$\boxed{1}$ 次の a，b について，a を b で割ったときの商と余りを求めよ。

(1) $a=17$，$b=3$　(2) $a=62$，$b=8$

(3) $a=-24$，$b=5$　(4) $a=-85$，$b=4$

解答 (1) 商は 5，余りは 2　(2) 商は 7，余りは 6　(3) 商は -5，余りは 1
(4) 商は -22，余りは 3

解説

(1) $17=3\cdot5+2$ であるから　17 を 3 で割ったときの商は 5，余りは 2

(2) $62=8\cdot7+6$ であるから　62 を 8 で割ったときの商は 7，余りは 6

(3) $-24=5\cdot(-5)+1$ であるから　-24 を 5 で割ったときの商は -5，余りは 1

(4) $-85=4\cdot(-22)+3$ であるから　-85 を 4 で割ったときの商は -22，余りは 3

$\boxed{2}$ a，b は整数とする。a を 8 で割ると 5 余り，b を 8 で割ると 6 余る。このとき，次の数を 8 で割ったときの余りを求めよ。

(1) $a+b$　(2) $a-b$　(3) $5a+7b$

(4) ab　(5) a^2+b^2　(6) $4a^2-5b^2$

解答 (1) 3　(2) 7　(3) 3　(4) 6　(5) 5　(6) 0

解説

a，b は，k，l を整数として，次のように表される。

$a=8k+5$，　$b=8l+6$

(1) $a+b=(8k+5)+(8l+6)=8(k+l)+5+6=8(k+l+1)+3$

よって，$a+b$ を 8 で割ったときの余りは　3

(2) $a-b=(8k+5)-(8l+6)=8(k-l)+5-6=8(k-l-1)+7$

よって，$a-b$ を 8 で割ったときの余りは　7

(3) $5a+7b=5(8k+5)+7(8l+6)=8(5k+7l)+25+42=8(5k+7l+8)+3$

よって，$5a+7b$ を 8 で割ったときの余りは　3

(4) $ab=(8k+5)(8l+6)=8^2kl+8k\cdot6+5\cdot8l+5\cdot6=8(8kl+6k+5l+3)+6$

よって，ab を 8 で割ったときの余りは　6

(5) $a^2+b^2=(8k+5)^2+(8l+6)^2=(8^2k^2+2\cdot8k\cdot5+5^2)+(8^2l^2+2\cdot8l\cdot6+6^2)$

$=8(8k^2+10k+8l^2+12l)+25+36$

$=8(8k^2+10k+8l^2+12l+7)+5$

よって，a^2+b^2 を 8 で割ったときの余りは　5

(6) $4a^2-5b^2=4(8k+5)^2-5(8l+6)^2=4(8^2k^2+2\cdot8k\cdot5+5^2)-5(8^2l^2+2\cdot8l\cdot6+6^2)$

$=8(32k^2+40k-40l^2-60l)+100-180$

$=8(32k^2+40k-40l^2-60l-10)$

よって，$4a^2-5b^2$ を 8 で割ったときの余りは　0

$\boxed{3}$ 次の a，b について，a を b で割ったときの商と余りを求めよ。

(1) $a=38$，$b=4$　(2) $a=-30$，$b=6$

(3) $a=-18$，$b=5$　(4) $a=-3$，$b=7$

解答 商，余りの順に　(1) 9，2　(2) -5，0　(3) -4，2　(4) -1，4

解説

(1) $38=4\cdot9+2$ であるから，商は 9，余りは 2

(2) $-30=6\cdot(-5)+0$ であるから，商は -5，余りは 0

(3) $-18=5\cdot(-4)+2$ であるから，商は -4，余りは 2

(4) $-3=7\cdot(-1)+4$ であるから，商は -1，余りは 4

$\boxed{4}$ 次の a，b について，a を b で割ったときの商と余りを求めよ。

(1) $a=77$，$b=6$　(2) $a=195$，$b=13$　(3) $a=-60$，$b=7$

解答 (1) 商は 12，余りは 5　(2) 商は 15，余りは 0　(3) 商は -9，余りは 3

解説

(1) $77=6\cdot12+5$ から　商は 12，余りは 5

(2) $195=13\cdot15+0$ から　商は 15，余りは 0

(3) $-60=7\cdot(-9)+3$ から　商は -9，余りは 3

$\boxed{5}$ 次の a，b について，a を b で割ったときの商と余りを求めよ。

(1) $a=23$，$b=5$　(2) $a=55$，$b=8$

(3) $a=-28$，$b=3$　(4) $a=-37$，$b=6$

解答 (1) 商 4，余り 3　(2) 商 6，余り 7　(3) 商 -10，余り 2
(4) 商 -7，余り 5

解説

(1) $23=5\cdot4+3$ であるから，23 を 5 で割ったときの商は 4，余りは 3

(2) $55=8\cdot6+7$ であるから，55 を 8 で割ったときの商は 6，余りは 7

(3) $-28=3\cdot(-10)+2$ であるから，-28 を 3 で割ったときの商は -10，余りは 2

(4) $-37=6\cdot(-7)+5$ であるから，-37 を 6 で割ったときの商は -7，余りは 5

$\boxed{6}$ (1) a，b は整数とする。a を 7 で割ると 2 余り，b を 7 で割ると 5 余る。このとき，
(ア) $2a+b$　(イ) a^{2014}　を 7 で割ったときの余りを求めよ。

(2) n を自然数とするとき，7^n を 5 で割った余りを求めよ。

解答 (1) (ア) 2　(イ) 2
(2) $n=4k-3$ のとき 2，$n=4k-2$ のとき 4，
$n=4k-1$ のとき 3，$n=4k$ のとき 1 (k は自然数)

解説

(1) (ア) $a=7q+2$，$b=7q'+5$ (q，q' は整数) と表される。

$2a+b=2(7q+2)+7q'+5=7(2q+q')+9$

$=7(2q+q'+1)+2$

よって，求める余りは　2

(イ) a^3 を 7 で割った余りは，2^3 を 7 で割った余り 1 に等しい。

また，$2014=3\times671+1$ から　$a^{2014}=(a^3)^{671}a$

ここで，$(a^3)^{671}$ を 7 で割った余りは $(2^3)^{671}$ を 7 で割った余り $1^{671}=1$ に等しい。

よって，a^{2014} を 7 で割った余りは，$(2^3)^{671}$ を 7 で割った余り 1 と a を 7 で割った余り 2 の積 2 である。

(2) 7 を 5 で割った余りは 2 であるから，7^n を 5 で割った余りは 2^n を 5 で割った余りに等しい。

$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8=5+3$，$2^4=16=5\cdot3+1$

であるから，2^n を 5 で割った余りは 2，4，3，1 の 4 つの数字の繰り返しとなる。

よって，7^n を 5 で割った余りは

$n=4k-3$ のとき 2，$n=4k-2$ のとき 4，

$n=4k-1$ のとき 3，$n=4k$ のとき 1　(k は自然数)

$\boxed{7}$ a，b は整数とする。a を 5 で割ると 2 余り，b を 5 で割ると 3 余る。このとき，次の数を 5 で割ったときの余りを求めよ。

(1) $a+b$　(2) $a-2b$　(3) ab　(4) a^{122}

解答 (1) 0　(2) 1　(3) 1　(4) 4

解説

条件から，　$a=5q+2$，$b=5q'+3$　(q，q' は整数)　と表される。

(1) $a+b=5q+2+5q'+3=5(q+q'+1)$

よって，求める余りは　0

(2) $a-2b=5q+2-2(5q'+3)=5(q-2q')-4$

$=5(q-2q'-1)+1$

よって，求める余りは　1

(3) $ab=(5q+2)(5q'+3)=25qq'+15q+10q'+6$

$=5(5qq'+3q+2q'+1)+1$

よって，求める余りは　1

(4) a^4 を 5 で割った余りは，$2^4=16$ を 5 で割った余り 1 に等しい。

また，$122=4\times30+2$ であるから　$a^{122}=(a^4)^{30}a^2$

ここで，$(a^4)^{30}$ を 5 で割った余りは，$(2^4)^{30}$ を 5 で割った余り $1^{30}=1$ に等しい。

よって，a^{122} を 5 で割った余りは，$(2^4)^{30}$ を 5 で割った余り 1 と a^2 を 5 で割った余りとの積に等しい。

ここで，a^2 を 5 で割った余りは，2^2 を 5 で割った余り 4 に等しい。

したがって，求める余りは　$1\times4=4$

$\boxed{8}$ a，b は整数とする。a を 7 で割ると 3 余り，b を 7 で割ると 4 余る。このとき，次の数を 7 で割った余りを求めよ。

(1) $a+2b$　(2) ab　(3) a^4　(4) a^{2019}

解答 (1) 4　(2) 5　(3) 4　(4) 6

解説

$a=7q+3$，$b=7q'+4$ (q，q' は整数) と表される。

(1) $a+2b=7q+3+2(7q'+4)=7(q+2q')+3+8=7(q+2q'+1)+4$

したがって，求める余りは　4

(2) $ab=(7q+3)(7q'+4)=49qq'+7(4q+3q')+12=7(7qq'+4q+3q'+1)+5$

したがって，求める余りは　5

(3) $a^2=(7q+3)^2=49q^2+42q+9=7(7q^2+6q+1)+2$

よって，$a^2=7m+2$ (m は整数) と表されるから

$a^4=(a^2)^2=(7m+2)^2=49m^2+28m+4=7(7m^2+4m)+4$

したがって，求める余りは　4

(4) a^3 を 7 で割った余りは，3^3 を 7 で割った余り 6 に等しい。

よって，$(a^3)^2=a^6$ を 7 で割った余りは，$6^2=36$ を 7 で割った余り 1 に等しい。

$a^{2019}=a^{2016}a^3=(a^6)^{336}\cdot a^3$ であるから，求める余りは，$1^{336}\cdot6=6$ を 7 で割った余りに等しい。したがって，求める余りは　6

別解 [(1)～(3) 割り算の余りの性質を利用した解法]

(1) 2 を 7 で割った余りは 2 ($2=7\cdot0+2$) であるから，$2b$ を 7 で割った余りは $2\cdot4=8$ を 7 で割った余り 1 に等しい。

ゆえに，$a+2b$ を 7 で割った余りは $3+1=4$ を 7 で割った余りに等しい。

よって，求める余りは　4

(2) ab を 7 で割った余りは $3\cdot4=12$ を 7 で割った余りに等しい。

よって，求める余りは　5

(3) a^4 を 7 で割った余りは $3^4=81$ を 7 で割った余りに等しい。

よって，求める余りは　4

$\boxed{9}$ a，b は整数とする。a を 5 で割ると 2 余り，a^2-b を 5 で割ると 3 余る。このとき，次の数を 5 で割った余りを求めよ。

(1) b　(2) $3a-2b$　(3) b^2-4a　(4) a^{299}

解答 (1) 1　(2) 4　(3) 3　(4) 3

解説

$a=5q+2$，$a^2-b=5q'+3$ (q，q' は整数) と表される。

(1) $a^2-b=5q'+3$ から

$b=a^2-(5q'+3)=(5q+2)^2-(5q'+3)=(25q^2+20q+4)-(5q'+3)$

$=5(5q^2+4q-q')+1$

したがって，求める余りは　1

(2) (1) の結果から，$b=5m+1$ (m は整数) と表される。

$3a-2b=3(5q+2)-2(5m+1)=15q+6-10m-2=5(3q-2m)+4$

したがって，求める余りは　4

(3) $b^2-4a=(5m+1)^2-4(5q+2)=25m^2+10m+1-20q-8$

$=5(5m^2+2m-4q-2)+3$

したがって，求める余りは　3

(4) a^2 を 5 で割った余りは，2^2 を 5 で割った余り 4 に等しい。

a^3 を 5 で割った余りは，2^3 を 5 で割った余り 3 に等しい。

a^4 を 5 で割った余りは，$(2^2)^2$ を 5 で割った余り 1 に等しい。

$a^{299}=a^{296}a^3=(a^4)^{74}a^3$ であるから，求める余りは，$1^{74}\cdot 3=3$ を 5 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　3

別解 [(1)～(3) 割り算の余りの性質を利用した解法]

(1) b を 5 で割った余りを r とすると　$r=0, 1, 2, 3, 4$　…… ①

a を 5 で割った余りは 2 であるから，a^2 を 5 で割った余りは，2^2 を 5 で割った余り 4 に等しい。

ゆえに，a^2-b と $4-r$ を 5 で割った余りは等しいから

$4-r=3$　すなわち　$r=1$

これは ① を満たす。

したがって，b を 5 で割った余りは　1

(2) $3a$ を 5 で割った余りは $3\cdot 2=6$ を 5 で割った余り 1 に等しい。

また，$2b$ を 5 で割った余りは $2\cdot 1=2$ を 5 で割った余り 2 に等しい。

ゆえに，$3a-2b$ を 5 で割った余りは $1-2=-1$ を 5 で割った余りに等しい。

$-1=5\cdot(-1)+4$ であるから，求める余りは　4

(3) b^2 を 5 で割った余りは $1^2=1$ を 5 で割った余り 1 に等しい。

また，$4a$ を 5 で割った余りは $4\cdot 2=8$ を 5 で割った余り 3 に等しい。

ゆえに，b^2-4a を 5 で割った余りは $1-8=-7$ を 5 で割った余りに等しい。

$-7=5\cdot(-2)+3$ であるから，求める余りは　3

10 次のような自然数の個数を求めよ。

(1) 108 以下の自然数で，108 と互いに素である自然数

(2) 600 以下の自然数で，600 と互いに素である自然数

解答　(1) 36 個　(2) 160 個

解説

(1) $108=2^2\cdot 3^3$ であるから，108 と互いに素である自然数は，2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数である。

ここで，108 以下の自然数で，2 の倍数または 3 の倍数である数の個数を求める。

2 の倍数の個数は，108 を 2 で割ったときの商で　54

3 の倍数の個数は，108 を 3 で割ったときの商で　36

また，2 の倍数かつ 3 の倍数である数の個数，すなわち 6 の倍数の個数は，108 を 6 で割ったときの商で　18

よって，2 の倍数または 3 の倍数である数の個数は　$54+36-18=72$

したがって，108 以下の自然数で，108 と互いに素である自然数の個数は

$108-72=36$ (個)

(2) $600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$ であるから，600 と互いに素である自然数は，2 の倍数でも 3 の倍数でも 5 の倍数でもない自然数である。

ここで，600 以下の自然数で，2 の倍数または 3 の倍数または 5 の倍数である数の個数を求める。

2 の倍数の個数は，600 を 2 で割ったときの商で　300

3 の倍数の個数は，600 を 3 で割ったときの商で　200

5 の倍数の個数は，600 を 5 で割ったときの商で　120

また，2 の倍数かつ 3 の倍数である数の個数，すなわち 6 の倍数の個数は，600 を 6 で割ったときの商で　100

2 の倍数かつ 5 の倍数である数の個数，すなわち 10 の倍数の個数は，600 を 10 で割ったときの商で　60

3 の倍数かつ 5 の倍数である数の個数，すなわち 15 の倍数の個数は，600 を 15 で割ったときの商で　40

2 の倍数かつ 3 の倍数かつ 5 の倍数である数の個数，すなわち 30 の倍数の個数は，600 を 30 で割ったときの商で　20

よって，2 の倍数または 3 の倍数または 5 の倍数である数の個数は

$300+200+120-100-60-40+20=440$

したがって，600 以下の自然数で，600 と互いに素である自然数の個数は

$600-440=160$ (個)

11 $\dfrac{n}{144}$ が 1 より小さい既約分数となるような正の整数 n は全部で何個あるか。

解答　48 個

解説

n は 143 以下で 144 と互いに素である正の整数である。

$144=2^4\cdot 3^2$ であるから，このような数は，1 から 143 までの 143 個の自然数のうち，偶数または 3 の倍数を除いたものである。

1 から 143 までの自然数のうち，

2 の倍数の個数は，143 を 2 で割った商で　71

3 の倍数の個数は，143 を 3 で割った商で　47

6 の倍数の個数は，143 を 6 で割った商で　23

したがって，求める個数は　$143-(71+47-23)=48$ (個)

参考　n 以下の自然数で，n と互いに素であるものの個数は，次のオイラー関数の性質を利用して求められる。

p は素数，k は自然数のとき　$\phi(p^k)=p^k-p^{k-1}$

p，q は互いに素であるとき　$\phi(pq)=\phi(p)\phi(q)$

これから　$\phi(144)=\phi(2^4\cdot 3^2)=\phi(2^4)\phi(3^2)=(2^4-2^3)(3^2-3^1)=8\cdot 6=48$

12 (1) 56 以下の自然数で，56 と互いに素であるものの個数を求めよ。

(2) 165 以下の自然数で，165 と互いに素であるものの個数を求めよ。

解答　(1) 24 個　(2) 80 個

解説

(1) $56=2^3\cdot 7$

また　$56\div 2=28$，$56\div 7=8$，$56\div(2\cdot 7)=4$

よって，56 以下の自然数で，2 の倍数または 7 の倍数の個数は

$28+8-4=32$

したがって，求める個数は　$56-32=24$ (個)

別解　$56=2^3\cdot 7$

56 以下の自然数のうち，奇数は　$56\div 2=28$ (個)

7 の倍数で奇数は　$56\div 7\div 2=4$ (個)

したがって，求める個数は　$28-4=24$ (個)

(2) $165=3\cdot 5\cdot 11$

また　$165\div 3=55$，$165\div 5=33$，$165\div 11=15$，

$165\div(3\cdot 5)=11$，$165\div(5\cdot 11)=3$，$165\div(11\cdot 3)=5$，

$165\div(3\cdot 5\cdot 11)=1$

よって，165 以下の自然数で，3 の倍数または 5 の倍数または 11 の倍数の個数は

$55+33+15-11-3-5+1=85$

したがって，求める個数は　$165-85=80$ (個)

13 (1) 432 以下の自然数で，432 と互いに素であるものの個数を求めよ。

(2) 735 以下の自然数で，735 と互いに素であるものの個数を求めよ。

解答　(1) 144 個　(2) 336 個

解説

(1) $432=2^4\cdot 3^3$

また　$432\div 2=216$，$432\div 3=144$，$432\div(2\cdot 3)=72$

よって，432 以下の自然数で，2 の倍数または 3 の倍数の個数は

$216+144-72=288$

したがって，求める個数は　$432-288=144$ (個)

別解　$432=2^4\cdot 3^3$

432 以下の自然数のうち，奇数は　$432\div 2=216$ (個)

3 の倍数で奇数は　$432\div 3\div 2=72$ (個)

したがって，求める個数は　$216-72=144$ (個)

(2) $735=3\cdot 5\cdot 7^2$

また　$735\div 3=245$，$735\div 5=147$，$735\div 7=105$，

$735\div(3\cdot 5)=49$，$735\div(5\cdot 7)=21$，$735\div(7\cdot 3)=35$，

$735\div(3\cdot 5\cdot 7)=7$

よって，735 以下の自然数で，3 の倍数または 5 の倍数または 7 の倍数の個数は

$245+147+105-49-21-35+7=399$

したがって，求める個数は　$735-399=336$ (個)

14 (1) 1 から 240 までの 240 個の自然数の積 $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 240$ について，N を素因数分解したとき，素因数 3 の個数を求めよ。

(2) 1 から 450 までの 450 個の自然数の積 $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 450$ について，N を素因数分解したとき，素因数 7 の個数を求めよ。

解答　(1) 116 個　(2) 74 個

解説

(1) 1 から 240 までの 240 個の自然数のうち，

3 の倍数の個数は，240 を 3 で割った商で　80

3^2 の倍数の個数は，240 を 3^2 で割った商で　26

3^3 の倍数の個数は，240 を 3^3 で割った商で　8

3^4 の倍数の個数は，240 を 3^4 で割った商で　2

よって，N を素因数分解したときの素因数 3 の個数は

$80+26+8+2=116$　すなわち　116 個

(2) 1 から 450 までの 450 個の自然数のうち，

7 の倍数の個数は，450 を 7 で割った商で　64

7^2 の倍数の個数は，450 を 7^2 で割った商で　9

7^3 の倍数の個数は，450 を 7^3 で割った商で　1

よって，N を素因数分解したときの素因数 7 の個数は

$64+9+1=74$　すなわち　74 個

15 (1) 20! を計算した結果は，2 で何回割り切れるか。

(2) 25! を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

解答　(1)　18 回　　(2)　6 個

解説

(1)　$20!$ が 2 で割り切れる回数は，$20!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数に一致する。

1 から 20 までの自然数のうち，

2 の倍数の個数は，20 を 2 で割った商で　　10

2^2 の倍数の個数は，20 を 2^2 で割った商で　　5

2^3 の倍数の個数は，20 を 2^3 で割った商で　　2

2^4 の倍数の個数は，20 を 2^4 で割った商で　　1

$20<2^5$ であるから，$2^n\ (n\geqq 5)$ の倍数はない。

よって，素因数 2 の個数は，全部で　　$10+5+2+1=18$ (個)

したがって，$20!$ は 2 で 18 回割り切れる。

(2)　$25!$ を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，$25!$ を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。

1 から 25 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，25 を 5 で割った商で　　5

5^2 の倍数の個数は，25 を 5^2 で割った商で　　1

$25<5^3$ であるから，$5^n\ (n\geqq 3)$ の倍数はない。

よって，素因数 5 の個数は，全部で　　$5+1=6$ (個)

したがって，末尾には 0 が連続して 6 個並ぶ。

16 (1)　${}_{100}\mathrm{C}_{50}$ を素因数分解したとき，累乗 3^b の指数 b を求めよ。

(2)　10^n が $50!$ を割り切るような最大の自然数 n を求めよ。

解答　(1)　$b=4$　　(2)　12

解説

(1)　${}_{100}\mathrm{C}_{50}=\dfrac{100!}{50!(100-50)!}=\dfrac{100!}{(50!)^2}$　…… ①

1 から 100 までの自然数のうち，

3 の倍数の個数は，100 を 3 で割った商で　　33

3^2 の倍数の個数は，100 を 3^2 で割った商で　　11

3^3 の倍数の個数は，100 を 3^3 で割った商で　　3

3^4 の倍数の個数は，100 を 3^4 で割った商で　　1

$100<3^5$ であるから，$3^n\ (n\geqq 5)$ の倍数はない。

よって，$100!$ を素因数分解したときの，素因数 3 の個数は　　$33+11+3+1=48$ (個)

また，1 から 50 までの自然数のうち，

3 の倍数の個数は，50 を 3 で割った商で　　16

3^2 の倍数の個数は，50 を 3^2 で割った商で　　5

3^3 の倍数の個数は，50 を 3^3 で割った商で　　1

$50<3^4$ であるから，$3^n\ (n\geqq 4)$ の倍数はない。

ゆえに，$50!$ を素因数分解したとき，素因数 3 の個数は　　$16+5+1=22$ (個)

したがって，${}_{100}\mathrm{C}_{50}$ を素因数分解したとき，素因数 3 の個数は，① から

$48-22\times 2=4$ (個)　すなわち　$b=4$

(2)　求める n の最大値は，$50!$ を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数，すなわち $50!$ を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。

1 から 50 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，50 を 5 で割った商で　　10

5^2 の倍数の個数は，50 を 5^2 で割った商で　　2

$50<5^3$ であるから，$5^n\ (n\geqq 3)$ の倍数はない。

よって，素因数 5 の個数は　　$10+2=12$ (個)

したがって，求める n の最大値は　　12

17 (1)　$10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 10$ を計算した結果は，2 で最大何回割り切れるか。

(2)　$10!$ を計算すると，末尾に 0 は連続して何個並ぶか。

解答　(1)　8 回　　(2)　2 個

解説

(1)　$10!$ が 2 で割り切れる最大の回数は，$10!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数に一致する。

1 から 10 までの自然数のうち，

2 の倍数の個数は，10 を 2 で割った商で　　5 個

2^2 の倍数の個数は，10 を 2^2 で割った商で　　2 個

2^3 の倍数の個数は，10 を 2^3 で割った商で　　1 個

よって，素因数 2 の個数は　　$5+2+1=8$ (個)

ゆえに，$10!$ は 2 で最大 8 回割り切れる。

(2)　$10!$ を整数で表したときに末尾に並ぶ 0 の個数は，$10!$ を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。

1 から 10 までの自然数のうち，5 の倍数の個数は，10 を 5 で割った商で　　2 個

よって，$10!$ を整数で表したとき，末尾に 0 は 2 個並ぶ。

18 $100!$ を素因数分解すると，$2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^{16}\cdot 11^9\cdot 13^7\cdots\cdots$ となる。a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=97$，$b=48$，$c=24$

解説

1 から 100 までの自然数のうち

2 の倍数の個数は，100 を 2 で割った商で　　50

2^2 の倍数の個数は，100 を 2^2 で割った商で　　25

2^3 の倍数の個数は，100 を 2^3 で割った商で　　12

2^4 の倍数の個数は，100 を 2^4 で割った商で　　6

2^5 の倍数の個数は，100 を 2^5 で割った商で　　3

2^6 の倍数の個数は，100 を 2^6 で割った商で　　1

$100<2^7$ であるから，$2^n\ (n\geqq 7)$ の倍数はない。

よって　　$a=50+25+12+6+3+1=97$

次に，1 から 100 までの自然数のうち，

3 の倍数の個数は，100 を 3 で割った商で　　33

3^2 の倍数の個数は，100 を 3^2 で割った商で　　11

3^3 の倍数の個数は，100 を 3^3 で割った商で　　3

3^4 の倍数の個数は，100 を 3^4 で割った商で　　1

$100<3^5$ であるから，$3^n\ (n\geqq 5)$ の倍数はない。

よって　　$b=33+11+3+1=48$

更に，1 から 100 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，100 を 5 で割った商で　　20

5^2 の倍数の個数は，100 を 5^2 で割った商で　　4

$100<5^3$ であるから，$5^n\ (n\geqq 3)$ の倍数はない。

よって　　$c=20+4=24$

19 1 から 30 までの自然数の積 $30!=30\cdot 29\cdot\cdots\cdots\cdot 2\cdot 1$ を N とする。N を素因数分解したとき，次の問いに答えよ。

(1)　素因数 2 の個数を求めよ。　　(2)　素因数 5 の個数を求めよ。

(3)　N を計算すると，末尾には 0 は連続して何個並ぶか。

解答　(1)　26 個　　(2)　7 個　　(3)　7 個

解説

(1)　1 から 30 までの自然数のうち

2 の倍数の個数は，30 を 2 で割った商で　15 (個)

2^2 の倍数の個数は，30 を 2^2 で割った商で　7 (個)

2^3 の倍数の個数は，30 を 2^3 で割った商で　3 (個)

2^4 の倍数の個数は，30 を 2^4 で割った商で　1 (個)

よって，素因数 2 の個数は　　$15+7+3+1=26$ (個)

(2)　(1) と同様に，5 の倍数は 6 個，5^2 の倍数は 1 個あるから，素因数 5 の個数は

$6+1=7$ (個)

(3)　(1)，(2) から，N を素因数分解したとき，素因数 2 は 26 個，素因数 5 は 7 個ある。

$2\cdot 5=10$ であるから，N を計算すると，その数の末尾には 0 は連続して 7 個並ぶ。

20 $N=250!$ を素因数分解したとき，次の問いに答えよ。

(1)　素因数 5 の個数を求めよ。

(2)　N を計算すると，末尾には 0 は連続して何個並ぶか。

解答　(1)　62 個　　(2)　62 個

解説

(1)　1 から 250 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，250 を 5 で割った商で　　50 (個)

5^2 の倍数の個数は，250 を 5^2 で割った商で　10 (個)

5^3 の倍数の個数は，250 を 5^3 で割った商で　2 (個)

よって，素因数 5 の個数は　　$50+10+2=62$ (個)

(2)　1 から 250 までの自然数のうち 2 の倍数の個数は，125 個である。

よって，素因数 2 の個数は 125 個以上あるから，素因数 5 の個数よりも多い。

$2\cdot 5=10$ であるから，N を計算したとき末尾に並ぶ 0 の個数は素因数 5 の個数に等しい。

ゆえに，(1) から　　62 個

21 次のような自然数の積 N を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

(1)　1 から 125 までの 125 個の自然数の積 $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 125$

(2)　1 から 300 までの 300 個の自然数の積 $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 300$

解答　(1)　31 個　　(2)　74 個

解説

(1)　1 から 125 までの 125 個の自然数のうち，

5 の倍数の個数は，125 を 5 で割った商で　　25

5^2 の倍数の個数は，125 を 5^2 で割った商で　5

5^3 の倍数の個数は，125 を 5^3 で割った商で　1

よって，N を素因数分解したときの素因数 5 の個数は　　$25+5+1=31$

また，素因数 2 の個数は明らかに素因数 5 の個数より多い。

$10=2\cdot 5$ であるから，N を計算すると，末尾には 0 が連続して 31 個並ぶ。

(2)　1 から 300 までの 300 個の自然数のうち，

5 の倍数の個数は，300 を 5 で割った商で　　60

5^2 の倍数の個数は，300 を 5^2 で割った商で　12

5^3 の倍数の個数は，300 を 5^3 で割った商で　2

よって，N を素因数分解したときの素因数 5 の個数は　　$60+12+2=74$

また，素因数 2 の個数は明らかに素因数 5 の個数より多い。

$10=2\cdot 5$ であるから，N を計算すると，末尾には 0 が連続して 74 個並ぶ。

22 次のものを求めよ。

(1)　37^{100} を 6 で割った余り　　(2)　5^{80} を 8 で割った余り

(3)　3^{100} を 13 で割った余り　　(4)　4^{200} を 9 で割った余り

解答　(1)　1　　(2)　1　　(3)　3　　(4)　7

解説

(1)　37 を 6 で割った余りは 1 である。

よって，37^{100} を 6 で割った余りは，1^{100} を 6 で割った余りに等しい。

したがって，37^{100} を 6 で割った余りは　1

別解　$37\equiv1 \pmod{6}$ であるから　　$37^{100}\equiv1^{100}\equiv1 \pmod{6}$

よって，37^{100} を 6 で割った余りは　1

(2)　$5^2=25$ であるから，5^2 を 8 で割った余りは 1 である。

よって，$5^{80}=(5^2)^{40}$ を 8 で割った余りは，1^{40} を 8 で割った余りに等しい。

したがって，5^{80} を 8 で割った余りは　1

別解　$5^2=25$ であるから　　$5^2\equiv1 \pmod{8}$

よって　　$5^{80}\equiv(5^2)^{40}\equiv1^{40}\equiv1 \pmod{8}$

したがって，5^{80} を 8 で割った余りは　1

(3)　$3^3=27$ であるから，3^3 を 13 で割った余りは 1 である。

よって，$3^{100}=(3^3)^{33}\cdot3$ を 13 で割った余りは，$1^{33}\cdot3$ を 13 で割った余りに等しい。

したがって，3^{100} を 13 で割った余りは　3

別解　$3^3=27$ であるから　　$3^3\equiv1 \pmod{13}$

よって　　$3^{100}\equiv(3^3)^{33}\cdot3\equiv1^{33}\cdot3\equiv3 \pmod{13}$

したがって，3^{100} を 13 で割った余りは　3

(4)　$4^3=64$ であるから，4^3 を 9 で割った余りは 1 である。

よって，$4^{200}=(4^3)^{66}\cdot4^2$ を 9 で割った余りは，$1^{66}\cdot4^2$ を 9 で割った余りに等しい。

したがって，4^{200} を 9 で割った余りは　7

別解　$4^3=64$ であるから　　$4^3\equiv1 \pmod{9}$

よって　　$4^{200}\equiv(4^3)^{66}\cdot4^2\equiv1^{66}\cdot4^2\equiv7 \pmod{9}$

したがって，4^{200} を 9 で割った余りは　7

23　(1)　7^{50} を 6 で割った余りを求めよ。

(2)　3^{30} を 8 で割った余りを求めよ。

(3)　5^{50} を 13 で割った余りを求めよ。

解答　(1)　1　　(2)　1　　(3)　12

解説

(1)　7 を 6 で割った余りは　1

よって，7^{50} を 6 で割った余りは，1^{50} すなわち 1 を 6 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　1

(2)　$3^{30}=(3^2)^{15}=9^{15}$

9 を 8 で割った余りは　1

よって，9^{15} を 8 で割った余りは，1^{15} すなわち 1 を 8 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　1

(3)　$5^{50}=(5^2)^{25}=25^{25}$

25 を 13 で割った余りは　12

よって，5^{50} を 13 で割った余りは，12^{25} を 13 で割った余りに等しい。更に

$$12^{25}=12\cdot(12^2)^{12}=12\cdot144^{12}$$

144 を 13 で割った余りは　1

ゆえに，12^{25} を 13 で割った余りは，$12\cdot1^{12}$ すなわち 12 を 13 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　12

24　(1)　15^{30} を 7 で割った余りを求めよ。

(2)　7^{80} を 8 で割った余りを求めよ。

(3)　13^{30} を 17 で割った余りを求めよ。

解答　(1)　1　　(2)　1　　(3)　16

解説

(1)　15 を 7 で割った余りは　1

よって，15^{30} を 7 で割った余りは，1^{30} すなわち 1 を 7 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　1

(2)　$7^{80}=(7^2)^{40}=49^{40}$

49 を 8 で割った余りは　1

よって，49^{40} を 8 で割った余りは，1^{40} すなわち 1 を 8 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　1

(3)　$13^{30}=(13^2)^{15}=169^{15}$

169 を 17 で割った余りは　16

よって，13^{30} を 17 で割った余りは，16^{15} を 17 で割った余りに等しい。

更に　　$16^{15}=16\cdot(16^2)^7=16\cdot256^7$

256 を 17 で割った余りは　1

ゆえに，16^{15} を 17 で割った余りは，$16\cdot1^7$ すなわち 16 を 17 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　16

25　7^{50} について，次のものを求めよ。

(1)　12 で割った余り　　　　(2)　一の位の数

解答　(1)　1　　(2)　9

解説

(1)　$7^2=49$ を 12 で割った余りは 1 である。

よって，$7^{50}=(7^2)^{25}$ を 12 で割った余りは，1^{25} を 12 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　1

(2)　(解 1)　$7^2=49$ から，7^2 の一の位は　9

$9\times7=63$ から，7^3 の一の位は　3

$3\times7=21$ から，7^4 の一の位は　1

$1\times7=7$　から，7^5 の一の位は　7

よって，7^n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の一の位は　7，9，3，1　が繰り返し現れる。

$50=4\times12+2$ であるから，7^{50} の一の位は　9

(解 2)　7^{50} の一の位は，7^{50} を 10 で割った余りに等しい。

$7^2=49$，$7^3=343$，$7^4=2401$ であるから，7^4 を 10 で割った余りは　1

よって，$7^{50}=(7^4)^{12}\cdot7^2$ を 10 で割った余りは，$7^2=49$ を 10 で割った余りに等しい。

したがって，7^{50} の一の位は　9

別解　[合同式を用いた解法]

(1)　$7^2\equiv49\equiv1 \pmod{12}$ であるから　　$7^{50}\equiv(7^2)^{25}\equiv1^{25}\equiv1 \pmod{12}$

よって，求める余りは　1

(2)　$7^2\equiv49\equiv9 \pmod{10}$，　$7^3\equiv7^2\cdot7\equiv9\cdot7\equiv63\equiv3 \pmod{10}$

$7^4\equiv7^3\cdot7\equiv3\cdot7\equiv21\equiv1 \pmod{10}$

よって　　$7^{50}\equiv(7^4)^{12}\cdot7^2\equiv1^{12}\cdot49\equiv9 \pmod{10}$

したがって，7^{50} の一の位は　9

26　次のものを求めよ。

(1)　29^{100} を 7 で割った余り　　　　(2)　5^{70} を 6 で割った余り

(3)　4^{170} を 9 で割った余り

解答　(1)　1　　(2)　1　　(3)　7

解説

(1)　29 を 7 で割った余りは 1 である。

よって，29^{100} を 7 で割った余りは，1^{100} を 7 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　1

(2)　$5^2=25$ を 6 で割った余りは 1 である。

よって，$5^{70}=(5^2)^{35}$ を 6 で割った余りは，1^{35} を 6 で割った余りに等しい。

したがって，5^{70} を 6 で割った余りは　1

(3)　$4^3=64$ を 9 で割った余りは 1 である。

よって，$4^{170}=(4^3)^{56}\cdot4^2$ を 9 で割った余りは，$1^{56}\cdot4^2$ すなわち 16 を 9 で割った余りに等しい。

したがって，4^{170} を 9 で割った余りは　7

別解　[合同式を用いた解法]

(1)　$29\equiv1 \pmod{7}$ であるから　　$29^{100}\equiv1^{100}\equiv1 \pmod{7}$

よって，求める余りは　1

(2)　$5^2\equiv25\equiv1 \pmod{6}$ であるから　　$5^{70}\equiv(5^2)^{35}\equiv1^{35}\equiv1 \pmod{6}$

よって，求める余りは　1

(3)　$4^3\equiv64\equiv1 \pmod{9}$ であるから

$$4^{170}\equiv(4^3)^{56}\cdot4^2\equiv1^{56}\cdot4^2\equiv16\equiv7 \pmod{9}$$

よって，4^{170} を 9 で割った余りは　7

27　次のものを求めよ。

(1)　7^{100} を 6 で割った余り　　　　(2)　26^{40} を 5 で割った余り

(3)　3^{50} を 8 で割った余り　　　　(4)　2^{100} を 7 で割った余り

解答　(1)　1　　(2)　1　　(3)　1　　(4)　2

解説

(1)　7 を 6 で割った余りは　　1

よって，7^{100} を 6 で割った余りは，1^{100} を 6 で割った余りと等しい。

したがって，求める余りは　　1

別解　$7\equiv1 \pmod{6}$ であるから　　$7^{100}\equiv1^{100}\equiv1 \pmod{6}$

(2)　26 を 5 で割った余りは　　1

よって，26^{40} を 5 で割った余りは，1^{40} を 5 で割った余りと等しい。

したがって，求める余りは　　1

別解　$26\equiv1 \pmod{5}$ であるから　　$26^{40}\equiv1^{40}\equiv1 \pmod{5}$

(3)　$3^{50}=(3^2)^{25}$ であり，3^2 を 8 で割った余りは　　1

よって，3^{50} を 8 で割った余りは，1^{25} を 8 で割った余りと等しい。

したがって，求める余りは　　1

別解　$3^2\equiv1 \pmod{8}$ であるから　　$3^{50}=(3^2)^{25}\equiv1^{25}\equiv1 \pmod{8}$

(4)　$2^{100}=(2^3)^{33}\cdot2$ であり，2^3 を 7 で割った余りは　　1

よって，2^{100} を 7 で割った余りは，$1^{33}\cdot2$ を 7 で割った余りと等しい。

したがって，求める余りは　　2

別解　$2^3\equiv1 \pmod{7}$ であるから　　$2^{100}=(2^3)^{33}\cdot2\equiv1^{33}\cdot2\equiv2 \pmod{7}$

28　n は整数とする。合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　n を 8 で割った余りが 3 であるとき，n^2+2n+5 を 8 で割った余り

(2)　n を 17 で割った余りが 15 であるとき，$3n^2+5n+9$ を 17 で割った余り

(3)　n を 35 で割った余りが 2 であるとき，n^4+3n^3+4 を 35 で割った余り

(4)　n を 41 で割った余りが 38 であるとき，n^3+7n^2+8 を 41 で割った余り

解答　(1)　4　　(2)　11　　(3)　9　　(4)　3

解説

(1)　$n\equiv3 \pmod{8}$ のとき　　$n^2+2n+5\equiv3^2+2\cdot3+5\equiv20\equiv4 \pmod{8}$

よって，n^2+2n+5 を 8 で割った余りは　4

(2)　$15\equiv-2 \pmod{17}$ であるから　　$n\equiv-2 \pmod{17}$

したがって　$3n^2+5n+9\equiv 3\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)+9\equiv 11 \pmod{17}$

よって，$3n^2+5n+9$ を 17 で割った余りは　11

(3)　$n\equiv 2 \pmod{35}$ のとき　$n^4+3n^3+4\equiv 2^4+3\cdot 2^3+4\equiv 44\equiv 9 \pmod{35}$

よって，n^4+3n^3+4 を 35 で割った余りは　9

(4)　$38\equiv -3 \pmod{41}$ であるから　$n\equiv -3 \pmod{41}$

したがって　$n^3+7n^2+8\equiv(-3)^3+7\cdot(-3)^2+8\equiv 44\equiv 3 \pmod{41}$

よって，n^3+7n^2+8 を 41 で割った余りは　3

29 合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　123^{122} の一の位　　(2)　7^{251} の下 2 桁

解答　(1)　9　(2)　43

解説

(1)　123^{122} の一の位は 123^{122} を 10 で割った余りに等しい。

以下，10 を法として考える。

$$123\equiv 3,\ 123^2\equiv 3^2\equiv 9,\ 123^3\equiv 3^3\equiv 7,\ 123^4\equiv 3^4\equiv 1$$

よって　$123^{122}\equiv(123^4)^{30}\cdot 123^2\equiv 1^{30}\cdot 9\equiv 9$

したがって，123^{122} の一の位は　9

(2)　7^{251} の下 2 桁は 7^{251} を 100 で割った余りに等しい。

以下，100 を法として考える。

$$7^2\equiv 49,\ 7^3\equiv 49\cdot 7\equiv 343\equiv 43,\ 7^4\equiv 43\cdot 7\equiv 301\equiv 1$$

よって　$7^{251}\equiv(7^4)^{62}\cdot 7^3\equiv 1^{62}\cdot 43\equiv 43$

したがって，7^{251} の下 2 桁は　43

30 n は自然数とする。$\dfrac{2310}{n}$ が素数となる n は何個あるか。

解答　5 個

解説

2310 を素因数分解すると　$2310=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 2310 \\ 3 & 1155 \\ 5 & 385 \\ 7 & 77 \\ & 11 \end{array}$$

2，3，5，7，11 は素数であるから

$n=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7,\ 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11,\ 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11,\ 2\cdot 5\cdot 7\cdot 11,\ 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$

のとき，$\dfrac{2310}{n}$ は素数 11，7，5，3，2 になる。

したがって，求める自然数 n の個数は　5 個

31 n は自然数とする。$n^2-14n+40$ が素数となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=3,\ 11$

解説

$n^2-14n+40=(n-4)(n-10)=(4-n)(10-n)$

$n-4>n-10,\ 4-n<10-n$ であるから，$n^2-14n+40$ が素数であるとき

$n-10=1$　または　$4-n=1$

$n-10=1$ より　$n=11$

$4-n=1$ より　$n=3$

$n=11$ のとき　$n^2-14n+40=7\cdot 1=7$ (素数)

$n=3$ のとき　$n^2-14n+40=1\cdot 7=7$ (素数)

よって，$n^2-14n+40$ が素数となるような n は　$n=3,\ 11$

32 n は自然数とする。$n^2-28n+160$ が素数となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=7,\ 21$

解説

$n^2-28n+160=(n-8)(n-20)=(8-n)(20-n)$

$n-8>n-20,\ 8-n<20-n$ であるから，$n^2-28n+160$ が素数であるとき

$n-20=1$　または　$8-n=1$

$n-20=1$ より　$n=21$　　$8-n=1$ より　$n=7$

$n=21$ のとき　$n^2-28n+160=13\cdot 1=13$ (素数)

$n=7$ のとき　$n^2-28n+160=1\cdot 13=13$ (素数)

よって，$n^2-28n+160$ が素数となるような n は　$n=7,\ 21$

33 (1)　60! を計算した結果は，3 で最大何回割り切れるか。

(2)　50! を計算すると，末尾に 0 は連続して何個並ぶか。

解答　(1)　28 回　(2)　12 個

解説

(1)　60! が 3 で割り切れる最大の回数は，60! を素因数分解したときの素因数 3 の個数に一致する。

1 から 60 までの自然数のうち，

3 の倍数の個数は，60 を 3 で割った商で　20

3^2 の倍数の個数は，60 を 3^2 で割った商で　6

3^3 の倍数の個数は，60 を 3^3 で割った商で　2

よって，素因数 3 の個数は　$20+6+2=28$ (個)

したがって，60! は 3 で最大 28 回割り切れる。

(2)　50! を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，50! を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。

1 から 50 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，50 を 5 で割った商で　10

5^2 の倍数の個数は，50 を 5^2 で割った商で　2

よって，素因数 5 の個数は　$10+2=12$ (個)

したがって，50! を整数で表したとき，末尾に 0 は 12 個並ぶ。

34 (1)　$\dfrac{5561}{6059}$ を既約分数に直せ。

(2)　2 つの正の整数の和は 54 で，その最小公倍数は 231 である。各数を求めよ。

(3)　219! は 2 で最大何回割り切れるか。

解答　(1)　$\dfrac{67}{73}$　(2)　21，33　(3)　213 回

解説

(1)　6059 と 5561 に互除法を用いると　$6059=5561\cdot 1+498$

$5561=498\cdot 11+83$

$498=83\cdot 6+0$

よって，6059 と 5561 の最大公約数は 83 である。

$6059=83\cdot 73,\ 5561=83\cdot 67$ から　$\dfrac{5561}{6059}=\dfrac{67}{73}$

(2)　2 つの正の整数を $a,\ b\ (a\leqq b)$ とし，a と b の最大公約数を g とすると

$a=ga',\ b=gb'$　(a' と b' は互いに素な自然数で，$a'\leqq b'$)

と表される。

条件より，$a+b=54$ であるから　$g(a'+b')=54$　……①

a と b の最小公倍数が 231 であるから　$ga'b'=231$　……②

$54=2\cdot 3^3,\ 231=3\cdot 7\cdot 11$，かつ $a'+b'$ と $a'b'$ は互いに素であるから，①，② より

$g=3,\ a'+b'=18,\ a'b'=77$

よって，$a',\ b'$ を解とする 2 次方程式は

$t^2-18t+77=0$　ゆえに　$(t-7)(t-11)=0$

したがって　$t=7,\ 11$　$a'\leqq b'$ であるから　$a'=7,\ b'=11$

$a=ga'=3\cdot 7=21,\ b=gb'=3\cdot 11=33$ であるから，求める 2 つの数は　21，33

(3)　1 から 219 までの 219 個の整数のうち，

2 の倍数は，2，$2\cdot 2$，……，$2\cdot 109$ の　109 個

2^2 の倍数は，4，$4\cdot 2$，……，$4\cdot 54$ の　54 個

2^3 の倍数は，8，$8\cdot 2$，……，$8\cdot 27$ の　27 個

2^4 の倍数は，16，$16\cdot 2$，……，$16\cdot 13$ の　13 個

2^5 の倍数は，32，$32\cdot 2$，……，$32\cdot 6$ の　6 個

2^6 の倍数は，64，$64\cdot 2$，$64\cdot 3$ の　3 個

2^7 の倍数は，128 の　1 個

$2^8=256$ で割り切れるものはない。

よって，219! に含まれる素因数 2 の個数は

$109+54+27+13+6+3+1=213$ (個)

したがって，最大 213 回割り切れる。

35 n は自然数とする。$\dfrac{1365}{n}$ が素数となる n は何個あるか。

解答　4 個

解説

1365 を素因数分解すると　$1365=3\cdot 5\cdot 7\cdot 13$

3，5，7，13 は素数であるから $3\cdot 5\cdot 7,\ 3\cdot 5\cdot 13,\ 3\cdot 7\cdot 13,\ 5\cdot 7\cdot 13$ のとき，$\dfrac{1365}{n}$ はそれぞれ素数 13，7，5，3 になる。

したがって，求める自然数 n の個数は　4 個

36 n は整数とする。n を 9 で割った余りが 2 であるとき，次のものを求めよ。

(1)　n^5 を 9 で割った余り　　(2)　$2n^2+n+1$ を 9 で割った余り

解答　(1)　5　(2)　2

解説

(1)　$n\equiv 2 \pmod 9$ のとき　$n^5\equiv 32 \pmod 9$

$32\equiv 5 \pmod 9$ より　$n^5\equiv 5 \pmod 9$

よって，n^5 を 9 で割った余りは 5 である。

(2)　$n\equiv 2 \pmod 9$ のとき

$2n^2+n+1\equiv 2\cdot 2^2+2+1 \pmod 9$

$2\cdot 2^2+2+1=11,\ 11\equiv 2 \pmod 9$ より

$2n^2+n+1\equiv 2 \pmod 9$

よって，$2n^2+n+1$ を 9 で割った余りは 2 である。

37 n は整数とする。合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　n を 5 で割った余りが 2 であるとき，n^6 を 5 で割った余り

(2)　n を 8 で割った余りが 3 であるとき，$3n^2+5n+4$ を 8 で割った余り

解答　(1)　4　(2)　6

解説

(1)　$n\equiv 2 \pmod 5$ のとき　$n^6\equiv 2^6\equiv 64\equiv 4 \pmod 5$

よって，n^6 を 5 で割った余りは　4

(2)　$n\equiv 3 \pmod 8$ のとき　$3n^2+5n+4\equiv 3\cdot 3^2+5\cdot 3+4$

$\equiv 46\equiv 6 \pmod 8$

よって，$3n^2+5n+4$ を 8 で割った余りは　6

38 n は整数とする。合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　n を 7 で割った余りが 4 であるとき，n^2+3n+5 を 7 で割った余り

(2)　n を 15 で割った余りが 3 であるとき，n^3+8n を 15 で割った余り

解答　(1)　5　　(2)　6

解説

(1)　$n \equiv 4 \pmod 7$ のとき

$$n^2+3n+5 \equiv 4^2+3\cdot4+5 \equiv 33 \equiv 5 \pmod 7$$

よって，n^2+3n+5 を 7 で割った余りは　5

(2)　$n \equiv 3 \pmod{15}$ のとき

$$n^3+8n \equiv 3^3+8\cdot3 \equiv 51 \equiv 6 \pmod{15}$$

よって，n^3+8n を 15 で割った余りは　6

39 n は整数とする。合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　n を 7 で割った余りが 2 であるとき，n^{30} を 7 で割った余り

(2)　n を 9 で割った余りが 4 であるとき，n^2+3n+4 を 9 で割った余り

(3)　n を 6 で割った余りが 3 であるとき，n^4+2n^3+5 を 6 で割った余り

解答　(1)　1　　(2)　5　　(3)　2

解説

(1)　$n \equiv 2 \pmod 7$ のとき　$n^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$

よって　$n^{30} \equiv 1^{10} \pmod 7$

すなわち　$n^{30} \equiv 1 \pmod 7$

よって，n^{30} を 7 で割った余りは　1

(2)　$n \equiv 4 \pmod 9$ のとき

$$n^2+3n+4 \equiv 4^2+3\cdot4+4 \equiv 32 \equiv 5 \pmod 9$$

よって，n^2+3n+4 を 9 で割った余りは　5

(3)　$n \equiv 3 \pmod 6$ のとき

$$\begin{aligned} n^4+2n^3+5 &\equiv 3^4+2\cdot3^3+5 \equiv 81+54+5 \\ &\equiv 140 \equiv 2 \pmod 6 \end{aligned}$$

よって，n^4+2n^3+5 を 6 で割った余りは　2

40 n は整数とする。n を 7 で割った余りが 2 であるとき，合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　n^{30} を 7 で割った余り　　(2)　$2n^2+n+3$ を 7 で割った余り

解答　(1)　1　　(2)　6

解説

(1)　$n \equiv 2 \pmod 7$ のとき

$$n^{30} \equiv 2^{30} \pmod 7$$

$2^3 \equiv 1 \pmod 7$ より　$n^{30} \equiv 1 \pmod 7$

よって，n^{30} を 7 で割った余りは　1

(2)　$n \equiv 2 \pmod 7$ のとき

$$2n^2+n+3 \equiv 2\cdot2^2+2+3 \equiv 8+2+3 \equiv 13 \equiv 6 \pmod 7$$

よって，$2n^2+n+3$ を 7 で割った余りは　6

41 n は整数とする。合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　n を 5 で割った余りが 2 であるとき，n^3 を 5 で割った余り

(2)　n を 7 で割った余りが 5 であるとき，n^2+n+1 を 7 で割った余り

(3)　n を 9 で割った余りが 4 であるとき，n^2+3n+5 を 9 で割った余り

解答　(1)　3　　(2)　3　　(3)　6

解説

(1)　$n \equiv 2 \pmod 5$ のとき

$$n^3 \equiv 8 \pmod 5$$

$8 \equiv 3 \pmod 5$ より　$n^3 \equiv 3 \pmod 5$

よって，n^3 を 5 で割った余りは　3

(2)　$n \equiv 5 \pmod 7$ のとき

$$n^2+n+1 \equiv 5^2+5+1 \equiv 31 \pmod 7$$

$31 \equiv 3 \pmod 7$ より　$n^2+n+1 \equiv 3 \pmod 7$

よって，n^2+n+1 を 7 で割った余りは　3

(3)　$n \equiv 4 \pmod 9$ のとき

$$n^2+3n+5 \equiv 4^2+3\cdot4+5 \equiv 33 \pmod 9$$

$33 \equiv 6 \pmod 9$ より　$n^2+3n+5 \equiv 6 \pmod 9$

よって，n^2+3n+5 を 9 で割った余りは　6