

1 次不定方程式の特殊解クイズ

① (1) 等式 $31x + 22y = 1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求める。

31 と 22 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 31 = 22 \cdot 1 + 9 & \text{移項すると } 9 = 31 - 22 \cdot 1 \\ 22 = 9 \cdot 2 + 4 & \text{移項すると } 4 = 22 - 9 \cdot 2 \\ 9 = 4 \cdot 2 + 1 & \text{移項すると } 1 = 9 - 4 \cdot 2 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 4 \cdot 2 \\ &= 9 - (22 - 9 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 9 \cdot 5 + 22 \cdot (-2) \\ &= (31 - 22 \cdot 1) \cdot 5 + 22 \cdot (-2) \\ &= 31 \cdot 5 + 22 \cdot (-7) \end{aligned}$$

すなわち $31 \cdot 5 + 22 \cdot (-7) = 1$ …… ①
よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 5, y = -7$

(2) 等式 $31x + 22y = 3$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求める。

① の両辺に 3 を掛けると $31 \cdot (3 \cdot 5) + 22 \cdot \{3 \cdot (-7)\} = 3$

すなわち $31 \cdot 15 + 22 \cdot (-21) = 3$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 15, y = -21$

解説

② 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(1) $24x + 17y = 1$ (2) $67x + 20y = 2$ (3) $73x - 51y = 3$

解答 (1) $x = 5, y = -7$ (2) $x = 6, y = -20$ (3) $x = 21, y = 30$

解説

(1) 24 と 17 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 24 = 17 \cdot 1 + 7 & \text{移項すると } 7 = 24 - 17 \cdot 1 \\ 17 = 7 \cdot 2 + 3 & \text{移項すると } 3 = 17 - 7 \cdot 2 \\ 7 = 3 \cdot 2 + 1 & \text{移項すると } 1 = 7 - 3 \cdot 2 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - (17 - 7 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 5 + 17 \cdot (-2) \\ &= (24 - 17 \cdot 1) \cdot 5 + 17 \cdot (-2) \\ &= 24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) \end{aligned}$$

すなわち $24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) = 1$
よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 5, y = -7$

別解 24 と 17 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 24 = 17 \cdot 1 + 7 & \text{移項すると } 7 = 24 - 17 \cdot 1 \\ 17 = 7 \cdot 2 + 3 & \text{移項すると } 3 = 17 - 7 \cdot 2 \\ 7 = 3 \cdot 2 + 1 & \text{移項すると } 1 = 7 - 3 \cdot 2 \end{array}$$

$a = 24, b = 17$ とおく。
 $7 = 24 - 17 \cdot 1$ より $7 = a - b \cdot 1 = a - b$
 $3 = 17 - 7 \cdot 2$ より $3 = b - (a - b) \cdot 2 = -2a + 3b$
 $1 = 7 - 3 \cdot 2$ より $1 = (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 2 = 5a - 7b$
よって、 $5a - 7b = 1$ より $24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) = 1$
ゆえに、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 5, y = -7$

(2) 67 と 20 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$67 = 20 \cdot 3 + 7 \quad \text{移項すると } 7 = 67 - 20 \cdot 3$$

$$\begin{array}{ll} 20 = 7 \cdot 2 + 6 & \text{移項すると } 6 = 20 - 7 \cdot 2 \\ 7 = 6 \cdot 1 + 1 & \text{移項すると } 1 = 7 - 6 \cdot 1 \\ \text{よって } 1 = 7 - 6 \cdot 1 & \\ &= 7 - (20 - 7 \cdot 2) \cdot 1 \\ &= 7 \cdot 3 + 20 \cdot (-1) \\ &= (67 - 20 \cdot 3) \cdot 3 + 20 \cdot (-1) \\ &= 67 \cdot 3 + 20 \cdot (-10) \end{array}$$

すなわち $67 \cdot 3 + 20 \cdot (-10) = 1$
両辺に 2 を掛けて $67 \cdot (2 \cdot 3) + 20 \cdot \{2 \cdot (-10)\} = 2$
すなわち $67 \cdot 6 + 20 \cdot (-20) = 2$
よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 6, y = -20$

別解 67 と 20 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 67 = 20 \cdot 3 + 7 & \text{移項すると } 7 = 67 - 20 \cdot 3 \\ 20 = 7 \cdot 2 + 6 & \text{移項すると } 6 = 20 - 7 \cdot 2 \\ 7 = 6 \cdot 1 + 1 & \text{移項すると } 1 = 7 - 6 \cdot 1 \end{array}$$

$a = 67, b = 20$ とおく。
 $7 = 67 - 20 \cdot 3$ より $7 = a - b \cdot 3 = a - 3b$
 $6 = 20 - 7 \cdot 2$ より $6 = b - (a - 3b) \cdot 2 = -2a + 7b$
 $1 = 7 - 6 \cdot 1$ より $1 = (a - 3b) - (-2a + 7b) \cdot 1 = 3a - 10b$

よって、 $3a - 10b = 1$ より $67 \cdot 3 + 20 \cdot (-10) = 1$
両辺に 2 を掛けて $67 \cdot (2 \cdot 3) + 20 \cdot \{2 \cdot (-10)\} = 2$
すなわち $67 \cdot 6 + 20 \cdot (-20) = 2$
ゆえに、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 6, y = -20$

(3) 73 と 51 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 73 = 51 \cdot 1 + 22 & \text{移項すると } 22 = 73 - 51 \cdot 1 \\ 51 = 22 \cdot 2 + 7 & \text{移項すると } 7 = 51 - 22 \cdot 2 \\ 22 = 7 \cdot 3 + 1 & \text{移項すると } 1 = 22 - 7 \cdot 3 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 &= 22 - 7 \cdot 3 \\ &= 22 - (51 - 22 \cdot 2) \cdot 3 \\ &= 22 \cdot 7 + 51 \cdot (-3) \\ &= (73 - 51 \cdot 1) \cdot 7 + 51 \cdot (-3) \\ &= 73 \cdot 7 + 51 \cdot (-10) \end{aligned}$$

すなわち $73 \cdot 7 - 51 \cdot 10 = 1$
両辺に 3 を掛けて $73 \cdot (3 \cdot 7) - 51 \cdot (3 \cdot 10) = 3$
すなわち $73 \cdot 21 - 51 \cdot 30 = 3$
よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 21, y = 30$

別解 73 と 51 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 73 = 51 \cdot 1 + 22 & \text{移項すると } 22 = 73 - 51 \cdot 1 \\ 51 = 22 \cdot 2 + 7 & \text{移項すると } 7 = 51 - 22 \cdot 2 \\ 22 = 7 \cdot 3 + 1 & \text{移項すると } 1 = 22 - 7 \cdot 3 \end{array}$$

$a = 73, b = 51$ とおく。
 $22 = 73 - 51 \cdot 1$ より $22 = a - b \cdot 1 = a - b$
 $7 = 51 - 22 \cdot 2$ より $7 = b - (a - b) \cdot 2 = -2a + 3b$
 $1 = 22 - 7 \cdot 3$ より $1 = (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 3 = 7a - 10b$
よって、 $7a - 10b = 1$ より $73 \cdot 7 - 51 \cdot 10 = 1$
両辺に 3 を掛けて $73 \cdot (3 \cdot 7) - 51 \cdot (3 \cdot 10) = 3$

すなわち $73 \cdot 21 - 51 \cdot 30 = 3$
ゆえに、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 21, y = 30$

③ 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。[各 10 点]

(1) $21x + 17y = 1$ (2) $52x + 21y = 2$

解答 (1) $21 = 17 \cdot 1 + 4$ 移項すると $4 = 21 - 17 \cdot 1$
 $17 = 4 \cdot 4 + 1$ 移項すると $1 = 17 - 4 \cdot 4$
よって $1 = 17 - 4 \cdot 4 = 17 - 4 \cdot (21 - 17 \cdot 1) = 21 \cdot (-4) + 17 \cdot 5$
すなわち $21 \cdot (-4) + 17 \cdot 5 = 1$
したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -4, y = 5$

(2) $52 = 21 \cdot 2 + 10$ 移項すると $10 = 52 - 21 \cdot 2$
 $21 = 10 \cdot 2 + 1$ 移項すると $1 = 21 - 10 \cdot 2$
よって、 $1 = 21 - 10 \cdot 2 = 21 - (52 - 21 \cdot 2) \cdot 2 = 52 \cdot (-2) + 21 \cdot 5$
すなわち $52 \cdot (-2) + 21 \cdot 5 = 1$

両辺に 2 を掛けると $52 \cdot (-4) + 21 \cdot 10 = 2$
したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -4, y = 10$

解説

(1) $21 = 17 \cdot 1 + 4$ 移項すると $4 = 21 - 17 \cdot 1$
 $17 = 4 \cdot 4 + 1$ 移項すると $1 = 17 - 4 \cdot 4$
よって $1 = 17 - 4 \cdot 4 = 17 - 4 \cdot (21 - 17 \cdot 1) = 21 \cdot (-4) + 17 \cdot 5$
すなわち $21 \cdot (-4) + 17 \cdot 5 = 1$
したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -4, y = 5$

(2) $52 = 21 \cdot 2 + 10$ 移項すると $10 = 52 - 21 \cdot 2$
 $21 = 10 \cdot 2 + 1$ 移項すると $1 = 21 - 10 \cdot 2$
よって、 $1 = 21 - 10 \cdot 2 = 21 - (52 - 21 \cdot 2) \cdot 2 = 52 \cdot (-2) + 21 \cdot 5$
すなわち $52 \cdot (-2) + 21 \cdot 5 = 1$
両辺に 2 を掛けると $52 \cdot (-4) + 21 \cdot 10 = 2$
したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -4, y = 10$

④ (1) 等式 $24x + 17y = 1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求める。

24 と 17 に互除法の計算を行う。

$$\begin{array}{ll} 24 = 17 \cdot 1 + 7 & \text{移項すると } 7 = 24 - 17 \cdot 1 \\ 17 = 7 \cdot 2 + 3 & \text{移項すると } 3 = 17 - 7 \cdot 2 \\ 7 = 3 \cdot 2 + 1 & \text{移項すると } 1 = 7 - 3 \cdot 2 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - (17 - 7 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 5 + 17 \cdot (-2) \\ &= (24 - 17 \cdot 1) \cdot 5 + 17 \cdot (-2) \\ &= 24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) \end{aligned}$$

すなわち $24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) = 1$ …… ①
したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 5, y = -7$

(2) 等式 $24x + 17y = 3$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求める。

① の両辺に 3 を掛けると $24 \cdot (3 \cdot 5) + 17 \cdot \{3 \cdot (-7)\} = 3$

すなわち $24 \cdot 15 + 17 \cdot (-21) = 3$
 よって、求める整数 x, y の組の 1 つは
 $x = 15, y = -21$

解説

5 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(1) $26x + 11y = 1$ (2) $30x + 17y = 5$

解答 (1) $x = 3, y = -7$ (2) $x = 20, y = -35$

解説

(1) 26 と 11 に互除法の計算を行う。

$$\begin{array}{ll} 26 = 11 \cdot 2 + 4 & \text{移項すると } 4 = 26 - 11 \cdot 2 \\ 11 = 4 \cdot 2 + 3 & \text{移項すると } 3 = 11 - 4 \cdot 2 \\ 4 = 3 \cdot 1 + 1 & \text{移項すると } 1 = 4 - 3 \cdot 1 \end{array}$$

よって $1 = 4 - 3 \cdot 1$
 $= 4 - (11 - 4 \cdot 2) \cdot 1$
 $= 4 \cdot 3 + 11 \cdot (-1)$
 $= (26 - 11 \cdot 2) \cdot 3 + 11 \cdot (-1)$
 $= 26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7)$

すなわち $26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7) = 1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 3, y = -7$

(2) 30 と 17 に互除法の計算を行う。

$$\begin{array}{ll} 30 = 17 \cdot 1 + 13 & \text{移項すると } 13 = 30 - 17 \cdot 1 \\ 17 = 13 \cdot 1 + 4 & \text{移項すると } 4 = 17 - 13 \cdot 1 \\ 13 = 4 \cdot 3 + 1 & \text{移項すると } 1 = 13 - 4 \cdot 3 \end{array}$$

よって $1 = 13 - 4 \cdot 3$
 $= 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3$
 $= 13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$
 $= (30 - 17 \cdot 1) \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$
 $= 30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7)$

すなわち $30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) = 1$

両辺に 5 を掛けると

$$30 \cdot (5 \cdot 4) + 17 \cdot \{5 \cdot (-7)\} = 5$$

すなわち $30 \cdot 20 + 17 \cdot (-35) = 5$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 20, y = -35$

別解 (1) 26 と 11 に互除法の計算を行う。

$$\begin{array}{l} 26 = 11 \cdot 2 + 4 \\ 11 = 4 \cdot 2 + 3 \\ 4 = 3 \cdot 1 + 1 \end{array}$$

$a = 26, b = 11$ とおく。

$$\begin{array}{ll} 4 = 26 - 11 \cdot 2 \text{ より} & 4 = a - b \cdot 2 = a - 2b \\ 3 = 11 - 4 \cdot 2 \text{ より} & 3 = b - (a - 2b) \cdot 2 = -2a + 5b \\ 1 = 4 - 3 \cdot 1 \text{ より} & 1 = (a - 2b) - (-2a + 5b) \cdot 1 = 3a - 7b \end{array}$$

よって、 $3a - 7b = 1$ より $26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7) = 1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 3, y = -7$

(2) 30 と 17 に互除法の計算を行う。

$$\begin{array}{l} 30 = 17 \cdot 1 + 13 \\ 17 = 13 \cdot 1 + 4 \\ 13 = 4 \cdot 3 + 1 \end{array}$$

$a = 30, b = 17$ とおく。

$$\begin{array}{ll} 13 = 30 - 17 \cdot 1 \text{ より} & 13 = a - b \cdot 1 = a - b \\ 4 = 17 - 13 \cdot 1 \text{ より} & 4 = b - (a - b) \cdot 1 = -a + 2b \\ 1 = 13 - 4 \cdot 3 \text{ より} & 1 = (a - b) - (-a + 2b) \cdot 3 = 4a - 7b \end{array}$$

よって、 $4a - 7b = 1$ より $30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) = 1$

両辺に 5 を掛けると

$$30 \cdot (5 \cdot 4) + 17 \cdot \{5 \cdot (-7)\} = 5$$

すなわち $30 \cdot 20 + 17 \cdot (-35) = 5$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 20, y = -35$

6 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。 [15点×2=30点]

(1) $33x + 14y = 1$ (2) $33x + 14y = 4$

解答 (1) 33 と 14 に互除法の計算を行う。

$$\begin{array}{ll} 33 = 14 \cdot 2 + 5 & \text{移項すると } 5 = 33 - 14 \cdot 2 \\ 14 = 5 \cdot 2 + 4 & \text{移項すると } 4 = 14 - 5 \cdot 2 \\ 5 = 4 \cdot 1 + 1 & \text{移項すると } 1 = 5 - 4 \cdot 1 \end{array}$$

よって $1 = 5 - 4 \cdot 1$
 $= 5 - (14 - 5 \cdot 2) \cdot 1$
 $= 5 \cdot 3 + 14 \cdot (-1)$
 $= (33 - 14 \cdot 2) \cdot 3 + 14 \cdot (-1)$
 $= 33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7)$

すなわち $33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7) = 1$ …… ①

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 3, y = -7$$

(2) ①の両辺に 4 を掛けると

$$33 \cdot (4 \cdot 3) + 14 \cdot \{4 \cdot (-7)\} = 4$$

すなわち $33 \cdot 12 + 14 \cdot (-28) = 4$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 12, y = -28$$

解説

(1) 33 と 14 に互除法の計算を行う。

$$\begin{array}{ll} 33 = 14 \cdot 2 + 5 & \text{移項すると } 5 = 33 - 14 \cdot 2 \\ 14 = 5 \cdot 2 + 4 & \text{移項すると } 4 = 14 - 5 \cdot 2 \\ 5 = 4 \cdot 1 + 1 & \text{移項すると } 1 = 5 - 4 \cdot 1 \end{array}$$

よって $1 = 5 - 4 \cdot 1$
 $= 5 - (14 - 5 \cdot 2) \cdot 1$
 $= 5 \cdot 3 + 14 \cdot (-1)$
 $= (33 - 14 \cdot 2) \cdot 3 + 14 \cdot (-1)$
 $= 33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7)$

すなわち $33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7) = 1$ …… ①

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 3, y = -7$$

(2) ①の両辺に 4 を掛けると

$$33 \cdot (4 \cdot 3) + 14 \cdot \{4 \cdot (-7)\} = 4$$

すなわち $33 \cdot 12 + 14 \cdot (-28) = 4$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 12, y = -28$$

7 次の方程式の整数解の 1 つを求めよ。

(1) $17x + 13y = 1$ (2) $24x + 19y = 1$

解答 (1) $x = -3, y = 4$ (2) $x = 4, y = -5$

解説

(1) 17 と 13 に互除法を適用すると、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 17 = 13 \cdot 1 + 4 & \leftarrow \text{変形すると } 4 = 17 - 13 \cdot 1 \\ 13 = 4 \cdot 3 + 1 & \leftarrow \text{変形すると } 1 = 13 - 4 \cdot 3 \end{array}$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3 = 13 \cdot 4 - 17 \cdot 3$$

したがって $17 \cdot (-3) + 13 \cdot 4 = 1$

よって、 $17x + 13y = 1$ の整数解の 1 つとして $x = -3, y = 4$ が得られる。

(2) 24 と 19 に互除法を適用すると、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 24 = 19 \cdot 1 + 5 & \leftarrow \text{変形すると } 5 = 24 - 19 \cdot 1 \\ 19 = 5 \cdot 3 + 4 & \leftarrow \text{変形すると } 4 = 19 - 5 \cdot 3 \\ 5 = 4 \cdot 1 + 1 & \leftarrow \text{変形すると } 1 = 5 - 4 \cdot 1 \end{array}$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 4 \cdot 1 = 5 - (19 - 5 \cdot 3) \cdot 1 = 5 \cdot 4 - 19 \cdot 1 \\ &= (24 - 19 \cdot 1) \cdot 4 - 19 \cdot 1 = 24 \cdot 4 - 19 \cdot 5 \end{aligned}$$

したがって $24 \cdot 4 + 19 \cdot (-5) = 1$

よって、 $24x + 19y = 1$ の整数解の 1 つとして $x = 4, y = -5$ が得られる。

8 次の方程式の整数解の 1 つを求めよ。 [20 点]

$$30x + 17y = 1$$

解答 30 と 17 に互除法を適用すると、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 30 = 17 \cdot 1 + 13 & (\text{変形すると } 13 = 30 - 17 \cdot 1) \\ 17 = 13 \cdot 1 + 4 & (\text{変形すると } 4 = 17 - 13 \cdot 1) \\ 13 = 4 \cdot 3 + 1 & (\text{変形すると } 1 = 13 - 4 \cdot 3) \end{array}$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 4 \cdot 3 = 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3 = 13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3) \\ &= (30 - 17 \cdot 1) \cdot 4 + 17 \cdot (-3) = 30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) \end{aligned}$$

よって $30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) = 1$

したがって、 $30x + 17y = 1$ の整数解の 1 つは $x = 4, y = -7$

解説

30 と 17 に互除法を適用すると、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 30 = 17 \cdot 1 + 13 & (\text{変形すると } 13 = 30 - 17 \cdot 1) \\ 17 = 13 \cdot 1 + 4 & (\text{変形すると } 4 = 17 - 13 \cdot 1) \\ 13 = 4 \cdot 3 + 1 & (\text{変形すると } 1 = 13 - 4 \cdot 3) \end{array}$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 4 \cdot 3 = 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3 = 13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3) \\ &= (30 - 17 \cdot 1) \cdot 4 + 17 \cdot (-3) = 30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) \end{aligned}$$

よって $30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) = 1$

したがって、 $30x + 17y = 1$ の整数解の 1 つは $x = 4, y = -7$

9 次の方程式の整数解の 1 つを求めよ。 [20 点]

$$83x + 54y = 1$$

解答 83 と 54 に互除法を適用すると、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 83 = 54 \cdot 1 + 29 & (\text{変形すると } 29 = 83 - 54 \cdot 1) \\ 54 = 29 \cdot 1 + 25 & (\text{変形すると } 25 = 54 - 29 \cdot 1) \\ 29 = 25 \cdot 1 + 4 & (\text{変形すると } 4 = 29 - 25 \cdot 1) \\ 25 = 4 \cdot 6 + 1 & (\text{変形すると } 1 = 25 - 4 \cdot 6) \end{array}$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$\begin{aligned} 1 &= 25 - 4 \cdot 6 = 25 - (29 - 25 \cdot 1) \cdot 6 \\ &= 25 \cdot 7 - 29 \cdot 6 = (54 - 29 \cdot 1) \cdot 7 - 29 \cdot 6 \\ &= 54 \cdot 7 - 29 \cdot 13 = 54 \cdot 7 - (83 - 54 \cdot 1) \cdot 13 \\ &= 83 \cdot (-13) + 54 \cdot 20 \end{aligned}$$

よって $83 \cdot (-13) + 54 \cdot 20 = 1$
したがって、 $83x + 54y = 1$ の整数解の 1 つは $x = -13, y = 20$

解説

83 と 54 に互除法を適用すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} 83 &= 54 \cdot 1 + 29 & (\text{変形すると } 29 &= 83 - 54 \cdot 1) \\ 54 &= 29 \cdot 1 + 25 & (\text{変形すると } 25 &= 54 - 29 \cdot 1) \\ 29 &= 25 \cdot 1 + 4 & (\text{変形すると } 4 &= 29 - 25 \cdot 1) \\ 25 &= 4 \cdot 6 + 1 & (\text{変形すると } 1 &= 25 - 4 \cdot 6) \end{aligned}$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$\begin{aligned} 1 &= 25 - 4 \cdot 6 = 25 - (29 - 25 \cdot 1) \cdot 6 \\ &= 25 \cdot 7 - 29 \cdot 6 = (54 - 29 \cdot 1) \cdot 7 - 29 \cdot 6 \\ &= 54 \cdot 7 - 29 \cdot 13 = 54 \cdot 7 - (83 - 54 \cdot 1) \cdot 13 \\ &= 83 \cdot (-13) + 54 \cdot 20 \end{aligned}$$

よって $83 \cdot (-13) + 54 \cdot 20 = 1$
したがって、 $83x + 54y = 1$ の整数解の 1 つは $x = -13, y = 20$

10 次の方程式を満たす整数 x, y の組を 1 組求めなさい。

(1) $31x + 9y = 1$ (2) $11x + 24y = 1$

解答 (1) $x = -2, y = 7$ (2) $x = 11, y = -5$

解説

(1) $31 = 9 \times 3 + 4 \dots\dots ①$
 $9 = 4 \times 2 + 1 \dots\dots ②$
② から $1 = 9 - 4 \times 2 \dots\dots ③$

① から $4 = 31 - 9 \times 3$

これを ③ に代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - (31 - 9 \times 3) \times 2 \\ &= 9 - 31 \times 2 + 9 \times 6 \\ &= 31 \times (-2) + 9 \times 7 \end{aligned}$$

よって $31 \times (-2) + 9 \times 7 = 1$

したがって、方程式 $31x + 9y = 1$ を満たす整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -2, y = 7$$

(2) $24 = 11 \times 2 + 2 \dots\dots ①$

$$11 = 2 \times 5 + 1 \dots\dots ②$$

② から $1 = 11 - 2 \times 5 \dots\dots ③$

① から $2 = 24 - 11 \times 2$

これを ③ に代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - (24 - 11 \times 2) \times 5 \\ &= 11 - 24 \times 5 + 11 \times 10 \\ &= 11 \times 11 + 24 \times (-5) \end{aligned}$$

よって $11 \times 11 + 24 \times (-5) = 1$

したがって、方程式 $11x + 24y = 1$ を満たす整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 11, y = -5$$

11 次の方程式を満たす整数 x, y の組を 1 組求めなさい。

(1) $47x + 22y = 1$ (2) $44x + 25y = 1$

解答 (1) $x = -7, y = 15$ (2) $x = 4, y = -20$

解説

(1) $47 = 22 \times 2 + 3 \dots\dots ①$
 $22 = 3 \times 7 + 1 \dots\dots ②$

② から $1 = 22 - 3 \times 7 \dots\dots ③$

① から $3 = 47 - 22 \times 2$

これを ③ に代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= 22 - (47 - 22 \times 2) \times 7 = 22 - 47 \times 7 + 22 \times 14 \\ &= 47 \times (-7) + 22 \times 15 \end{aligned}$$

よって $47 \times (-7) + 22 \times 15 = 1$

したがって、方程式 $47x + 22y = 1$ を満たす整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -7, y = 15$$

(2) $44 = 25 \times 1 + 19 \dots\dots ①$

$$25 = 19 \times 1 + 6 \dots\dots ②$$

$$19 = 6 \times 3 + 1 \dots\dots ③$$

③ から $1 = 19 - 6 \times 3 \dots\dots ④$

②, ① から $6 = 25 - 19 \times 1, 19 = 44 - 25 \times 1$

これらを ④ に代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= 19 - (25 - 19 \times 1) \times 3 = 19 - 25 \times 3 + 19 \times 3 \\ &= -25 \times 3 + 19 \times 4 = -25 \times 3 + (44 - 25 \times 1) \times 4 \\ &= -25 \times 7 + 44 \times 4 = 44 \times 4 + 25 \times (-7) \end{aligned}$$

よって $44 \times 4 + 25 \times (-7) = 1$

したがって、方程式 $44x + 25y = 1$ を満たす整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 4, y = -7$$

12 方程式 $21x + 19y = 1$ を満たす整数 x, y の組を 1 組求めなさい。 [25 点]

解答 $21 = 19 \times 1 + 2 \dots\dots ①$

$$19 = 2 \times 9 + 1 \dots\dots ②$$

② から $1 = 19 - 2 \times 9 \dots\dots ③$

① から $2 = 21 - 19 \times 1$

これを ③ に代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= 19 - (21 - 19 \times 1) \times 9 \\ &= 19 - 21 \times 9 + 19 \times 9 \\ &= 21 \times (-9) + 19 \times 10 \end{aligned}$$

よって $21 \times (-9) + 19 \times 10 = 1$

したがって、方程式 $21x + 19y = 1$ を満たす整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -9, y = 10$$

解説

$$21 = 19 \times 1 + 2 \dots\dots ①$$

$$19 = 2 \times 9 + 1 \dots\dots ②$$

② から $1 = 19 - 2 \times 9 \dots\dots ③$

① から $2 = 21 - 19 \times 1$

これを ③ に代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= 19 - (21 - 19 \times 1) \times 9 \\ &= 19 - 21 \times 9 + 19 \times 9 \\ &= 21 \times (-9) + 19 \times 10 \end{aligned}$$

よって $21 \times (-9) + 19 \times 10 = 1$

したがって、方程式 $21x + 19y = 1$ を満たす整数 x, y の組の 1 つは $x = -9, y = 10$

13 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(1) $11x + 19y = 1$ (2) $11x + 19y = 5$

解答 (1) $x = 7, y = -4$ (2) $x = 35, y = -20$

解説

(1) $19 = 11 \cdot 1 + 8$ 移項すると $8 = 19 - 11 \cdot 1$
 $11 = 8 \cdot 1 + 3$ 移項すると $3 = 11 - 8 \cdot 1$

$8 = 3 \cdot 2 + 2$ 移項すると $2 = 8 - 3 \cdot 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$ 移項すると $1 = 3 - 2 \cdot 1$

よって $1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (8 - 3 \cdot 2) \cdot 1$
 $= 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 8 \cdot (-1) + (11 - 8 \cdot 1) \cdot 3$
 $= 11 \cdot 3 + 8 \cdot (-4) = 11 \cdot 3 + (19 - 11 \cdot 1) \cdot (-4)$
 $= 11 \cdot 7 + 19 \cdot (-4)$

すなわち $11 \cdot 7 + 19 \cdot (-4) = 1 \dots\dots ①$

ゆえに、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 7, y = -4$

別解 $a = 11, b = 19$ とする。

$$8 = 19 - 11 \cdot 1 = b - a$$

$$3 = 11 - 8 \cdot 1 = a - (b - a) = 2a - b$$

$$2 = 8 - 3 \cdot 2 = (b - a) - (2a - b) \cdot 2 = -5a + 3b$$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = (2a - b) - (-5a + 3b) \cdot 1 = 7a - 4b$$

すなわち $11 \cdot 7 + 19 \cdot (-4) = 1$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 7, y = -4$

(2) ① の両辺に 5 を掛けると

$$11 \cdot (7 \cdot 5) + 19 \cdot \{(-4) \cdot 5\} = 5$$

すなわち $11 \cdot 35 + 19 \cdot (-20) = 5$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 35, y = -20$

14 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(1) $19x + 26y = 1$ (2) $19x + 26y = -2$

解答 (1) $x = 11, y = -8$ (2) $x = -22, y = 16$

解説

(1) $26 = 19 \cdot 1 + 7$ 移項すると $7 = 26 - 19 \cdot 1$

$19 = 7 \cdot 2 + 5$ 移項すると $5 = 19 - 7 \cdot 2$

$7 = 5 \cdot 1 + 2$ 移項すると $2 = 7 - 5 \cdot 1$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$ 移項すると $1 = 5 - 2 \cdot 2$

よって $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2$
 $= 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 7 \cdot (-2) + (19 - 7 \cdot 2) \cdot 3$
 $= 19 \cdot 3 + 7 \cdot (-8) = 19 \cdot 3 + (26 - 19 \cdot 1) \cdot (-8)$
 $= 19 \cdot 11 + 26 \cdot (-8)$

すなわち $19 \cdot 11 + 26 \cdot (-8) = 1 \dots\dots ①$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 11, y = -8$$

別解 $a = 19, b = 26$ とする。

$$7 = 26 - 19 \cdot 1 = b - a$$

$$5 = 19 - 7 \cdot 2 = a - 2(b - a) = 3a - 2b$$

$$2 = 7 - 5 \cdot 1 = (b - a) - (3a - 2b) = -4a + 3b$$

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = (3a - 2b) - 2(-4a + 3b) = 11a - 8b$$

すなわち $19 \cdot 11 + 26 \cdot (-8) = 1$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 11, y = -8$

(2) ① の両辺に -2 を掛けると

$$19 \cdot \{11 \cdot (-2)\} + 26 \cdot \{(-8) \cdot (-2)\} = -2$$

すなわち $19 \cdot (-22) + 26 \cdot 16 = -2$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -22, y = 16$$

15 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(1) $9x + 23y = 3$ (2) $13x - 24y = 5$

解答 (1) $x = -15, y = 6$ (2) $x = -55, y = -30$

解説

(1) $23 = 9 \cdot 2 + 5$ 移項すると $5 = 23 - 9 \cdot 2$

$$\begin{array}{lcl}
9=5\cdot 1+4 & \text{移項すると} & 4=9-5\cdot 1 \\
5=4\cdot 1+1 & \text{移項すると} & 1=5-4\cdot 1 \\
\text{よって} & & 1=5-4\cdot 1 \\
& & =5-(9-5\cdot 1)\cdot 1 \\
& & =5\cdot 2-9\cdot 1 \\
& & =(23-9\cdot 2)\cdot 2-9\cdot 1 \\
& & =9\cdot (-5)+23\cdot 2 \\
\text{すなわち} & & 9\cdot (-5)+23\cdot 2=1 \\
\text{両辺に} 3 \text{ を掛けて} & & \\
& & 9\cdot (-15)+23\cdot 6=3 \\
\text{したがって, 求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} & & \\
& & x=-15, y=6 \\
(2) \quad -24=13\cdot (-2)+2 & \text{移項すると} & 2=-24-13\cdot (-2) \\
& & 13=2\cdot 6+1 \quad \text{移項すると} \quad 1=13-2\cdot 6 \\
\text{よって} & & 1=13-2\cdot 6 \\
& & =13-[-24-13\cdot (-2)]\cdot 6 \\
& & =13\cdot (-11)-24\cdot (-6) \\
\text{すなわち} & & 13\cdot (-11)-24\cdot (-6)=1 \\
\text{両辺に} 5 \text{ を掛けて} & & \\
& & 13\cdot (-55)-24\cdot (-30)=5 \\
\text{したがって, 求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} & & \\
& & x=-55, y=-30
\end{array}$$

(1) 等式 $31x+17y=1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。
(2) 等式 $31x+17y=4$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

解答 (1) $x=-6, y=11$ (2) $x=-24, y=44$

解説

$$\begin{array}{lcl}
(1) \quad 31=17\cdot 1+14 & \text{移項すると} & 14=31-17\cdot 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
& & 17=14\cdot 1+3 \quad \text{移項すると} \quad 3=17-14\cdot 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\
& & 14=3\cdot 4+2 \quad \text{移項すると} \quad 2=14-3\cdot 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \\
& & 3=2\cdot 1+1 \quad \text{移項すると} \quad 1=3-2\cdot 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \\
\text{よって} & & 1=3-2\cdot 1=3-(14-3\cdot 4)\cdot 1 \\
& & =3\cdot 5+14\cdot (-1) \\
& & =(17-14\cdot 1)\cdot 5+14\cdot (-1) \\
& & =17\cdot 5+14\cdot (-6) \\
& & =17\cdot 5+(31-17\cdot 1)\cdot (-6) \\
& & =31\cdot (-6)+17\cdot 11 \\
\text{したがって, } 31\cdot (-6)+17\cdot 11=1 & \text{が成り立つから, 求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} & \\
& & x=-6, y=11 \\
(2) \quad (1) \text{ から, } 31\cdot (-6)+17\cdot 11=1 & \text{が成り立つ。} & \\
\text{この両辺を } 4 \text{ 倍して} & & 31\cdot (-24)+17\cdot 44=4 \\
\text{よって, 求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} & & x=-24, y=44
\end{array}$$

- (1) 等式 $53x+29y=1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。
- (2) 等式 $53x+29y=-3$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

解答 (1) $x=-6, y=11$ (2) $x=18, y=-33$

解説

$$\begin{array}{lcl}
(1) \quad 53=29\cdot 1+24 & \text{移項すると} & 24=53-29\cdot 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
& & 29=24\cdot 1+5 \quad \text{移項すると} \quad 5=29-24\cdot 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\
& & 24=5\cdot 4+4 \quad \text{移項すると} \quad 4=24-5\cdot 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \\
& & 5=4\cdot 1+1 \quad \text{移項すると} \quad 1=5-4\cdot 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\text{よって} & 1=5-4\cdot 1=5-(24-5\cdot 4)\cdot 1 & \begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \overline{) 4} \overline{) 5} \overline{) 24} \overline{) 29} \overline{) 53} \\ 4 \quad 4 \quad 20 \quad 24 \quad 29 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 24 \end{array} \\
& =5\cdot 5-24\cdot 1 & \\
& =(29-24\cdot 1)\cdot 5-24\cdot 1 & \\
& =29\cdot 5+24\cdot (-6) & \\
& =29\cdot 5+(53-29\cdot 1)\cdot (-6) & \\
& =53\cdot (-6)+29\cdot 11 &
\end{array}$$

したがって, $53\cdot (-6)+29\cdot 11=1$ が成り立つから, 求める整数 x, y の組の 1 つは $x=-6, y=11$

- (2) (1) から, $53\cdot (-6)+29\cdot 11=1$ が成り立つ。

この両辺を -3 倍して $53\cdot 18+29\cdot (-33)=-3$

よって, 求める整数 x, y の組の 1 つは $x=18, y=-33$

- (18) 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$\begin{array}{lll}
(1) \quad 24x+19y=1 & (2) \quad 85x-66y=3 & (3) \quad 43x+35y=1 \\
(4) \quad 61x-48y=2 & (5) \quad 43x+18y=3 & (6) \quad 36x-25y=4
\end{array}$$

解答 (1) $x=4, y=-5$ (2) $x=21, y=27$ (3) $x=-13, y=16$
(4) $x=-22, y=-28$ (5) $x=3, y=-7$ (6) $x=14, y=20$

解説

- (1) 24 と 19 に互除法の計算を行うと, 次のようになる。

$$\begin{array}{lcl}
24=19\cdot 1+5 & \text{移項すると} & 5=24-19\cdot 1 \\
19=5\cdot 3+4 & \text{移項すると} & 4=19-5\cdot 3 \\
5=4\cdot 1+1 & \text{移項すると} & 1=5-4\cdot 1 \\
\text{よって} & & 1=5-4\cdot 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
=5-(19-5\cdot 3)\cdot 1 \\
=5\cdot 4+19\cdot (-1) \\
=(24-19\cdot 1)\cdot 4+19\cdot (-1) \\
=24\cdot 4+19\cdot (-5)
\end{array}$$

すなわち $24\cdot 4+19\cdot (-5)=1$

したがって, 求める整数 x, y の組の 1 つは $x=4, y=-5$

- 別解** (互除法の計算までは同じ)

$a=24, b=19$ とおく。

$$\begin{array}{lcl}
5=24-19\cdot 1 \text{ より} & & 5=a-b\cdot 1=a-b \\
4=19-5\cdot 3 \text{ より} & & 4=b-(a-b)\cdot 3=-3a+4b \\
1=5-4\cdot 1 \text{ より} & & 1=(a-b)-(-3a+4b)\cdot 1=4a-5b \\
\text{よって, } 4a-5b=1 \text{ より} & & 24\cdot 4+19\cdot (-5)=1
\end{array}$$

したがって, 求める整数 x, y の組の 1 つは $x=4, y=-5$

- 参考** 割り算の等式を利用して係数を小さくする方法を考えてみる。

$24=19\cdot 1+5$ より, 方程式は次のようになる。 $(19\cdot 1+5)x+19y=1$

整理すると $5x+19(x+y)=1$

$19=5\cdot 3+4$ より $5x+(5\cdot 3+4)(x+y)=1$ すなわち $5(4x+3y)+4(x+y)=1$

$4x+3y=m, x+y=n$ とおくと $5m+4n=1$

この等式を満たす整数 m, n の組の 1 つは $m=1, n=-1$

$4x+3y=1, x+y=-1$ を解くと $x=4, y=-5$

- (2) 85 と 66 に互除法の計算を行うと, 次のようになる。

$$\begin{array}{lcl}
85=66\cdot 1+19 & \text{移項すると} & 19=85-66\cdot 1 \\
66=19\cdot 3+9 & \text{移項すると} & 9=66-19\cdot 3 \\
19=9\cdot 2+1 & \text{移項すると} & 1=19-9\cdot 2 \\
\text{よって} & & 1=19-9\cdot 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
=19-(66-19\cdot 3)\cdot 2 \\
=19\cdot 7-66\cdot 2 \\
=(85-66\cdot 1)\cdot 7-66\cdot 2
\end{array}$$

$$=85\cdot 7-66\cdot 9$$

すなわち $85\cdot 7-66\cdot 9=1$

両辺に 3 を掛けて $85\cdot (3\cdot 7)-66\cdot (3\cdot 9)=3$

すなわち $85\cdot 21-66\cdot 27=3$

したがって, 求める整数 x, y の組の 1 つは $x=21, y=27$

- 別解** (互除法の計算までは同じ)

$a=85, b=66$ とおく。

$19=85-66\cdot 1$ より $19=a-b\cdot 1=a-b$

$9=66-19\cdot 3$ より $9=b-(a-b)\cdot 3=-3a+4b$

$1=19-9\cdot 2$ より $1=(a-b)-(-3a+4b)\cdot 2=7a-9b$

よって, $7a-9b=1$ より $85\cdot 7-66\cdot 9=1$

両辺に 3 を掛けて $85\cdot (3\cdot 7)-66\cdot (3\cdot 9)=3$ すなわち $85\cdot 21-66\cdot 27=3$

したがって, 求める整数 x, y の組の 1 つは $x=21, y=27$

- (3) 43 と 35 に互除法の計算を行うと, 次のようになる。

$$\begin{array}{lcl}
43=35\cdot 1+8 & \text{移項すると} & 8=43-35\cdot 1 \\
35=8\cdot 4+3 & \text{移項すると} & 3=35-8\cdot 4 \\
8=3\cdot 2+2 & \text{移項すると} & 2=8-3\cdot 2 \\
3=2\cdot 1+1 & \text{移項すると} & 1=3-2\cdot 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{よって} \quad 1=3-2\cdot 1 \\
\quad \quad =3-(8-3\cdot 2)\cdot 1 \\
\quad \quad =3\cdot 3+8\cdot (-1) \\
\quad \quad =(35-8\cdot 4)\cdot 3+8\cdot (-1) \\
\quad \quad =35\cdot 3+8\cdot (-13) \\
\quad \quad =35\cdot 3+(43-35\cdot 1)\cdot (-13) \\
\quad \quad =43\cdot (-13)+35\cdot 16
\end{array}$$

すなわち $43\cdot (-13)+35\cdot 16=1$

したがって, 求める整数 x, y の組の 1 つは $x=-13, y=16$

- 別解** (互除法の計算までは同じ)

$a=43, b=35$ とおく。

$8=43-35\cdot 1$ より $8=a-b\cdot 1=a-b$

$3=35-8\cdot 4$ より $3=b-(a-b)\cdot 4=-4a+5b$

$2=8-3\cdot 2$ より $2=(a-b)-(-4a+5b)\cdot 2=9a-11b$

$1=3-2\cdot 1$ より $1=(-4a+5b)-(9a-11b)\cdot 1=-13a+16b$

よって, $-13a+16b=1$ より $43\cdot (-13)+35\cdot 16=1$

したがって, 求める整数 x, y の組の 1 つは $x=-13, y=16$

- (4) 61 と 48 に互除法の計算を行うと, 次のようになる。

$$\begin{array}{lcl}
61=48\cdot 1+13 & \text{移項すると} & 13=61-48\cdot 1 \\
48=13\cdot 3+9 & \text{移項すると} & 9=48-13\cdot 3 \\
13=9\cdot 1+4 & \text{移項すると} & 4=13-9\cdot 1 \\
9=4\cdot 2+1 & \text{移項すると} & 1=9-4\cdot 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{よって} \quad 1=9-4\cdot 2 \\
\quad \quad =9-(13-9\cdot 1)\cdot 2 \\
\quad \quad =9\cdot 3+13\cdot (-2) \\
\quad \quad =(48-13\cdot 3)\cdot 3+13\cdot (-2) \\
\quad \quad =48\cdot 3+13\cdot (-11) \\
\quad \quad =48\cdot 3+(61-48\cdot 1)\cdot (-11) \\
\quad \quad =61\cdot (-11)+48\cdot 14
\end{array}$$

すなわち $61\cdot (-11)+48\cdot 14=1$

したがって $61\cdot (-11)-48\cdot (-14)=1$

両辺に 2 を掛けて $61\cdot \{2\cdot (-11)\}-48\cdot \{2\cdot (-14)\}=2$

すなわち $61\cdot (-22)-48\cdot (-28)=2$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -22, y = -28$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$a = 61, b = 48$ とおく。

$$13 = 61 - 48 \cdot 1 \text{ より } 13 = a - b \cdot 1 = a - b$$

$$9 = 48 - 13 \cdot 3 \text{ より } 9 = b - (a - b) \cdot 3 = -3a + 4b$$

$$4 = 13 - 9 \cdot 1 \text{ より } 4 = (a - b) - (-3a + 4b) \cdot 1 = 4a - 5b$$

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 \text{ より } 1 = (-3a + 4b) - (4a - 5b) \cdot 2 = -11a + 14b$$

$$\text{よって, } -11a + 14b = 1 \text{ より } 61 \cdot (-11) + 48 \cdot 14 = 1$$

$$\text{すなわち } 61 \cdot (-11) - 48 \cdot (-14) = 1$$

$$\text{両辺に 2 を掛けて } 61 \cdot \{2 \cdot (-11)\} - 48 \cdot \{2 \cdot (-14)\} = 2$$

$$\text{すなわち } 61 \cdot (-22) - 48 \cdot (-28) = 2$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -22, y = -28$

(5) 43 と 18 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$43 = 18 \cdot 2 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7 = 43 - 18 \cdot 2$$

$$18 = 7 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると} \quad 4 = 18 - 7 \cdot 2$$

$$7 = 4 \cdot 1 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 7 - 4 \cdot 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 3 &= 7 - 4 \cdot 1 \\ &= 7 - (18 - 7 \cdot 2) \cdot 1 \\ &= 7 \cdot 3 + 18 \cdot (-1) \\ &= (43 - 18 \cdot 2) \cdot 3 + 18 \cdot (-1) \\ &= 43 \cdot 3 + 18 \cdot (-7) \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } 43 \cdot 3 + 18 \cdot (-7) = 3$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 3, y = -7$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$a = 43, b = 18$ とおく。

$$7 = 43 - 18 \cdot 2 \text{ より } 7 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$4 = 18 - 7 \cdot 2 \text{ より } 4 = b - (a - 2b) \cdot 2 = -2a + 5b$$

$$3 = 7 - 4 \cdot 1 \text{ より } 3 = (a - 2b) - (-2a + 5b) \cdot 1 = 3a - 7b$$

$$\text{よって, } 3a - 7b = 3 \text{ より } 43 \cdot 3 + 18 \cdot (-7) = 3$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 3, y = -7$

注意 43 と 18 の互除法の計算は、①以降も続くが①の時点で与えられた等式の右辺 3 が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

(6) 36 と 25 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$36 = 25 \cdot 1 + 11 \quad \text{移項すると} \quad 11 = 36 - 25 \cdot 1$$

$$25 = 11 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 25 - 11 \cdot 2$$

$$11 = 3 \cdot 3 + 2 \quad \text{移項すると} \quad 2 = 11 - 3 \cdot 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 2 &= 11 - 3 \cdot 3 \\ &= 11 - (25 - 11 \cdot 2) \cdot 3 \\ &= 11 \cdot 7 - 25 \cdot 3 \\ &= (36 - 25 \cdot 1) \cdot 7 - 25 \cdot 3 \\ &= 36 \cdot 7 - 25 \cdot 10 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } 36 \cdot 7 - 25 \cdot 10 = 2$$

$$\text{両辺に 2 を掛けて } 36 \cdot (2 \cdot 7) - 25 \cdot (2 \cdot 10) = 4$$

$$\text{すなわち } 36 \cdot 14 - 25 \cdot 20 = 4$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 14, y = 20$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$a = 36, b = 25$ とおく。

$$11 = 36 - 25 \cdot 1 \text{ より } 11 = a - b \cdot 1 = a - b$$

$$3 = 25 - 11 \cdot 2 \text{ より } 3 = b - (a - b) \cdot 2 = -2a + 3b$$

$$2 = 11 - 3 \cdot 3 \text{ より } 2 = (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 3 = 7a - 10b$$

$$\text{よって, } 7a - 10b = 2 \text{ より } 36 \cdot 7 - 25 \cdot 10 = 2$$

$$\text{両辺に 2 を掛けて } 36 \cdot (2 \cdot 7) - 25 \cdot (2 \cdot 10) = 4$$

$$\text{すなわち } 36 \cdot 14 - 25 \cdot 20 = 4$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 14, y = 20$

注意 36 と 25 の互除法の計算は、①以降も続くが①の時点で与えられた等式の右辺 4 の約数 2 が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

19 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$(1) \quad 50x + 23y = 1$$

$$(2) \quad 90x + 37y = 2$$

$$(3) \quad 37x + 26y = 1$$

$$(4) \quad 62x - 23y = 5$$

$$(5) \quad 86x + 31y = 3$$

$$(6) \quad 103x - 38y = 10$$

解答 (1) $x = 6, y = -13$ (2) $x = 14, y = -34$ (3) $x = -7, y = 10$
(4) $x = -50, y = -135$ (5) $x = 4, y = -11$ (6) $x = 6, y = 16$

解説

(1) 50 と 23 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$50 = 23 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると} \quad 4 = 50 - 23 \cdot 2$$

$$23 = 4 \cdot 5 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 23 - 4 \cdot 5$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 1 &= 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (23 - 4 \cdot 5) \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 6 + 23 \cdot (-1) \\ &= (50 - 23 \cdot 2) \cdot 6 + 23 \cdot (-1) \\ &= 50 \cdot 6 + 23 \cdot (-13) \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } 50 \cdot 6 + 23 \cdot (-13) = 1$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 6, y = -13$

別解 $a = 50, b = 23$ とおく。

50 と 23 の互除法の計算から

$$4 = 50 - 23 \cdot 2 \text{ より } 4 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$\begin{aligned} 3 &= 23 - 4 \cdot 5 \text{ より } 3 = b - (a - 2b) \cdot 5 \\ &= -5a + 11b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \cdot 1 \text{ より } 1 = (a - 2b) - (-5a + 11b) \cdot 1 \\ &= 6a - 13b \end{aligned}$$

$$\text{よって, } 6a - 13b = 1 \text{ より } 50 \cdot 6 + 23 \cdot (-13) = 1$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 6, y = -13$

参考 割り算の等式を利用して係数を小さくする方法で求めることもできる。

$$\begin{aligned} 50 &= 23 \cdot 2 + 4 \text{ より, 方程式は次のようになる。} \\ (23 \cdot 2 + 4)x + 23y &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{整理すると } 4x + 23(2x + y) = 1$$

$$23 = 4 \cdot 5 + 3 \text{ より } 4x + (4 \cdot 5 + 3)(2x + y) = 1$$

$$\text{すなわち } 4(11x + 5y) + 3(2x + y) = 1$$

$$11x + 5y = m, 2x + y = n \text{ とおくと } 4m + 3n = 1$$

この等式を満たす整数 m, n の組の 1 つは $m = 1, n = -1$

$$11x + 5y = 1, 2x + y = -1 \text{ を解くと } x = 6, y = -13$$

(2) 90 と 37 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$90 = 37 \cdot 2 + 16 \quad \text{移項すると} \quad 16 = 90 - 37 \cdot 2$$

$$37 = 16 \cdot 2 + 5 \quad \text{移項すると} \quad 5 = 37 - 16 \cdot 2$$

$$16 = 5 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 16 - 5 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 1 &= 16 - 5 \cdot 3 = 16 - (37 - 16 \cdot 2) \cdot 3 \\ &= 16 \cdot 7 + 37 \cdot (-3) \\ &= (90 - 37 \cdot 2) \cdot 7 + 37 \cdot (-3) \\ &= 90 \cdot 7 + 37 \cdot (-17) \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } 90 \cdot 7 + 37 \cdot (-17) = 1$$

$$\text{両辺に 2 を掛けて } 90 \cdot 14 + 37 \cdot (-34) = 2$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 14, y = -34$

別解 $a = 90, b = 37$ とおく。

90 と 37 の互除法の計算から

$$16 = 90 - 37 \cdot 2 \text{ より } 16 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$\begin{aligned} 5 &= 37 - 16 \cdot 2 \text{ より } 5 = b - (a - 2b) \cdot 2 \\ &= -2a + 5b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 16 - 5 \cdot 3 \text{ より } 1 = (a - 2b) - (-2a + 5b) \cdot 3 \\ &= 7a - 17b \end{aligned}$$

$$\text{よって, } 7a - 17b = 1 \text{ より } 90 \cdot 7 + 37 \cdot (-17) = 1$$

$$\text{両辺に 2 を掛けて } 90 \cdot 14 + 37 \cdot (-34) = 2$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 14, y = -34$

(3) 37 と 26 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$37 = 26 \cdot 1 + 11 \quad \text{移項すると} \quad 11 = 37 - 26 \cdot 1$$

$$26 = 11 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると} \quad 4 = 26 - 11 \cdot 2$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 11 - 4 \cdot 2$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 1 &= 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (11 - 4 \cdot 2) \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 3 + 11 \cdot (-1) \\ &= (26 - 11 \cdot 2) \cdot 3 + 11 \cdot (-1) \\ &= 26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7) \\ &= 26 \cdot 3 + (37 - 26 \cdot 1) \cdot (-7) \\ &= 37 \cdot (-7) + 26 \cdot 10 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } 37 \cdot (-7) + 26 \cdot 10 = 1$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -7, y = 10$

(4) 62 と 23 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$62 = 23 \cdot 2 + 16 \quad \text{移項すると} \quad 16 = 62 - 23 \cdot 2$$

$$23 = 16 \cdot 1 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7 = 23 - 16 \cdot 1$$

$$16 = 7 \cdot 2 + 2 \quad \text{移項すると} \quad 2 = 16 - 7 \cdot 2$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 7 - 2 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 1 &= 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (16 - 7 \cdot 2) \cdot 3 \\ &= 7 \cdot 7 + 16 \cdot (-3) \\ &= (23 - 16 \cdot 1) \cdot 7 + 16 \cdot (-3) \\ &= 23 \cdot 7 + 16 \cdot (-10) \\ &= 23 \cdot 7 + (62 - 23 \cdot 2) \cdot (-10) \\ &= 62 \cdot (-10) + 23 \cdot 27 \\ &= 62 \cdot (-10) - 23 \cdot (-27) \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } 62 \cdot (-10) - 23 \cdot (-27) = 1$$

$$\text{両辺に 5 を掛けて } 62 \cdot (-50) - 23 \cdot (-135) = 5$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -50, y = -135$

別解 $a = 62, b = 23$ とおく。

62 と 23 の互除法の計算から

$$16 = 62 - 23 \cdot 2 \text{ より } 16 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$\begin{aligned} 7 &= 23 - 16 \cdot 1 \text{ より } 7 = b - (a - 2b) \cdot 1 \\ &= -a + 3b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= 16 - 7 \cdot 2 \text{ より } 2 = (a - 2b) - (-a + 3b) \cdot 2 \\ &= 3a - 8b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 2 \cdot 3 \text{ より } 1 = (-a + 3b) - (3a - 8b) \cdot 3 \\ &= -10a + 27b \end{aligned}$$

$$\text{よって, } -10a + 27b = 1 \text{ より } 62 \cdot (-10) - 23 \cdot (-27) = 1$$

$$\text{両辺に 5 を掛けて } 62 \cdot (-50) - 23 \cdot (-135) = 5$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -50, y = -135$

(5) 86 と 31 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{ll}
86=31\cdot 2+24 & \text{移項すると} \quad 24=86-31\cdot 2 \\
31=24\cdot 1+7 & \text{移項すると} \quad 7=31-24\cdot 1 \\
24=7\cdot 3+3 & \text{移項すると} \quad 3=24-7\cdot 3 \quad \cdots\cdots \textcircled{1} \\
\text{よって} \quad 3=24-7\cdot 3=24-(31-24\cdot 1)\cdot 3 \\
& =24\cdot 4+31\cdot (-3) \\
& =(86-31\cdot 2)\cdot 4+31\cdot (-3) \\
& =86\cdot 4+31\cdot (-11)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{すなわち} \quad 86\cdot 4+31\cdot (-11)=3 \\
\text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=4, y=-11
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\textbf{注意} \quad 86 \text{ と } 31 \text{ の互除法の計算は、} \textcircled{1} \text{ 以降も} \\
7=3\cdot 2+1
\end{array}$$

と続くが、 $\textcircled{1}$ の時点で等式の右辺 3 が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

$$\textbf{別解} \quad a=86, b=31 \text{ とおく。}$$

$$\begin{array}{ll}
86 \text{ と } 31 \text{ の互除法の計算から} \\
24=86-31\cdot 2 \text{ より} \quad 24=a-b\cdot 2=a-2b \\
7=31-24\cdot 1 \text{ より} \quad 7=b-(a-2b)\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =-a+3b \\
3=24-7\cdot 3 \text{ より} \quad 3=(a-2b)-(-a+3b)\cdot 3 \\
\qquad \qquad \qquad =4a-11b
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{よって、} 4a-11b=3 \text{ より} \quad 86\cdot 4+31\cdot (-11)=3 \\
\text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=4, y=-11
\end{array}$$

(6) 103 と 38 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{ll}
103=38\cdot 2+27 & \text{移項すると} \quad 27=103-38\cdot 2 \\
38=27\cdot 1+11 & \text{移項すると} \quad 11=38-27\cdot 1 \\
27=11\cdot 2+5 & \text{移項すると} \quad 5=27-11\cdot 2 \quad \cdots\cdots \textcircled{1} \\
\text{よって} \quad 5=27-11\cdot 2=27-(38-27\cdot 1)\cdot 2 \\
& =27\cdot 3+38\cdot (-2) \\
& =(103-38\cdot 2)\cdot 3+38\cdot (-2) \\
& =103\cdot 3+38\cdot (-8)=103\cdot 3-38\cdot 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{すなわち} \quad 103\cdot 3-38\cdot 8=5 \\
\text{両辺に 2 を掛けて} \quad 103\cdot 6-38\cdot 16=10 \\
\text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=6, y=16
\end{array}$$

注意 $\textcircled{1}$ の時点で等式の右辺 10 の約数 5 が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

$$\textbf{別解} \quad a=103, b=38 \text{ とおく。}$$

$$\begin{array}{ll}
103 \text{ と } 38 \text{ の互除法の計算から} \\
27=103-38\cdot 2 \text{ より} \quad 27=a-b\cdot 2=a-2b \\
11=38-27\cdot 1 \text{ より} \quad 11=b-(a-2b)\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =-a+3b \\
5=27-11\cdot 2 \text{ より} \quad 5=(a-2b)-(-a+3b)\cdot 2 \\
\qquad \qquad \qquad =3a-8b
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{よって、} 3a-8b=5 \text{ より} \quad 103\cdot 3-38\cdot 8=5 \\
\text{両辺に 2 を掛けて} \quad 103\cdot 6-38\cdot 16=10 \\
\text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=6, y=16
\end{array}$$

20 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$(1) \quad 23x+41y=1 \qquad (2) \quad 31x-43y=5 \qquad (3) \quad 26x+34y=6$$

$$\begin{array}{l}
\textbf{解答} \quad (1) \quad x=-16, y=9 \qquad (2) \quad x=-4, y=-3 \quad (x=-90, y=-65 \text{ でもよい}) \\
(3) \quad x=12, y=-9
\end{array}$$

解説

(1) 23 と 41 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll}
41=23\cdot 1+18 & \text{移項すると} \quad 18=41-23\cdot 1 \\
23=18\cdot 1+5 & \text{移項すると} \quad 5=23-18\cdot 1 \\
18=5\cdot 3+3 & \text{移項すると} \quad 3=18-5\cdot 3 \\
5=3\cdot 1+2 & \text{移項すると} \quad 2=5-3\cdot 1 \\
3=2\cdot 1+1 & \text{移項すると} \quad 1=3-2\cdot 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{よって} \quad 1=3-2\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =3-(5-3\cdot 1)\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =3\cdot 2+5\cdot (-1) \\
\qquad \qquad \qquad =(18-5\cdot 3)\cdot 2+5\cdot (-1) \\
\qquad \qquad \qquad =18\cdot 2+5\cdot (-7) \\
\qquad \qquad \qquad =18\cdot 2+(23-18\cdot 1)\cdot (-7) \\
\qquad \qquad \qquad =18\cdot 9+23\cdot (-7) \\
\qquad \qquad \qquad =(41-23\cdot 1)\cdot 9+23\cdot (-7) \\
\qquad \qquad \qquad =23\cdot (-16)+41\cdot 9
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{すなわち} \quad 23\cdot (-16)+41\cdot 9=1 \\
\text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=-16, y=9
\end{array}$$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$$\begin{array}{ll}
a=23, b=41 \text{ とおく。} \\
18=41-23\cdot 1 \text{ より} \quad 18=b-a\cdot 1=b-a \\
5=23-18\cdot 1 \text{ より} \quad 5=a-(b-a)\cdot 1=2a-b \\
3=18-5\cdot 3 \text{ より} \quad 3=(b-a)-(2a-b)\cdot 3=-7a+4b \\
2=5-3\cdot 1 \text{ より} \quad 2=(2a-b)-(-7a+4b)\cdot 1=9a-5b \\
1=3-2\cdot 1 \text{ より} \quad 1=(-7a+4b)-(9a-5b)\cdot 1=-16a+9b \\
\text{よって、} -16a+9b=1 \text{ より} \quad 23\cdot (-16)+41\cdot 9=1 \\
\text{ゆえに、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=-16, y=9
\end{array}$$

(2) 31 と 43 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll}
43=31\cdot 1+12 & \text{移項すると} \quad 12=43-31\cdot 1 \\
31=12\cdot 2+7 & \text{移項すると} \quad 7=31-12\cdot 2 \\
12=7\cdot 1+5 & \text{移項すると} \quad 5=12-7\cdot 1 \\
\text{よって} \quad 5=12-7\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =12-(31-12\cdot 2)\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =12\cdot 3-31\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =(43-31\cdot 1)\cdot 3-31\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =31\cdot (-4)-43\cdot (-3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{すなわち} \quad 31\cdot (-4)-43\cdot (-3)=5 \\
\text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=-4, y=-3
\end{array}$$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$$\begin{array}{ll}
a=31, b=43 \text{ とおく。} \\
12=43-31\cdot 1 \text{ より} \quad 12=b-a\cdot 1=b-a \\
7=31-12\cdot 2 \text{ より} \quad 7=a-(b-a)\cdot 2=3a-2b \\
5=12-7\cdot 1 \text{ より} \quad 5=(b-a)-(3a-2b)\cdot 1=-4a+3b \\
\text{よって、} -4a+3b=5 \text{ より} \quad 31\cdot (-4)+43\cdot 3=5 \\
\text{すなわち} \quad 31\cdot (-4)-43\cdot (-3)=5 \\
\text{ゆえに、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=-4, y=-3
\end{array}$$

(3) 両辺を 2 で割ると $13x+17y=3$

13 と 17 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll}
17=13\cdot 1+4 & \text{移項すると} \quad 4=17-13\cdot 1 \\
13=4\cdot 3+1 & \text{移項すると} \quad 1=13-4\cdot 3 \\
\text{よって} \quad 1=13\cdot 1+4\cdot (-3) \\
\qquad \qquad \qquad =13\cdot 1+(17-13\cdot 1)\cdot (-3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
& =13\cdot 4+17\cdot (-3) \\
& =13\cdot (17-13\cdot 1)+17\cdot (-3) \\
& =13\cdot 4+17\cdot (-3) \\
\text{すなわち} \quad 13\cdot 4+17\cdot (-3)=1 \\
\text{両辺に 3 を掛けて} \quad 13\cdot 4\cdot 3+17\cdot (-3)\cdot 3=3 \\
\text{すなわち} \quad 13\cdot 12+17\cdot (-9)=3 \\
\text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=12, y=-9
\end{array}$$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$$\begin{array}{ll}
a=13, b=17 \text{ とおく。} \\
4=17-13\cdot 1 \text{ より} \quad 4=b-a\cdot 1=b-a \\
1=13-4\cdot 3 \text{ より} \quad 1=a-(b-a)\cdot 3=4a-3b \\
\text{よって、} 4a-3b=1 \text{ より} \quad 13\cdot 4+17\cdot (-3)=1 \\
\text{(以下、同じ)}
\end{array}$$

21 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$(1) \quad 11x+32y=4 \qquad (2) \quad 9x-13y=7 \qquad (3) \quad 14x+16y=6$$

$$\textbf{解答} \quad (1) \quad x=12, y=-4 \qquad (2) \quad x=21, y=14 \qquad (3) \quad x=-3, y=3$$

解説

(1) 11 と 32 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll}
32=11\cdot 2+10 & \text{移項すると} \quad 10=32-11\cdot 2 \\
11=10\cdot 1+1 & \text{移項すると} \quad 1=11-10\cdot 1 \\
\text{よって} \quad 1=11-10\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =11-(32-11\cdot 2)\cdot 1 \\
\qquad \qquad \qquad =11\cdot 3+32\cdot (-1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{すなわち} \quad 11\cdot 3+32\cdot (-1)=1 \\
\text{両辺に 4 を掛けて} \quad 11\cdot (3\cdot 4)+32\cdot \{(-1)\cdot 4\}=4 \\
\text{すなわち} \quad 11\cdot 12+32\cdot (-4)=4 \\
\text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=12, y=-4
\end{array}$$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$$\begin{array}{ll}
a=11, b=32 \text{ とおく。} \\
10=32-11\cdot 2 \text{ より} \quad 10=b-a\cdot 2=b-2a \\
1=11-10\cdot 1 \text{ より} \quad 1=a-(b-2a)\cdot 1=3a-b \\
\text{よって、} 3a-b=1 \text{ より} \quad 11\cdot 3+32\cdot (-1)=1 \\
\text{(以下、同じ)}
\end{array}$$

(2) 9 と 13 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll}
13=9\cdot 1+4 & \text{移項すると} \quad 4=13-9\cdot 1 \\
9=4\cdot 2+1 & \text{移項すると} \quad 1=9-4\cdot 2 \\
\text{よって} \quad 1=9-4\cdot 2 \\
\qquad \qquad \qquad =9-(13-9\cdot 1)\cdot 2 \\
\qquad \qquad \qquad =9\cdot 3-13\cdot 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{すなわち} \quad 9\cdot 3-13\cdot 2=1 \\
\text{両辺に 7 を掛けて} \quad 9\cdot (3\cdot 7)-13\cdot (2\cdot 7)=7 \\
\text{すなわち} \quad 9\cdot 21-13\cdot 14=7 \\
\text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \quad x=21, y=14
\end{array}$$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$$\begin{array}{ll}
a=9, b=13 \text{ とおく。} \\
4=13-9\cdot 1 \text{ より} \quad 4=b-a\cdot 1=b-a \\
1=9-4\cdot 2 \text{ より} \quad 1=a-(b-a)\cdot 2=3a-2b \\
\text{よって、} 3a-2b=1 \text{ より} \quad 9\cdot 3-13\cdot 2=1 \\
\text{(以下、同じ)}
\end{array}$$

(3) 両辺を 2 で割ると $7x+8y=3$

7 と 8 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll} 8=7\cdot 1+1 & \text{移項すると} & 1=8-7\cdot 1 \\ \text{すなわち} & 7\cdot (-1)+8\cdot 1=1 & \\ \text{両辺に 3 を掛けて} & 7\cdot \{(-1)\cdot 3\}+8\cdot 1\cdot 3=3 & \\ \text{すなわち} & 7\cdot (-3)+8\cdot 3=3 & \\ \text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} & x=-3, y=3 & \end{array}$$

[22] 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1) & 24x+19y=1 & (2) \quad 63x+44y=2 \\ (4) & 95x+28y=1 & (5) \quad 141x-52y=4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (3) \quad 86x-49y=3 \\ (6) \quad 25x-61y=9 \end{array}$$

[解答] (1) $x=4, y=-5$ (2) $x=14, y=-20$ (3) $x=12, y=21$
(4) $x=-5, y=17$ (5) $x=-28, y=-76$ (6) $x=15, y=6$

[解説]

(1) 24 と 19 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll} 24=19\cdot 1+5 & \text{移項すると} & 5=24-19\cdot 1 \\ 19=5\cdot 3+4 & \text{移項すると} & 4=19-5\cdot 3 \\ 5=4\cdot 1+1 & \text{移項すると} & 1=5-4\cdot 1 \\ \text{よって} & 1=5-4\cdot 1=5-(19-5\cdot 3)\cdot 1=5\cdot 4+19\cdot (-1) & \\ & =(24-19\cdot 1)\cdot 4+19\cdot (-1)=24\cdot 4+19\cdot (-5) & \end{array}$$

すなわち $24\cdot 4+19\cdot (-5)=1$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x=4, y=-5$

[参考] 割り算の等式を利用して係数を小さくする方法を考えてみる。

24=19\cdot 1+5 より、方程式は次のようになる。

$$\begin{array}{lll} (19\cdot 1+5)x+19y=1 & & \\ \text{整理すると} & 5x+19(x+y)=1 & \\ 19=5\cdot 3+4 \text{ より} & 5x+(5\cdot 3+4)(x+y)=1 & \\ \text{すなわち} & 5(4x+3y)+4(x+y)=1 & \\ 4x+3y=m, x+y=n \text{ とおくと} & 5m+4n=1 & \\ \text{この等式を満たす整数 } m, n \text{ の組の 1 つは} & m=1, n=-1 & \\ 4x+3y=1, x+y=-1 \text{ を解くと} & x=4, y=-5 & \end{array}$$

(2) 63 と 44 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll} 63=44\cdot 1+19 & \text{移項すると} & 19=63-44\cdot 1 \\ 44=19\cdot 2+6 & \text{移項すると} & 6=44-19\cdot 2 \\ 19=6\cdot 3+1 & \text{移項すると} & 1=19-6\cdot 3 \\ \text{よって} & 1=19-6\cdot 3=19-(44-19\cdot 2)\cdot 3=19\cdot 7+44\cdot (-3) & \\ & =(63-44\cdot 1)\cdot 7+44\cdot (-3)=63\cdot 7+44\cdot (-10) & \end{array}$$

すなわち $63\cdot 7+44\cdot (-10)=1$

両辺に 2 を掛けると $63\cdot (2\cdot 7)+44\cdot \{2\cdot (-10)\}=2$

すなわち $63\cdot 14+44\cdot (-20)=2$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x=14, y=-20$

(3) 86 と 49 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll} 86=49\cdot 1+37 & \text{移項すると} & 37=86-49\cdot 1 \\ 49=37\cdot 1+12 & \text{移項すると} & 12=49-37\cdot 1 \\ 37=12\cdot 3+1 & \text{移項すると} & 1=37-12\cdot 3 \\ \text{よって} & 1=37-12\cdot 3=37-(49-37\cdot 1)\cdot 3=37\cdot 4-49\cdot 3 & \\ & =(86-49\cdot 1)\cdot 4-49\cdot 3=86\cdot 4-49\cdot 7 & \end{array}$$

すなわち $86\cdot 4-49\cdot 7=1$

両辺に 3 を掛けると $86\cdot (3\cdot 4)-49\cdot (3\cdot 7)=3$

すなわち $86\cdot 12-49\cdot 21=3$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x=12, y=21$

(4) 95 と 28 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll} 95=28\cdot 3+11 & \text{移項すると} & 11=95-28\cdot 3 \\ 28=11\cdot 2+6 & \text{移項すると} & 6=28-11\cdot 2 \\ 11=6\cdot 1+5 & \text{移項すると} & 5=11-6\cdot 1 \\ 6=5\cdot 1+1 & \text{移項すると} & 1=6-5\cdot 1 \\ \text{よって} & 1=6-5\cdot 1=6-(11-6\cdot 1)\cdot 1=6\cdot 2+11\cdot (-1) & \\ & =(28-11\cdot 2)\cdot 2+11\cdot (-1)=28\cdot 2+11\cdot (-5) & \\ & =28\cdot 2+(95-28\cdot 3)\cdot (-5)=95\cdot (-5)+28\cdot 17 & \end{array}$$

すなわち $95\cdot (-5)+28\cdot 17=1$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x=-5, y=17$

(5) 141 と 52 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll} 141=52\cdot 2+37 & \text{移項すると} & 37=141-52\cdot 2 \\ 52=37\cdot 1+15 & \text{移項すると} & 15=52-37\cdot 1 \\ 37=15\cdot 2+7 & \text{移項すると} & 7=37-15\cdot 2 \\ 15=7\cdot 2+1 & \text{移項すると} & 1=15-7\cdot 2 \\ \text{よって} & 1=15-7\cdot 2=15-(37-15\cdot 2)\cdot 2=15\cdot 5+37\cdot (-2) & \\ & =(52-37\cdot 1)\cdot 5+37\cdot (-2)=52\cdot 5+37\cdot (-7) & \\ & =52\cdot 5+(141-52\cdot 2)\cdot (-7)=141\cdot (-7)-52\cdot (-19) & \end{array}$$

すなわち $141\cdot (-7)-52\cdot (-19)=1$

両辺に 4 を掛けると $141\cdot \{4\cdot (-7)\}-52\cdot \{4\cdot (-19)\}=4$

すなわち $141\cdot (-28)-52\cdot (-76)=4$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x=-28, y=-76$

(6) 25 と 61 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll} 61=25\cdot 2+11 & \text{移項すると} & 11=61-25\cdot 2 \\ 25=11\cdot 2+3 & \text{移項すると} & 3=25-11\cdot 2 \quad \cdots \cdots (*) \\ \text{よって} & 3=25-11\cdot 2=25-(61-25\cdot 2)\cdot 2 & \\ & =25\cdot 5-61\cdot 2 & \end{array}$$

すなわち $25\cdot 5-61\cdot 2=3$

両辺に 3 を掛けて $25\cdot 15-61\cdot 6=9$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x=15, y=6$

[注意] (*) の時点で等式の右辺 9 の約数 3 が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

[23] 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$\begin{array}{ll} (1) & 17x+14y=1 \\ (3) & 52x-37y=1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (2) & 24x+19y=1 \\ (4) & 43x+16y=2 \end{array}$$

[解答] (1) $x=5, y=-6$ (2) $x=4, y=-5$ (3) $x=5, y=7$
(4) $x=6, y=-16$

[解説]

(1) 17 と 14 に互除法の計算を行う。

$$\begin{array}{lll} 17=14\cdot 1+3 & \text{移項すると} & 3=17-14\cdot 1 \\ 14=3\cdot 4+2 & \text{移項すると} & 2=14-3\cdot 4 \\ 3=2\cdot 1+1 & \text{移項すると} & 1=3-2\cdot 1 \\ \text{よって} & 1=3-2\cdot 1=3-(14-3\cdot 4)\cdot 1 & \\ & =3\cdot 5+14\cdot (-1) & \\ & =(17-14\cdot 1)\cdot 5+14\cdot (-1) & \\ & =17\cdot 5+14\cdot (-6) & \end{array}$$

すなわち $17\cdot 5+14\cdot (-6)=1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x=5, y=-6$

[別解] $a=17, b=14$ とおく。

$3=17-14\cdot 1$ より $3=a-b$

$2=14-3\cdot 4$ より $2=b-(a-b)\cdot 4$

$=-4a+5b$

$1=3-2\cdot 1$ より $1=(a-b)-(-4a+5b)$

$=5a-6b$

よって、 $5a-6b=1$ より $17\cdot 5+14\cdot (-6)=1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x=5, y=-6$

(2) 24 と 19 に互除法の計算を行う。

$24=19\cdot 1+5$ 移項すると $5=24-19\cdot 1$

$19=5\cdot 3+4$ 移項すると $4=19-5\cdot 3$

$5=4\cdot 1+1$ 移項すると $1=5-4\cdot 1$

よって $1=5-4\cdot 1=5-(19-5\cdot 3)\cdot 1$

$=5\cdot 4+19\cdot (-1)$

$=(24-19\cdot 1)\cdot 4+19\cdot (-1)$

$=24\cdot 4+19\cdot (-5)$

すなわち $24\cdot 4+19\cdot (-5)=1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x=4, y=-5$

[別解] $a=24, b=19$ とおく。

$5=24-19\cdot 1$ より $5=a-b$

$4=19-5\cdot 3$ より $4=b-(a-b)\cdot 3$

$=-3a+4b$

$1=5-4\cdot 1$ より $1=(a-b)-(-3a+4b)$

$=4a-5b$

よって、 $4a-5b=1$ より $24\cdot 4+19\cdot (-5)=1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x=4, y=-5$

(3) 52 と 37 に互除法の計算を行う。

$52=37\cdot 1+15$ 移項すると $15=52-37\cdot 1$

$37=15\cdot 2+7$ 移項すると $7=37-15\cdot 2$

$15=7\cdot 2+1$ 移項すると $1=15-7\cdot 2$

よって $1=15-7\cdot 2=15-(37-15\cdot 2)\cdot 2$

$=15\cdot 5-37\cdot 2$

$=(52-37\cdot 1)\cdot 5-37\cdot 2$

$=52\cdot 5-37\cdot 7$

すなわち $52\cdot 5-37\cdot 7=1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x=5, y=7$

[別解] $a=52, b=37$ とおく。

$15=52-37\cdot 1$ より $15=a-b$

$7=37-15\cdot 2$ より $7=b-(a-b)\cdot 2$

$=-2a+3b$

$1=15-7\cdot 2$ より $1=(a-b)-(-2a+3b)\cdot 2$

$=5a-7b$

よって、 $5a-7b=1$ より $52\cdot 5-37\cdot 7=1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x=5, y=7$

(4) 43 と 16 に互除法の計算を行う。

$43=16\cdot 2+11$ 移項すると $11=43-16\cdot 2$

$16=11\cdot 1+5$ 移項すると $5=16-11\cdot 1$

$11=5\cdot 2+1$ 移項すると $1=11-5\cdot 2$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 1 &= 11 - 5 \cdot 2 = 11 - (16 - 11 \cdot 1) \cdot 2 \\ &= 11 \cdot 3 + 16 \cdot (-2) \\ &= (43 - 16 \cdot 2) \cdot 3 + 16 \cdot (-2) \\ &= 43 \cdot 3 + 16 \cdot (-8) \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad 43 \cdot 3 + 16 \cdot (-8) = 1$$

両辺に 2 を掛けると

$$43 \cdot (2 \cdot 3) + 16 \cdot \{2 \cdot (-8)\} = 2$$

$$\text{すなわち} \quad 43 \cdot 6 + 16 \cdot (-16) = 2$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 6, \quad y = -16$$

別解 $a = 43, b = 16$ とおく。

$$11 = 43 - 16 \cdot 2 \text{ より } 11 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$5 = 16 - 11 \cdot 1 \text{ より } 5 = b - (a - 2b) = -a + 3b$$

$$\begin{aligned} 1 = 11 - 5 \cdot 2 \text{ より } 1 &= (a - 2b) - (-a + 3b) \cdot 2 \\ &= 3a - 8b \end{aligned}$$

$$\text{よって, } 3a - 8b = 1 \text{ より } 43 \cdot 3 + 16 \cdot (-8) = 1$$

両辺に 2 を掛けると

$$43 \cdot (2 \cdot 3) + 16 \cdot \{2 \cdot (-8)\} = 2$$

$$\text{すなわち} \quad 43 \cdot 6 + 16 \cdot (-16) = 2$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 6, \quad y = -16$$

24 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$(1) \quad 36x + 25y = 1 \qquad (2) \quad 87x - 61y = 5$$

解答 (1) $x = -9, y = 13$ (2) $x = -35, y = -50$

解説

(1) 36 と 25 に互除法の計算を行う。

$$36 = 25 \cdot 1 + 11 \quad \text{移項すると} \quad 11 = 36 - 25 \cdot 1$$

$$25 = 11 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 25 - 11 \cdot 2$$

$$11 = 3 \cdot 3 + 2 \quad \text{移項すると} \quad 2 = 11 - 3 \cdot 3$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 3 - 2 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 1 &= 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (11 - 3 \cdot 3) \cdot 1 \\ &= 3 \cdot 4 + 11 \cdot (-1) \\ &= (25 - 11 \cdot 2) \cdot 4 + 11 \cdot (-1) \\ &= 25 \cdot 4 + 11 \cdot (-9) \\ &= 25 \cdot 4 + (36 - 25 \cdot 1) \cdot (-9) \\ &= 36 \cdot (-9) + 25 \cdot 13 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad 36 \cdot (-9) + 25 \cdot 13 = 1$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -9, \quad y = 13$$

別解 $a = 36, b = 25$ とおく。

$$11 = 36 - 25 \cdot 1 \text{ より } 11 = a - b$$

$$\begin{aligned} 3 = 25 - 11 \cdot 2 \text{ より } 3 &= b - (a - b) \cdot 2 \\ &= -2a + 3b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 = 11 - 3 \cdot 3 \text{ より } 2 &= (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 3 \\ &= 7a - 10b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = 3 - 2 \cdot 1 \text{ より } 1 &= (-2a + 3b) - (7a - 10b) \\ &= -9a + 13b \end{aligned}$$

$$\text{よって, } -9a + 13b = 1 \text{ より } 36 \cdot (-9) + 25 \cdot 13 = 1$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -9, \quad y = 13$$

(2) 87 と 61 に互除法の計算を行う。

$$87 = 61 \cdot 1 + 26 \quad \text{移項すると} \quad 26 = 87 - 61 \cdot 1$$

$$61 = 26 \cdot 2 + 9 \quad \text{移項すると} \quad 9 = 61 - 26 \cdot 2$$

$$26 = 9 \cdot 2 + 8 \quad \text{移項すると} \quad 8 = 26 - 9 \cdot 2$$

$$9 = 8 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 9 - 8 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 1 &= 9 - 8 \cdot 1 = 9 - (26 - 9 \cdot 2) \cdot 1 \\ &= 9 \cdot 3 + 26 \cdot (-1) \\ &= (61 - 26 \cdot 2) \cdot 3 + 26 \cdot (-1) \\ &= 61 \cdot 3 + 26 \cdot (-7) \\ &= 61 \cdot 3 + (87 - 61 \cdot 1) \cdot (-7) \\ &= 87 \cdot (-7) - 61 \cdot (-10) \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad 87 \cdot (-7) - 61 \cdot (-10) = 1$$

両辺に 5 を掛けると

$$87 \cdot \{5 \cdot (-7)\} - 61 \cdot \{5 \cdot (-10)\} = 5$$

$$\text{すなわち} \quad 87 \cdot (-35) - 61 \cdot (-50) = 5$$

$$\begin{aligned} \text{よって, 求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \\ x &= -35, \quad y = -50 \end{aligned}$$

別解 $a = 87, b = 61$ とおく。

$$26 = 87 - 61 \cdot 1 \text{ より } 26 = a - b$$

$$\begin{aligned} 9 = 61 - 26 \cdot 2 \text{ より } 9 &= b - (a - b) \cdot 2 \\ &= -2a + 3b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 = 26 - 9 \cdot 2 \text{ より } 8 &= (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 2 \\ &= 5a - 7b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = 9 - 8 \cdot 1 \text{ より } 1 &= (-2a + 3b) - (5a - 7b) \\ &= -7a + 10b \end{aligned}$$

$$\text{よって, } -7a + 10b = 1 \text{ より } 87 \cdot (-7) - 61 \cdot (-10) = 1$$

両辺に 5 を掛けると

$$87 \cdot \{5 \cdot (-7)\} - 61 \cdot \{5 \cdot (-10)\} = 5$$

$$\text{すなわち} \quad 87 \cdot (-35) - 61 \cdot (-50) = 5$$

$$\begin{aligned} \text{よって, 求める整数 } x, y \text{ の組の 1 つは} \\ x &= -35, \quad y = -50 \end{aligned}$$