となるのは，$k=3$ のときで　$n=36\cdot3+15=123$

11 (1) 13 で割ると 2 余り，9 で割ると 6 余るような自然数のうち，3桁で最大のものと最小のものを求めよ。
(2) 19 で割ると 6 余り，16 で割ると 11 余るような自然数のうち，4桁で最大のものと最小のものを求めよ。

解答　最大のものと最小のものは順に　(1)　951，132　　(2)　9867，1051

解説
(1) 求める自然数を n とすると，n は整数 x，y を用いて，次のように表される。
$n=13x+2$，　$n=9y+6$
よって　$13x+2=9y+6$
すなわち　$13x-9y=4$　……①
$x=1$，$y=1$ は，①の整数解の1つであるから
$13\cdot1-9\cdot1=4$　……②
①−② から　$13(x-1)-9(y-1)=0$　……③
13 と 9 は互いに素であるから，③を満たす整数 x は
$x-1=9k$　すなわち　$x=9k+1$　（k は整数）
と表される。
したがって　$n=13(9k+1)+2=117k+15$
$117k+15$ が3桁で最大となるのは，$k=8$ のときで　$n=117\cdot8+15=951$
$117k+15$ が3桁で最小となるのは，$k=1$ のときで　$n=117\cdot1+15=132$
(2) 求める自然数を n とすると，n は整数 x，y を用いて，次のように表される。
$n=19x+6$，　$n=16y+11$
よって　$19x+6=16y+11$
すなわち　$19x-16y=5$　……①
$x=-5$，$y=-6$ は，$19x-16y=1$ の整数解の1つであるから
$19\cdot(-5)-16\cdot(-6)=1$
両辺に 5 を掛けると　$19\cdot(-25)-16\cdot(-30)=5$　……②
①−② から　$19(x+25)-16(y+30)=0$　……③
19 と 16 は互いに素であるから，③を満たす整数 x は
$x+25=16k$　すなわち　$x=16k-25$　（k は整数）
と表される。
したがって　$n=19(16k-25)+6=304k-469$
$304k-469$ が4桁で最大となるのは，$k=34$ のときで　$n=304\cdot34-469=9867$
$304k-469$ が4桁で最小となるのは，$k=5$ のときで　$n=304\cdot5-469=1051$

12 7 で割ると 5 余り，13 で割ると 8 余るような自然数のうち，3桁で最大のものを求めよ。

解答　957

解説
求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。
$n=7x+5$，　$n=13y+8$
よって　$7x+5=13y+8$
すなわち　$7x-13y=3$　……①
①の右辺を 1 とした方程式 $7x-13y=1$ について，$x=2$，$y=1$ はその整数解の1つである。
よって　$7\cdot2-13\cdot1=1$
両辺に 3 を掛けて　$7\cdot6-13\cdot3=3$　……②
①−② から　$7(x-6)-13(y-3)=0$
すなわち　$7(x-6)=13(y-3)$
7 と 13 は互いに素であるから，$x-6$ は 13 の倍数である。
よって，k を整数として，$x-6=13k$ と表される。
ゆえに　$x=13k+6$
したがって　$n=7x+5=7(13k+6)+5=91k+47$
$91k+47$ が3桁で最大の自然数となるのは，$k=10$ のときで
$n=91\cdot10+47=957$　　答　957

13 9 で割ると 4 余り，5 で割ると 3 余る自然数 n を，45 で割ったときの余りを求めよ。

解答　13

解説
$n=9x+4$，$n=5y+3$（x，y は整数）とおけるから
$9x+4=5y+3$　すなわち　$9x-5y=-1$　……①
$x=1$，$y=2$ は，①の整数解の1つである。
よって　$9\cdot1-5\cdot2=-1$　……②
①−② から　$9(x-1)-5(y-2)=0$
すなわち　$9(x-1)=5(y-2)$
9 と 5 は互いに素であるから，$x-1$ は 5 の倍数である。
よって，k を整数として，$x-1=5k$ と表される。
ゆえに　$x=5k+1$
よって　$n=9x+4=9(5k+1)+4=45k+13$
したがって，求める余りは　13

14 11 で割ると 1 余り，5 で割ると 4 余る自然数のうち，3桁で最小のものを求めよ。

解答　144

解説
求める自然数を n とすると，n は整数 x，y を用いて，次のように表される。
$n=11x+1$，$n=5y+4$
よって　$11x+1=5y+4$
すなわち　$11x-5y=3$　……①
$x=1$，$y=2$ は，$11x-5y=1$ の整数解の1つであるから
$11\cdot1-5\cdot2=1$
両辺に 3 を掛けると
$11\cdot3-5\cdot6=3$　……②
①−② から　$11(x-3)-5(y-6)=0$　……③
11 と 5 は互いに素であるから，③を満たす整数 x は
$x-3=5k$　すなわち　$x=5k+3$　（k は整数）
と表される。
したがって　$n=11x+1=11(5k+3)+1=55k+34$
$55k+34$ が3桁で最小の自然数となるのは，$k=2$ のときで
$n=55\cdot2+34=144$　　答　144

15 3 で割ると 2 余り，4 で割ると 3 余る自然数のうち，3桁で最大のものを求めよ。

解答　995

解説
求める自然数を n とすると，n は整数 x，y を用いて，次のように表される。
$n=3x+2$，$n=4y+3$
よって　$3x+2=4y+3$
すなわち　$3x-4y=1$　……①
$x=-1$，$y=-1$ は①の整数解の1つであるから
$3\cdot(-1)-4\cdot(-1)=1$　……②
①−② から　$3(x+1)-4(y+1)=0$　……③
3 と 4 は互いに素であるから，③を満たす整数 x は
$x+1=4k$　すなわち　$x=4k-1$　（k は整数）
と表される。
したがって　$n=3x+2=3(4k-1)+2=12k-1$
$12k-1$ が3桁で最大の自然数となるのは，$k=83$ のときで
$n=12\cdot83-1=995$　　答　995

16 5 で割ると 2 余り，7 で割ると 4 余り，11 で割ると 8 余るような自然数 n で最小のものを求めよ。

解答　$n=382$

解説
求める自然数を n とすると，n は x，y，z を整数として，次のように表される。
$n=5x+2$，　$n=7y+4$，　$n=11z+8$
よって　$5x+2=7y+4=11z+8$
$5x+2=7y+4$ から　$5x-7y=2$　……①
$x=6$，$y=4$ は，①の整数解の1つである。
よって　$5\cdot6-7\cdot4=2$　……②
①−② から　$5(x-6)-7(y-4)=0$
すなわち　$5(x-6)=7(y-4)$
5 と 7 は互いに素であるから，$x-6$ は 7 の倍数である。
よって，k を整数として，$x-6=7k$ と表される。
ゆえに　$x=7k+6$
したがって　$n=5(7k+6)+2=35k+32$
$35k+32=11z+8$ から　$11z-35k=24$　……③
$z=-1$，$k=-1$ は，③の整数解の1つである。
よって　$11\cdot(-1)-35\cdot(-1)=24$　……④
③−④ から　$11(z+1)-35(k+1)=0$
すなわち　$11(z+1)=35(k+1)$
11 と 35 は互いに素であるから，$k+1$ は 11 の倍数である。
よって，l を整数として，$k+1=11l$ と表される。
ゆえに　$k=11l-1$
したがって　$n=35(11l-1)+32=385l-3$
$385l-3$ が自然数で最小となるのは，$l=1$ のときで　$n=385\cdot1-3=382$
別解　$n+3$ は 5 でも 7 でも 11 でも割り切れるから，$n+3$ が最小となるのは，5 と 7 と 11 の最小公倍数になるときである。
ゆえに　$n+3=5\cdot7\cdot11$
よって　$n=385-3=382$

17 5 で割ると 2 余り，7 で割ると 4 余り，11 で割ると 8 余るような自然数のうち，4桁で最小のものを求めよ。

解答　1152

解説
求める自然数を n とすると，n は x，y，z を整数として，次のように表される。
$n=5x+2$，　$n=7y+4$，　$n=11z+8$

よって　$5x+2=7y+4=11z+8$

$5x+2=7y+4$ から　$5x-7y=2$　……①

$x=-1$，$y=-1$ は①の整数解の1つである。

よって　$5\cdot(-1)-7\cdot(-1)=2$　……②

①−②から　$5(x+1)-7(y+1)=0$

すなわち　$5(x+1)=7(y+1)$

5と7は互いに素であるから，$x+1$ は7の倍数である。

よって，k を整数として，$x+1=7k$ と表される。

ゆえに，$x=7k-1$ であるから　$n=5(7k-1)+2=35k-3$

$35k-3=11z+8$ から　$35k=11(z+1)$

35と11は互いに素であるから，k は11の倍数である。

よって，l を整数として，$k=11l$ と表されるから

$$n=35\cdot 11l-3=385l-3$$

$385l-3$ が4桁で最小となるのは，$l=3$ のときで　$n=385\cdot 3-3=1152$

別解　余りの条件から，$n+3$ は5でも7でも11でも割り切れる。

5，7，11はどれも素数であるから，k を整数として　$n+3=5\cdot 7\cdot 11k$　と表される。

よって　$n=385k-3$

$385k-3$ が4桁で最小となるのは，$k=3$ のときで　$n=385\cdot 3-3=1152$

18 5で割ると2余り，7で割ると4余り，11で割ると8余るような自然数 n で最小のものを求めよ。

解答　382

解説

n は整数 x，y，z を用いて，次のように表される。

$n=5x+2$　……①

$n=7y+4$　……②

$n=11z+8$　……③

①，②から　$5x+2=7y+4$

すなわち　$5x-7y=2$　……④

$x=6$，$y=4$ は，④の整数解の1つであるから

$5\cdot 6-7\cdot 4=2$　……⑤

④−⑤から　$5(x-6)-7(y-4)=0$　……⑥

5と7は互いに素であるから，⑥を満たす整数 x は，次のように表される。

$x-6=7k$　すなわち　$x=7k+6$　(k は整数)

このとき　$n=5x+2=5(7k+6)+2=35k+32$

③から　$35k+32=11z+8$

すなわち　$35k-11z=-24$　……⑦

$k=-1$，$z=-1$ は，⑦の整数解の1つであるから

$35\cdot(-1)-11\cdot(-1)=-24$　……⑧

⑦−⑧から　$35(k+1)-11(z+1)=0$　……⑨

35と11は互いに素であるから，⑨を満たす整数 k は，次のように表される。

$k+1=11l$　すなわち　$k=11l-1$　(l は整数)

このとき　$n=35k+32=35(11l-1)+32=385l-3$

よって，自然数 n は $l=1$ のとき最小となるから，求める n は

$n=385\cdot 1-3=382$

別解　n は整数 x，y，z を用いて，次のように表される。

$n=5x+2$，　$n=7y+4$，　$n=11z+8$

よって　$n+3=5x+5=5(x+1)$

$n+3=7y+7=7(y+1)$

$n+3=11z+11=11(z+1)$

したがって，$n+3$ は5，7，11の公倍数である。

求める n は，$n+3$ が5，7，11の最小公倍数のときであるから

$n=5\cdot 7\cdot 11-3=382$

19 5で割ると3余り，8で割ると4余り，13で割ると9余るような自然数 n で最小のものを求めよ。

解答　$n=308$

解説

求める自然数を n とすると，n は x，y，z を整数として，次のように表される。

$n=5x+3$，　$n=8y+4$，　$n=13z+9$

よって　$5x+3=8y+4=13z+9$

$5x+3=8y+4$ から　$5x-8y=1$　……①

$x=5$，$y=3$ は，①の整数解の1つである。

よって　$5\cdot 5-8\cdot 3=1$　……②

①−②から　$5(x-5)-8(y-3)=0$

5と8は互いに素であるから，

$x-5=8k$　すなわち　$x=8k+5$　(k は整数)

と表される。

したがって　$n=5(8k+5)+3=40k+28$

$40k+28=13z+9$ から　$13z-40k=19$　……③

$z=-3$，$k=-1$ は，$13z-40k=1$ の整数解の1つである。

よって　$13\cdot(-3)-40\cdot(-1)=1$

両辺に19を掛けると　$13\cdot(-57)-40\cdot(-19)=19$　……④

③−④から　$13(z+57)-40(k+19)=0$

13と40は互いに素であるから，$k+19$ は13の倍数である。

よって，$k+19=13l$ (l は整数) と表される。

ゆえに　$k=13l-19$

したがって　$n=40(13l-19)+28=520l-732$

$520l-732$ が自然数で最小となるのは，$l=2$ のときで

$n=520\cdot 2-732=308$

20 次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$7x+2y=41$　　(2)　$3x+4y=36$　　(3)　$4x+5y=100$

解答　(1)　$(x,\ y)=(1,\ 17)$，$(3,\ 10)$，$(5,\ 3)$　(2)　$(x,\ y)=(4,\ 6)$，$(8,\ 3)$

(3)　$(x,\ y)=(5,\ 16)$，$(10,\ 12)$，$(15,\ 8)$，$(20,\ 4)$

解説

(1)　$7x+2y=41$ から　$2y=41-7x$　……①

$y>0$ であるから　$41-7x>0$　ゆえに　$x<\frac{41}{7}=5.8\cdots\cdots$

①において，$2y$ は偶数であるから，$41-7x$ は偶数である。

よって　$x=1,\ 3,\ 5$

①から　$x=1$ のとき　$y=17$，

$x=3$ のとき　$y=10$，　$x=5$ のとき　$y=3$

したがって　$(x,\ y)=(1,\ 17)$，$(3,\ 10)$，$(5,\ 3)$

(2)　$3x+4y=36$ から　$3x=4(9-y)$　……①

$x>0$ であるから　$4(9-y)>0$　ゆえに　$y<9$

①において，$3x$ は3の倍数であるから，$4(9-y)$ は3の倍数である。

よって　$y=3,\ 6$

①から　$y=3$ のとき　$x=8$，　$y=6$ のとき　$x=4$

したがって　$(x,\ y)=(4,\ 6)$，$(8,\ 3)$

(3)　$4x+5y=100$ から　$4x=5(20-y)$　……①

$x>0$ であるから　$5(20-y)>0$　ゆえに　$y<20$

①において，$4x$ は4の倍数であるから，$5(20-y)$ は4の倍数である。

よって　$y=4,\ 8,\ 12,\ 16$

①から　$y=4$ のとき　$x=20$，　$y=8$ のとき　$x=15$，

$y=12$ のとき　$x=10$，　$y=16$ のとき　$x=5$

したがって　$(x,\ y)=(5,\ 16)$，$(10,\ 12)$，$(15,\ 8)$，$(20,\ 4)$

21 次の問いに答えよ。ただし，消費税は考えないものとする。

(1)　所持金660円で1個50円の商品Aと1個80円の商品Bを買う。所持金をちょうど使い切るとき，商品Aと商品Bをそれぞれ何個買えばよいか。

(2)　1個130円のりんごと1個40円のみかんを何個か買うと合計金額がちょうど1450円になるようにしたい。りんごとみかんをそれぞれ何個買えばよいか。

(3)　4人の生徒に1本50円の鉛筆と1冊70円のノートを買って配りたい。鉛筆が1人1人の生徒に同じ本数ずつ渡るように，また，ノートも1人1人の生徒に同じ冊数ずつ渡るように買ったところ，代金の合計が1640円になった。買った鉛筆の本数とノートの冊数をそれぞれ求めよ。

解答　(1)　商品Aと商品Bの個数は，それぞれ　2個，7個　または　10個，2個

(2)　りんごとみかんの個数は，それぞれ　1個，33個　または　5個，20個　または　9個，7個

(3)　鉛筆は16本，ノートは12冊

解説

(1)　商品Aを x 個，商品Bを y 個買うとすると，次の式が成り立つ。

$50x+80y=660$

両辺を10で割ると　$5x+8y=66$

変形すると　$5x=2(33-4y)$　……①

$x>0$ であるから　$2(33-4y)>0$

ゆえに　$y<\frac{33}{4}=8.25$

①において，$5x$ は5の倍数であるから，$2(33-4y)$ は5の倍数である。

よって　$y=2,\ 7$

①から　$y=2$ のとき　$x=10$，　$y=7$ のとき　$x=2$

したがって，商品Aと商品Bの個数は，それぞれ

2個，7個　または　10個，2個

別解　商品Aを x 個，商品Bを y 個買うとすると，次の式が成り立つ。

$50x+80y=660$

両辺を10で割ると　$5x+8y=66$　……①

$x=2$，$y=7$ は，①の整数解の1つである。

よって　$5\cdot 2+8\cdot 7=66$　……②

①−②から　$5(x-2)+8(y-7)=0$

すなわち　$5(x-2)=-8(y-7)$

5と8は互いに素であるから，k を整数として　$x-2=8k$，$y-7=-5k$

したがって　$x=8k+2$，$y=-5k+7$　……③

$x\geqq 1$，$y\geqq 1$ であるから　$8k+2\geqq 1$，$-5k+7\geqq 1$

これを解くと　$-\frac{1}{8}\leqq k\leqq\frac{6}{5}$

これを満たす整数 k は　$k=0,\ 1$

このとき，③から　$(x,\ y)=(2,\ 7)$，$(10,\ 2)$

したがって，商品Aと商品Bの個数は，それぞれ

2個，7個　または　10個，2個

(2)　りんごを x 個，みかんを y 個買うとすると，次の式が成り立つ。

$130x+40y=1450$

両辺を10で割ると　$13x+4y=145$

変形すると　$4y=145-13x$　……①

$y>0$ であるから　$145-13x>0$

ゆえに　　$x<\frac{145}{13}=11.1\cdots\cdots$

① において，$4y$ は 4 の倍数であるから，$145-13x$ は 4 の倍数である。

よって　　$x=1,\ 5,\ 9$

① から　　$x=1$ のとき　$y=33$，　$x=5$ のとき　$y=20$，　$x=9$ のとき　$y=7$

したがって，りんごとみかんの個数は，それぞれ

1 個，33 個　または　5 個，20 個　または　9 個，7 個

別解　りんごを x 個，みかんを y 個買うとすると，次の式が成り立つ。

$$130x+40y=1450$$

両辺を 10 で割ると　　$13x+4y=145$　……①

$x=5,\ y=20$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　　$13\cdot5+4\cdot20=145$　……②

①－② から　　$13(x-5)+4(y-20)=0$

すなわち　　$13(x-5)=-4(y-20)$

13 と 4 は互いに素であるから，k を整数として　　$x-5=4k,\ y-20=-13k$

したがって　　$x=4k+5,\ y=-13k+20$　……③

$x\geqq1,\ y\geqq1$ であるから　　$4k+5\geqq1,\ -13k+20\geqq1$

これを解くと　　$-1\leqq k\leqq\frac{19}{13}$

これを満たす整数 k は　　$k=-1,\ 0,\ 1$

このとき，③ から　　$(x,\ y)=(1,\ 33),\ (5,\ 20),\ (9,\ 7)$

したがって，りんごとみかんの個数は，それぞれ

1 個，33 個　または　5 個，20 個　または　9 個，7 個

参考　$13x+4y=145$ の整数解の 1 つが $x=5,\ y=20$ であることに気がつかない場合は，$13x+4y=1$ の整数解から考えてもよい。

ただし，計算は少し面倒になる。

(3)　生徒 1 人あたりの鉛筆の本数を x 本，ノートの冊数を y 冊とすると，次の式が成り立つ。

$$50\times4x+70\times4y=1640$$

両辺を 40 で割ると　　$5x+7y=41$

変形すると　　$5x=41-7y$　……①

$x>0$ であるから　　$41-7y>0$

ゆえに　　$y<\frac{41}{7}=5.8\cdots\cdots$

① において，$5x$ は 5 の倍数であるから，$41-7y$ は 5 の倍数である。

よって　　$y=3$

このとき，① から　　$x=4$

したがって，鉛筆の本数は　　$4x=16$ (本),

ノートの冊数は　　$4y=12$ (冊)

別解　生徒 1 人あたりの鉛筆の本数を x 本，ノートの冊数を y 冊とすると，次の式が成り立つ。

$$50\times4x+70\times4y=1640$$

両辺を 40 で割ると　　$5x+7y=41$　……①

$x=4,\ y=3$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　　$5\cdot4+7\cdot3=41$　……②

①－② から　　$5(x-4)+7(y-3)=0$

すなわち　　$5(x-4)=-7(y-3)$

5 と 7 は互いに素であるから，k を整数として　　$x-4=7k,\ y-3=-5k$

したがって　　$x=7k+4,\ y=-5k+3$　……③

$x\geqq1,\ y\geqq1$ であるから　　$7k+4\geqq1,\ -5k+3\geqq1$

これを解くと　　$-\frac{3}{7}\leqq k\leqq\frac{2}{5}$

これを満たす整数 k は　　$k=0$

このとき，③ から　　$x=4,\ y=3$

したがって，鉛筆の本数は　　$4x=16$ (本),

ノートの冊数は　　$4y=12$ (冊)

22 整数 $x,\ y$ は $0\leqq x\leqq50,\ 0\leqq y\leqq50$ の範囲にあるとする。このとき，$4x-9y=5$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y)=(8,\ 3),\ (17,\ 7),\ (26,\ 11),\ (35,\ 15),\ (44,\ 19)$

解説

$4x-9y=5$　……①

$x=-1,\ y=-1$ は ① の 1 つの整数解である。

よって　　$4\cdot(-1)-9\cdot(-1)=5$　……②

①－② から　　$4(x+1)-9(y+1)=0$　……③

4 と 9 は互いに素であるから，③ より

$x+1=9k,\ y+1=4k$　(k は整数)

したがって，① のすべての整数解は

$x=9k-1,\ y=4k-1$　(k は整数)

$0\leqq x\leqq50,\ 0\leqq y\leqq50$ を満たすのは $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のときであるから，求める整数解は　　$(x,\ y)=(8,\ 3),\ (17,\ 7),\ (26,\ 11),\ (35,\ 15),\ (44,\ 19)$

23 次の等式を満たす自然数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

(1)　$5x+2y=30$　　(2)　$4x+7y=91$　　(3)　$9x+2y=61$

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 10),\ (4,\ 5)$　　(2)　$(x,\ y)=(21,\ 1),\ (14,\ 5),\ (7,\ 9)$

(3)　$(x,\ y)=(1,\ 26),\ (3,\ 17),\ (5,\ 8)$

解説

(1)　$5x+2y=30$ から　　$2y=5(6-x)$　……①

$y>0$ であるから　　$5(6-x)>0$

ゆえに　　$x<6$

また，① において，2 と 5 は互いに素であるから，$6-x$ は 2 の倍数，すなわち偶数である。

よって　　$x=2,\ 4$

① から　　$x=2$ のとき　$y=10$

$x=4$ のとき　$y=5$

したがって　　$(x,\ y)=(2,\ 10),\ (4,\ 5)$

別解　$5x+2y=30$ から　　$2y=5(6-x)$

2 と 5 は互いに素であるから，k を整数として　　$6-x=2k,\ y=5k$

したがって　　$x=-2k+6,\ y=5k$　……①

$x\geqq1,\ y\geqq1$ であるから　　$-2k+6\geqq1,\ 5k\geqq1$

これを解くと　　$\frac{1}{5}\leqq k\leqq\frac{5}{2}$

これを満たす整数 k は　　$k=1,\ 2$

このとき，① から　　$(x,\ y)=(2,\ 10),\ (4,\ 5)$

(2)　$4x+7y=91$ から　　$4x=7(13-y)$　……①

$x>0$ であるから　　$7(13-y)>0$

ゆえに　　$y<13$

また，① において，4 と 7 は互いに素であるから，$13-y$ は 4 の倍数である。

よって　　$y=1,\ 5,\ 9$

① から　　$y=1$ のとき　$x=21$

$y=5$ のとき　$x=14$

$y=9$ のとき　$x=7$

したがって　　$(x,\ y)=(21,\ 1),\ (14,\ 5),\ (7,\ 9)$

参考　(1) の別解と同様に解くこともできる。

(3)　$9x+2y=61$ から　　$2y=61-9x$　……①

$y>0$ であるから　　$61-9x>0$

ゆえに　　$x<\frac{61}{9}=6.7\cdots\cdots$

また，① において，$2y$ は 2 の倍数であるから，$61-9x$ は 2 の倍数，すなわち偶数である。

よって　　$x=1,\ 3,\ 5$

① から　　$x=1$ のとき　$y=26$

$x=3$ のとき　$y=17$

$x=5$ のとき　$y=8$

したがって　　$(x,\ y)=(1,\ 26),\ (3,\ 17),\ (5,\ 8)$

別解　$9x+2y=61$　……①

$x=1,\ y=26$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　　$9\cdot1+2\cdot26=61$　……②

①－② から　　$9(x-1)+2(y-26)=0$

9 と 2 は互いに素であるから，k を整数として　　$x-1=2k,\ y-26=-9k$

したがって　　$x=2k+1,\ y=-9k+26$　……③

$x\geqq1,\ y\geqq1$ であるから　　$2k+1\geqq1,\ -9k+26\geqq1$

これを解くと　　$0\leqq k\leqq\frac{25}{9}$

これを満たす整数 k は　　$k=0,\ 1,\ 2$

このとき，③ から　　$(x,\ y)=(1,\ 26),\ (3,\ 17),\ (5,\ 8)$

24 整数 $x,\ y$ は $0\leqq x\leqq20,\ 0\leqq y\leqq20$ の範囲にあるとする。このとき，$7x-5y=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y)=(3,\ 4),\ (8,\ 11),\ (13,\ 18)$

解説

$7x-5y=1$　……①

$x=3,\ y=4$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　　$7\cdot3-5\cdot4=1$　……②

①－② から　　$7(x-3)-5(y-4)=0$　……③

7 と 5 は互いに素であるから，③ より

$x-3=5k,\ y-4=7k$　(k は整数)

したがって，① のすべての整数解は　　$x=5k+3,\ y=7k+4$　(k は整数)

$0\leqq x\leqq20,\ 0\leqq y\leqq20$ を満たすのは $k=0,\ 1,\ 2$ のときであるから，求める整数解は

$(x,\ y)=(3,\ 4),\ (8,\ 11),\ (13,\ 18)$

25 等式 $3x+2y=15$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y)=(1,\ 6),\ (3,\ 3)$

解説

$3x+2y=15$ から　　$2y=3(5-x)$　……①

$y>0$ であるから　　$3(5-x)>0$　　ゆえに　　$x<5$

また，① において，2 と 3 は互いに素であるから，$5-x$ は 2 の倍数，すなわち偶数である。

よって　　$x=1,\ 3$

したがって　　$(x,\ y)=(1,\ 6),\ (3,\ 3)$

参考　2 と 3 は互いに素であるから，① より　　$y=3k,\ 5-x=2k$　(k は整数)

よって　　$x=-2k+5,\ y=3k$　(k は整数)

$x\geqq1,\ y\geqq1$ であることを利用して，k の値を絞り込んでもよい。

26 $x,\ y,\ z$ を正の整数とする。次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases}x+y+z=19\\x+5y+10z=95\end{cases}$$

解答　$(x,\ y,\ z)=(5,\ 10,\ 4),\ (10,\ 1,\ 8)$

解説

$\begin{cases} x+y+z=19 & \cdots\cdots ① \\ x+5y+10z=95 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とする。

②−① から　$4y+9z=76$　……③

よって　$9z=4(19-y)$　……④

9 と 4 は互いに素であるから，z は 4 の倍数である。

したがって，k を整数として，$z=4k$ と表される。

これを ④ に代入すると　$9\cdot4k=4(19-y)$　すなわち　$19-y=9k$

よって，③ の整数解は　$y=-9k+19,\ z=4k$

これを ① に代入すると　$x+(-9k+19)+4k=19$　すなわち　$x=5k$

$x,\ y,\ z$ は正の整数であるから　$5k>0,\ -9k+19>0,\ 4k>0$

ゆえに　$0<k<\dfrac{10}{9}$

k は整数であるから　$k=1,\ 2$

したがって，求める解は　$(x,\ y,\ z)=(5,\ 10,\ 4),\ (10,\ 1,\ 8)$

27 3 が記されたカードと 7 が記されたカードがそれぞれ何枚ずつかある。3 のカードの枚数は 7 のカードの枚数よりも多く，7 のカードの枚数の 2 倍は，3 のカードの枚数よりも多い。また，各カードに記された数をすべて合計すると 140 になる。このとき，3 のカード，7 のカードの枚数をそれぞれ求めよ。

解答　3 のカードは 21 枚，7 のカードは 11 枚

解説

3，7 のカードの枚数をそれぞれ $x,\ y$ とすると，条件から

$x>y$ ……①，$x<2y$ ……②，$3x+7y=140$ ……③

③ から　$3x=7(20-y)$　……④

3 と 7 は互いに素であるから，x は 7 の倍数である。

ゆえに，$x=7k$（k は整数）として，④ に代入すると

$3\cdot7k=7(20-y)$　すなわち　$y=20-3k$

① から　$7k>20-3k$　　よって　$k>2$　……⑤

② から　$7k<2(20-3k)$　　よって　$k<\dfrac{40}{13}$　……⑥

⑤，⑥ から　$2<k<\dfrac{40}{13}$

$\dfrac{40}{13}=3.07\cdots\cdots$ であり，k は整数であるから　$k=3$

このとき　$x=7\cdot3=21,\ y=20-3\cdot3=11$

したがって，3 のカードは 21 枚，7 のカードは 11 枚ある。

28 どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても $x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。

解答　$x=1,\ 2,\ 4,\ 7$

解説

$m,\ n$ は負でない整数であるから　$m\geqq0,\ n\geqq0$

[1]　$n=0$ とすると　$x=3m$

よって，x が 3 の倍数（$x=3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdots$）のときは，$x=3m+5n$ の形に表すことができる。

[2]　$n=1$ とすると　$x=3m+5=3(m+1)+2$

ここで，$m\geqq0$ より $m+1\geqq1$ であるから　$x\geqq3\cdot1+2=5$

よって，x が 5 以上の 3 で割って 2 余る数（$x=5,\ 8,\ 11,\ \cdots\cdots$）のときは，$x=3m+5n$ の形に表すことができる。

[3]　$n=2$ とすると　$x=3m+10=3(m+3)+1$

ここで，$m\geqq0$ より $m+3\geqq3$ であるから　$x\geqq3\cdot3+1=10$

よって，x が 10 以上の 3 で割って 1 余る数（$x=10,\ 13,\ 16,\ \cdots\cdots$）のときは，$x=3m+5n$ の形に表すことができる。

[1]～[3] により，$x=3,\ 5,\ 6$ と $x\geqq8$ のときは，$x=3m+5n$ の形に表すことができる。

よって，$x=1,\ 2,\ 4,\ 7$ について考えればよい。

$m=0,\ n=0$ のとき　$x=0$

$m=1,\ n=0$ のとき　$x=3$

$m=0,\ n=1$ のとき　$x=5$

$m\geqq1,\ n\geqq1$ のとき　$3m+5n\geqq8$

したがって，$x=3m+5n$ と表すことができない正の整数は

$x=1,\ 2,\ 4,\ 7$

29 次の問いに答えよ。ただし，消費税は考えないものとする。

(1)　所持金 850 円で 40 円のお菓子 A と 90 円のお菓子 B を買う。所持金をちょうど使い切るとき，お菓子 A とお菓子 B をそれぞれ何個買えばよいか。

(2)　1 個 130 円のりんごと 1 個 40 円のみかんを何個か買って合計金額がちょうど 1270 円になるようにしたい。りんごとみかんをそれぞれ何個買えばよいか。

解答　(1)　お菓子 A とお菓子 B を買う個数は，それぞれ 1 個，9 個 または 10 個，5 個 または 19 個，1 個

(2)　りんごとみかんを買う個数は，それぞれ 3 個，22 個 または 7 個，9 個

解説

(1)　40 円のお菓子 A を x 個，90 円のお菓子 B を y 個買うとすると，次の式が成り立つ。

$40x+90y=850$

両辺を 10 で割ると　$4x+9y=85$

変形すると　$4x=85-9y$　……①

$x>0$ であるから　$85-9y>0$

ゆえに　$y<\dfrac{85}{9}=9.4\cdots\cdots$

① において，$4x$ は 4 の倍数であるから，$85-9y$ は 4 の倍数である。

$85-9y$ が 4 の倍数になるには，y が奇数であることが必要であるから

$y=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$

このうち $85-9y$ が 4 の倍数になる y の値は　$y=1,\ 5,\ 9$

① から　$y=1$ のとき　$x=19$

$y=5$ のとき　$x=10$

$y=9$ のとき　$x=1$

したがって，お菓子 A とお菓子 B を買う個数は，それぞれ

1 個，9 個　または　10 個，5 個　または　19 個，1 個

別解　40 円のお菓子 A を x 個，90 円のお菓子 B を y 個買うとすると，次の式が成り立つ。

$40x+90y=850$

両辺を 10 で割ると　$4x+9y=85$　……①

$x=1,\ y=9$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$4\cdot1+9\cdot9=85$　……②

①−② から　$4(x-1)+9(y-9)=0$

4 と 9 は互いに素であるから，k を整数として　$x-1=9k,\ y-9=-4k$

したがって　$x=9k+1,\ y=-4k+9$　……③

$x\geqq1,\ y\geqq1$ であるから　$9k+1\geqq1,\ -4k+9\geqq1$

これを解くと　$0\leqq k\leqq2$

これを満たす整数 k は　$k=0,\ 1,\ 2$

このとき，③ から　$(x,\ y)=(1,\ 9),\ (10,\ 5),\ (19,\ 1)$

したがって，お菓子 A とお菓子 B を買う個数は，それぞれ

1 個，9 個　または　10 個，5 個　または　19 個，1 個

(2)　130 円のりんごを x 個，40 円のみかんを y 個買うとすると，次の式が成り立つ。

$130x+40y=1270$

両辺を 10 で割ると　$13x+4y=127$

変形すると　$4y=127-13x$　……①

$y>0$ であるから　$127-13x>0$

ゆえに　$x<\dfrac{127}{13}=9.7\cdots\cdots$

① において，$4y$ は 4 の倍数であるから，$127-13x$ は 4 の倍数である。

$127-13x$ が 4 の倍数になるには，x が奇数であることが必要であるから

$x=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$

このうち $127-13x$ が 4 の倍数になる x の値は　$x=3,\ 7$

① から　$x=3$ のとき　$y=22$

$x=7$ のとき　$y=9$

したがって，りんごとみかんを買う個数は，それぞれ

3 個，22 個　または　7 個，9 個

別解　130 円のりんごを x 個，40 円のみかんを y 個買うとすると，次の式が成り立つ。

$130x+40y=1270$

両辺を 10 で割ると　$13x+4y=127$　……①

$x=7,\ y=9$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$13\cdot7+4\cdot9=127$　……②

①−② から　$13(x-7)+4(y-9)=0$

13 と 4 は互いに素であるから，k を整数として　$x-7=4k,\ y-9=-13k$

したがって　$x=4k+7,\ y=-13k+9$　……③

$x\geqq1,\ y\geqq1$ であるから　$4k+7\geqq1,\ -13k+9\geqq1$

これを解くと　$-\dfrac{3}{2}\leqq k\leqq\dfrac{8}{13}$

これを満たす整数 k は　$k=-1,\ 0$

このとき，③ から　$(x,\ y)=(3,\ 22),\ (7,\ 9)$

したがって，りんごとみかんを買う個数は，それぞれ

3 個，22 個　または　7 個，9 個

30 500 円，100 円，50 円の硬貨合わせて 20 枚の合計金額が 2500 円であるという。それぞれの枚数を求めよ。

解答　500 円，100 円，50 円硬貨の枚数は，それぞれ

2 枚，12 枚，6 枚　または 3 枚，3 枚，14 枚

解説

500 円，100 円，50 円硬貨の枚数をそれぞれ x 枚，y 枚，z 枚とすると，条件より

$x+y+z=20$　……①

$500x+100y+50z=2500$　……②

② の両辺を 50 で割ると

$10x+2y+z=50$　……③

③−① から　$9x+y=30$　　よって　$y=30-9x$

③−①×2 から　$8x-z=10$　　よって　$z=8x-10$

$y\geqq0,\ z\geqq0$ であるから

$30-9x\geqq0,\ 8x-10\geqq0$

したがって　$\dfrac{5}{4}\leqq x\leqq\dfrac{10}{3}$

$\dfrac{5}{4}=1.25,\ \dfrac{10}{3}=3.3\cdots\cdots$ であり，x は整数であるから　$x=2,\ 3$

$x=2$ のとき　$y=30-9\cdot2=12,\ z=8\cdot2-10=6$

$x=3$ のとき　$y=30-9\cdot3=3,\ z=8\cdot3-10=14$

よって，500 円，100 円，50 円硬貨の枚数は，それぞれ

2 枚，12 枚，6 枚　または　3 枚，3 枚，14 枚

31 縦の長さが 864，横の長さが 1357 である長方形において，長方形をできるだけ大きい正方形で切り取れるだけ切り取る。残った部分の長方形も同様に，その長方形をできるだけ大きい正方形で切り取れるだけ切り取る。この作業を，最初の長方形がすべて正方形で切り取られるまで繰り返す。

(1) 最初に切り取られる正方形の 1 辺の長さを求めよ。また，残った部分の短辺の長さを求めよ。

(2) 切り取られた正方形のうち，最も小さい正方形の面積を求めよ。

(3) 切り取られた正方形は何種類か。

(4) 切り取られた正方形の個数を求めよ。

解答　(1) 正方形の 1 辺の長さは 864，短辺の長さは 493　(2) 1　(3) 7 種類　(4) 34 個

解説

(1) 最初に切り取られる正方形の 1 辺の長さはもとの長方形の短辺の長さに等しいから

864

残った部分の短辺の長さは　$1357-864=493$　…… ①

(2) ① より

$1357=864\cdot 1+493$

と変形でき，この後の作業も同様の式が得られ，これは互除法の計算と対応させることができるから，1357 と 864 に互除法の計算を行うと

$1357=864\cdot 1+493$

$864=493\cdot 1+371$

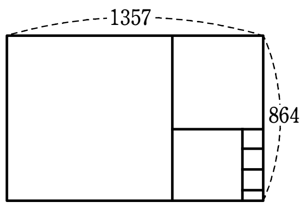
$493=371\cdot 1+122$

$371=122\cdot 3+5$

$122=5\cdot 24+2$

$5=2\cdot 2+1$

$2=1\cdot 2+0$



よって，1357と 864 は互いに素であるから，最も小さい正方形の 1 辺の長さは 1 である。

よって，求める面積は　$1^2=1$

(3) (2) より，1 辺の長さが 864，493，371，122，5，2，1 の正方形で敷き詰められる。

よって　7 種類

(4) (2) より，敷き詰められた正方形の個数は　$1+1+1+3+24+2+2=34$ (個)

32 次の条件を満たす自然数 n をすべて求めよ。

(1) $14n+52$ と $4n+17$ の最大公約数が 5 になるような 50 以下の n

(2) $11n+39$ と $6n+20$ の最大公約数が 7 になるような 100 以下の n

解答　(1) $n=2,\ 12,\ 17,\ 27,\ 32,\ 42,\ 47$　(2) $n=6,\ 20,\ 34,\ 48,\ 62,\ 76,\ 90$

解説

(1) $14n+52=(4n+17)\cdot 3+(2n+1)$

$4n+17=(2n+1)\cdot 2+15$

よって，$14n+52$ と $4n+17$ の最大公約数は，$2n+1$ と 15 の最大公約数に等しい。

したがって，$14n+52$ と $4n+17$ の最大公約数が 5 のとき，$2n+1$ は 5 の倍数であるが，3 の倍数でない。

また，$3\leqq 2n+1\leqq 101$ であり，$2n+1$ は奇数であるから

$2n+1=5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95$

よって　$n=2,\ 12,\ 17,\ 27,\ 32,\ 42,\ 47$

(2) $11n+39=(6n+20)\cdot 1+(5n+19)$

$6n+20=(5n+19)\cdot 1+(n+1)$

$5n+19=(n+1)\cdot 5+14$

よって，$11n+39$ と $6n+20$ の最大公約数は，$n+1$ と 14 の最大公約数に等しい。

したがって，$11n+39$ と $6n+20$ の最大公約数が 7 のとき，$n+1$ は 7 の倍数であるが，2 の倍数でない。

また，$2\leqq n+1\leqq 101$ であるから

$n+1=7,\ 21,\ 35,\ 49,\ 63,\ 77,\ 91$

よって　$n=6,\ 20,\ 34,\ 48,\ 62,\ 76,\ 90$

33 n は自然数とする。$n^2+7n+36$ と $n+5$ の最大公約数として考えられる数をすべて求めよ。

解答　1，2，13，26

解説

$n^2+7n+36=(n+5)(n+2)+26$

よって，$n^2+7n+36$ と $n+5$ の最大公約数は，$n+5$ と 26 の最大公約数に等しい。

したがって，最大公約数として考えられる数は，26 の約数の 1，2，13，26 である。

ここで，$n+5$ と 26 の最大公約数を g とすると，例えば

$n+5=7$　すなわち　$n=2$ のとき　$g=1$

$n+5=6$　すなわち　$n=1$ のとき　$g=2$

$n+5=13$　すなわち　$n=8$ のとき　$g=13$

$n+5=26$　すなわち　$n=21$ のとき　$g=26$

となる。

よって，求める数は　1，2，13，26

34 $7n+50$ と $2n+16$ の最大公約数が 6 になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

解答　$n=4,\ 16,\ 28,\ 40$

解説

$7n+50=(2n+16)\cdot 3+(n+2)$

$2n+16=(n+2)\cdot 2+12$

よって，$7n+50$ と $2n+16$ の最大公約数は，$n+2$ と 12 の最大公約数に等しい。

したがって，$7n+50$ と $2n+16$ の最大公約数が 6 のとき，$n+2$ は，6 の倍数であるが，12 の倍数でない。

また，$3\leqq n+2\leqq 52$ であるから　$n+2=6,\ 18,\ 30,\ 42$

よって　$n=4,\ 16,\ 28,\ 40$

35 (1) 170856 と 164808 の最大公約数を求めよ。

(2) 170856 と 164808 の正の公約数の個数を求めよ。

解答　(1) 1512　(2) 32 個

解説

(1) $170856=164808\cdot 1+6048$

$164808=6048\cdot 27+1512$

$6048=1512\cdot 4+0$

よって，170856 と 164808 の最大公約数は　1512

(2) 170856 と 164808 の正の公約数は 1512 の正の約数である。

$1512=2^3\cdot 3^3\cdot 7$ であるから，求める個数は　$(3+1)(3+1)(1+1)=32$ (個)

36 $4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数が 7 になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

解答　$n=5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ 40,\ 47$

解説

$4n+15=(3n+13)\cdot 1+n+2$

$3n+13=(n+2)\cdot 3+7$

よって，$4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数は $n+2$ と 7 の最大公約数に等しい。

ゆえに，$n+2$ は 7 の倍数である。

また，$3\leqq n+2\leqq 52$ であるから

$n+2=7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49$

したがって　$n=5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ 40,\ 47$

37 $6n+9$ と $5n+8$ が互いに素になるような 100 以下の自然数 n は全部で何個あるか。

解答　67 個

解説

$6n+9=(5n+8)\cdot 1+n+1$

$5n+8=(n+1)\cdot 5+3$

よって，$6n+9$ と $5n+8$ の最大公約数は $n+1$ と 3 の最大公約数に等しい。

ゆえに，$n+1$ と 3 の最大公約数が 1 になるような n の個数を求めればよい。

$2\leqq n+1\leqq 101$ の範囲で，$n+1$ が 3 の倍数となる自然数 n は 33 個ある。

したがって，求める自然数 n の個数は　$100-33=67$ (個)

38 (1) 2 つの整数 m，n の最大公約数と $3m+4n$，$2m+3n$ の最大公約数は一致することを示せ。

(2) $7n+4$ と $8n+5$ が互いに素になるような 100 以下の自然数 n は全部でいくつあるか。

解答　(1) 略　(2) 67 個

解説

2 数 A，B の最大公約数を $(A,\ B)$ で表す。

(1) $3m+4n=(2m+3n)\cdot 1+m+n$，$2m+3n=(m+n)\cdot 2+n$，$m+n=n\cdot 1+m$

よって　$(3m+4n,\ 2m+3n)=(2m+3n,\ m+n)=(m+n,\ n)=(n,\ m)$

したがって，m，n の最大公約数と $3m+4n$，$2m+3n$ の最大公約数は一致する。

別解　$\begin{cases}3m+4n=a\\2m+3n=b\end{cases}$ …… ① とおくと　$\begin{cases}m=3a-4b\\n=3b-2a\end{cases}$ …… ②

m と n の最大公約数を d，a と b の最大公約数を e とする。

① より，a と b は d で割り切れるから，d は a と b の公約数である。

ゆえに　$d\leqq e$　…… ③

同様に，② より，e は m と n の公約数で　$e\leqq d$　…… ④

③，④ から　$d=e$　よって，最大公約数は一致する。

(2) $8n+5=(7n+4)\cdot 1+n+1$，　$7n+4=(n+1)\cdot 7-3$

ゆえに　$(8n+5,\ 7n+4)=(7n+4,\ n+1)=(n+1,\ 3)$

$7n+4$ と $8n+5$ は互いに素であるとき，$n+1$ と 3 も互いに素であるから，$n+1$ と 3 が互いに素であるような n の個数を求めればよい。

$2\leqq n+1\leqq 101$ の範囲に，3 の倍数は 33 個あるから，求める自然数は

$100-33=67$ (個)

39 (1) a，b が互いに素な自然数のとき，$\dfrac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数であることを示せ。

(2) $3n+1$ と $4n+3$ の最大公約数が 5 になるような 50 以下の自然数 n は全部でいくつあるか。

解答　(1) 略　(2) 10 個

解説

2 数 A，B の最大公約数を $(A,\ B)$ で表す。

(1) $3a+7b=(2a+5b)\cdot 1+(a+2b)$，$2a+5b=(a+2b)\cdot 2+b$，$a+2b=b\cdot 2+a$

ゆえに　$(3a+7b,\ 2a+5b)=(2a+5b,\ a+2b)=(a+2b,\ b)=(b,\ a)$

よって，$3a+7b$ と $2a+5b$ の最大公約数は，a と b の最大公約数に一致する。

ここで，a，b は互いに素であるから，$3a+7b$，$2a+5b$ も互いに素である。

したがって，$\dfrac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数である。

別解 $\begin{cases}3a+7b=m\\2a+5b=n\end{cases}$ …… ①とおくと $\begin{cases}a=5m-7n\\b=-2m+3n\end{cases}$ …… ②

m と n の最大公約数を g とする。

② より，$5m-7n$ と $-2m+3n$ はともに g で割り切れる。

すなわち，g は a と b の公約数である。

ここで，a と b は互いに素であるから，a と b の最大公約数は 1 である。

よって　$g=1$

ゆえに，m と n すなわち $3a+7b$ と $2a+5b$ は互いに素である。

したがって，$\dfrac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数である。

(2)　$4n+3=(3n+1)\cdot1+n+2$，$3n+1=(n+2)\cdot3-5$

ゆえに　$(4n+3,\ 3n+1)=(3n+1,\ n+2)=(n+2,\ 5)$

よって，$n+2$ と 5 の最大公約数も 5 であるから，k を整数として，$n+2=5k$ と表される。

$1\leqq n\leqq50$ すなわち $1\leqq5k-2\leqq50$ を満たす整数 k の個数は，$\dfrac{3}{5}\leqq k\leqq\dfrac{52}{5}$ から

$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 10$ の 10 個。

別解　$3n+1=5a$　…… ①，$4n+3=5b$　…… ②　（a，b は互いに素である整数）

①，② から n を消去すると

$-5=20a-15b$　すなわち　$4a-3b=-1$

ゆえに　$4(a+1)-3(b+1)=0$

よって　$a=3k-1$，$b=4k-1$（k は整数）

① に代入して　$3n+1=5(3k-1)$　　ゆえに　$n=5k-2$

以後，上の解答と同じ。

40 n を自然数とするとき，n^2+n+6 と $n+5$ の最大公約数として考えられる数をすべて求めよ。

解答　1，2，13，26

解説

$n^2+n+6=(n+5)(n-4)+26$

よって，n^2+n+6 と $n+5$ の最大公約数は $n+5$ と 26 の最大公約数に等しい。

したがって，最大公約数として考えられる数は，26 の正の約数である 1，2，13，26 である。

41 n を自然数とする。$2n^2+n+4$ と $n+2$ の最大公約数として考えられる数をすべて答えよ。

解答　1，2，5，10

解説

$2n^2+n+4-(n+2)=2n^2+2>0$ より

$2n^2+n+4>n+2$

また　$2n^2+n+4=(n+2)(2n-3)+10$

[1]　$n+2\leqq10$ すなわち $n\leqq8$ のとき

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 8$ について，$n+2$ と $2n^2+n+4$ の最大公約数 g を調べると，次の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n+2$	3	4	5	6	7	8	9	10
$2n^2+n+4$	7	14	25	40	59	82	109	140
g	1	2	5	2	1	2	1	10

よって，1，2，5，10 が最大公約数となりうる。

[2]　$n+2>10$ すなわち $n>8$ のとき

$2n^2+n+4$ を $n+2$ で割ったときの余りが 10 であるから，$2n^2+n+4$ と $n+2$ の最大公約数は，$n+2$ と 10 の最大公約数と等しい。

よって，$2n^2+n+4$ と $n+2$ の最大公約数は，10 の正の約数以外には存在しない。

[1]，[2] より，求める最大公約数は　1，2，5，10

別解　$2n^2+n+4$ と $n+2$ の最大公約数を g とすると，互いに素な自然数 a，b を用いて　$2n^2+n+4=ga$ …… ①，$n+2=gb$ …… ②　と表される。

② から　$n=gb-2$

これを ① に代入して　$2(gb-2)^2+(gb-2)+4=ga$

すなわち　$g(a+7b-2gb^2)=10$

$a+7b-2gb^2$ は整数であるから，g は 10 の約数でなければならない。

$g\geqq1$ であるから　$g=1,\ 2,\ 5,\ 10$

逆に，このとき，①，② から　$a=\dfrac{2n^2+n+4}{g}$，$b=\dfrac{n+2}{g}$

[1]　$g=1$ のとき

$n=1$ とすると，$a=7$，$b=3$ となり，a，b は互いに素な自然数であるから，適する。

[2]　$g=2$ のとき

$n=2$ とすると，$a=7$，$b=2$ となり，a，b は互いに素な自然数であるから，適する。

[3]　$g=5$ のとき

$n=3$ とすると，$a=5$，$b=1$ となり，a，b は互いに素な自然数であるから，適する。

[4]　$g=10$ のとき

$n=8$ とすると，$a=14$，$b=1$ となり，a，b は互いに素な自然数であるから，適する。

以上から，求める最大公約数は　1，2，5，10