

1次不定方程式の特殊解クイズ

1 (1) 等式 $31x + 22y = 1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求める。

31 と 22 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$31 = 22 \cdot 1 + 9 \quad \text{移項すると} \quad 9 = 31 - 22 \cdot 1$$

$$22 = 9 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると} \quad 4 = 22 - 9 \cdot 2$$

$$9 = 4 \cdot 2 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 9 - 4 \cdot 2$$

よって $1 = 9 - 4 \cdot 2$

$$= 9 - (22 - 9 \cdot 2) \cdot 2$$

$$= 9 \cdot 5 + 22 \cdot (-2)$$

$$= (31 - 22 \cdot 1) \cdot 5 + 22 \cdot (-2)$$

$$= 31 \cdot 5 + 22 \cdot (-7)$$

$$\text{すなわち} \quad 31 \cdot 5 + 22 \cdot (-7) = 1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 5, y = -7$

(2) 等式 $31x + 22y = 3$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求める。

① の両辺に 3 を掛けると $31 \cdot (3 \cdot 5) + 22 \cdot \{3 \cdot (-7)\} = 3$

$$\text{すなわち} \quad 31 \cdot 15 + 22 \cdot (-21) = 3$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 15, y = -21$

解説

2 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求める。

$$(1) 24x + 17y = 1$$

$$(2) 67x + 20y = 2$$

$$(3) 73x - 51y = 3$$

解答 (1) $x = 5, y = -7$ (2) $x = 6, y = -20$ (3) $x = 21, y = 30$

解説

(1) 24 と 17 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$24 = 17 \cdot 1 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7 = 24 - 17 \cdot 1$$

$$17 = 7 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 17 - 7 \cdot 2$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 7 - 3 \cdot 2$$

よって $1 = 7 - 3 \cdot 2$

$$= 7 - (17 - 7 \cdot 2) \cdot 2$$

$$= 7 \cdot 5 + 17 \cdot (-2)$$

$$= (24 - 17 \cdot 1) \cdot 5 + 17 \cdot (-2)$$

$$= 24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7)$$

$$\text{すなわち} \quad 24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) = 1$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 5, y = -7$$

別解 24 と 17 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$24 = 17 \cdot 1 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7 = 24 - 17 \cdot 1$$

$$17 = 7 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 17 - 7 \cdot 2$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 7 - 3 \cdot 2$$

$a = 24, b = 17$ とおく。

$$7 = 24 - 17 \cdot 1 \quad \text{より} \quad 7 = a - b \cdot 1 = a - b$$

$$3 = 17 - 7 \cdot 2 \quad \text{より} \quad 3 = b - (a - b) \cdot 2 = -2a + 3b$$

$$1 = 7 - 3 \cdot 2 \quad \text{より} \quad 1 = (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 2 = 5a - 7b$$

$$\text{よって}, 5a - 7b = 1 \quad \text{より} \quad 24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) = 1$$

ゆえに、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 5, y = -7$$

(2) 67 と 20 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$67 = 20 \cdot 3 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7 = 67 - 20 \cdot 3$$

$$20 = 7 \cdot 2 + 6 \quad \text{移項すると} \quad 6 = 20 - 7 \cdot 2$$

$$7 = 6 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 7 - 6 \cdot 1$$

よって $1 = 7 - 6 \cdot 1$

$$= 7 - (20 - 7 \cdot 2) \cdot 1$$

$$= 7 \cdot 3 + 20 \cdot (-1)$$

$$= (67 - 20 \cdot 3) \cdot 3 + 20 \cdot (-1)$$

$$= 67 \cdot 3 + 20 \cdot (-10)$$

$$\text{すなわち} \quad 67 \cdot 3 + 20 \cdot (-10) = 1$$

$$\text{両辺に } 2 \text{ を掛けて} \quad 67 \cdot (2 \cdot 3) + 20 \cdot [2 \cdot (-10)] = 2$$

$$\text{すなわち} \quad 67 \cdot 6 + 20 \cdot (-20) = 2$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 6, y = -20$$

別解 67 と 20 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$67 = 20 \cdot 3 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7 = 67 - 20 \cdot 3$$

$$20 = 7 \cdot 2 + 6 \quad \text{移項すると} \quad 6 = 20 - 7 \cdot 2$$

$$7 = 6 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 7 - 6 \cdot 1$$

$a = 67, b = 20$ とおく。

$$7 = 67 - 20 \cdot 3 \quad \text{より} \quad 7 = a - b \cdot 3 = a - 3b$$

$$6 = 20 - 7 \cdot 2 \quad \text{より} \quad 6 = b - (a - 3b) \cdot 2 = -2a + 7b$$

$$1 = 7 - 6 \cdot 1 \quad \text{より} \quad 1 = (a - 3b) - (-2a + 7b) \cdot 1 = 3a - 10b$$

$$\text{よって}, 3a - 10b = 1 \quad \text{より} \quad 67 \cdot 3 + 20 \cdot (-10) = 1$$

$$\text{両辺に } 2 \text{ を掛けて} \quad 67 \cdot (2 \cdot 3) + 20 \cdot [2 \cdot (-10)] = 2$$

$$\text{すなわち} \quad 67 \cdot 6 + 20 \cdot (-20) = 2$$

ゆえに、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 6, y = -20$$

(3) 73 と 51 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$73 = 51 \cdot 1 + 22 \quad \text{移項すると} \quad 22 = 73 - 51 \cdot 1$$

$$51 = 22 \cdot 2 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7 = 51 - 22 \cdot 2$$

$$22 = 7 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 22 - 7 \cdot 3$$

よって $1 = 22 - 7 \cdot 3$

$$= 22 - (51 - 22 \cdot 2) \cdot 3$$

$$= 22 \cdot 7 + 51 \cdot (-3)$$

$$= (73 - 51 \cdot 1) \cdot 7 + 51 \cdot (-3)$$

$$= 73 \cdot 7 + 51 \cdot (-10)$$

$$\text{すなわち} \quad 73 \cdot 7 - 51 \cdot 10 = 1$$

$$\text{両辺に } 3 \text{ を掛けて} \quad 73 \cdot (3 \cdot 7) - 51 \cdot (3 \cdot 10) = 3$$

$$\text{すなわち} \quad 73 \cdot 21 - 51 \cdot 30 = 3$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = 21, y = 30$$

別解 73 と 51 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$73 = 51 \cdot 1 + 22 \quad \text{移項すると} \quad 22 = 73 - 51 \cdot 1$$

$$51 = 22 \cdot 2 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7 = 51 - 22 \cdot 2$$

$$22 = 7 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 22 - 7 \cdot 3$$

$a = 73, b = 51$ とおく。

$$22 = 73 - 51 \cdot 1 \quad \text{より} \quad 22 = a - b \cdot 1 = a - b$$

$$7 = 51 - 22 \cdot 2 \quad \text{より} \quad 7 = b - (a - b) \cdot 2 = -2a + 3b$$

$$1 = 22 - 7 \cdot 3 \quad \text{より} \quad 1 = (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 3 = 7a - 10b$$

$$\text{よって}, 7a - 10b = 1 \quad \text{より} \quad 73 \cdot 7 - 51 \cdot 10 = 1$$

$$\text{両辺に } 3 \text{ を掛けて} \quad 73 \cdot (3 \cdot 7) - 51 \cdot (3 \cdot 10) = 3$$

$$\text{すなわち} \quad 73 \cdot 21 - 51 \cdot 30 = 3$$

ゆえに、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x = 21, y = 30$

3 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。[各 10 点]

$$(1) 21x + 17y = 1$$

$$(2) 52x + 21y = 2$$

解答 (1) $21 = 17 \cdot 1 + 4$ 移項すると $4 = 21 - 17 \cdot 1$

$$17 = 4 \cdot 4 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 17 - 4 \cdot 4$$

$$\text{よって} \quad 1 = 17 - 4 \cdot 4 = 17 - 4 \cdot (21 - 17 \cdot 1) = 21 \cdot (-4) + 17 \cdot 5$$

$$\text{すなわち} \quad 21 \cdot (-4) + 17 \cdot 5 = 1$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -4, y = 5$$

$$(2) 52 = 21 \cdot 2 + 10 \quad \text{移項すると} \quad 10 = 52 - 21 \cdot 2$$

$$21 = 10 \cdot 2 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 21 - 10 \cdot 2$$

$$\text{よって}, 1 = 21 - 10 \cdot 2 = 21 - (52 - 21 \cdot 2) \cdot 2 = 52 \cdot (-2) + 21 \cdot 5$$

$$\text{すなわち} \quad 52 \cdot (-2) + 21 \cdot 5 = 1$$

両辺に 2 を掛けると $52 \cdot (-4) + 21 \cdot 10 = 2$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -4, y = 10$$

解説

$$(1) 21 = 17 \cdot 1 + 4 \quad \text{移項すると} \quad 4 = 21 - 17 \cdot 1$$

$$17 = 4 \cdot 4 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 17 - 4 \cdot 4$$

$$\text{よって} \quad 1 = 17 - 4 \cdot 4 = 17 - 4 \cdot (21 - 17 \cdot 1) = 21 \cdot (-4) + 17 \cdot 5$$

$$\text{すなわち} \quad 21 \cdot (-4) + 17 \cdot 5 = 1$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -4, y = 5$$

$$(2) 52 = 21 \cdot 2 + 10 \quad \text{移項すると} \quad 10 = 52 - 21 \cdot 2$$

$$21 = 10 \cdot 2 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 21 - 10 \cdot 2$$

$$\text{よって}, 1 = 21 - 10 \cdot 2 = 21 - (52 - 21 \cdot 2) \cdot 2 = 52 \cdot (-2) + 21 \cdot 5$$

$$\text{すなわち} \quad 52 \cdot (-2) + 21 \cdot 5 = 1$$

両辺に 2 を掛けると $52 \cdot (-4) + 21 \cdot 10 = 2$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -4, y = 10$$

$$\text{すなわち } 24 \cdot 15 + 17 \cdot (-21) = 3$$

よって、求める整数 x, y の組の1つは

$$x = 15, y = -21$$

(解説)

5 次の等式を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

$$(1) 26x + 11y = 1$$

$$(2) 30x + 17y = 5$$

(解答) (1) $x = 3, y = -7$ (2) $x = 20, y = -35$

(解説)

(1) 26と11に互除法の計算を行う。

$$26 = 11 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると } 4 = 26 - 11 \cdot 2$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると } 3 = 11 - 4 \cdot 2$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると } 1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$\text{よって } 1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$= 4 - (11 - 4 \cdot 2) \cdot 1$$

$$= 4 \cdot 3 + 11 \cdot (-1)$$

$$= (26 - 11 \cdot 2) \cdot 3 + 11 \cdot (-1)$$

$$= 26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7)$$

$$\text{すなわち } 26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7) = 1$$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは $x = 3, y = -7$

(2) 30と17に互除法の計算を行う。

$$30 = 17 \cdot 1 + 13 \quad \text{移項すると } 13 = 30 - 17 \cdot 1$$

$$17 = 13 \cdot 1 + 4 \quad \text{移項すると } 4 = 17 - 13 \cdot 1$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると } 1 = 13 - 4 \cdot 3$$

$$\text{よって } 1 = 13 - 4 \cdot 3$$

$$= 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3$$

$$= 13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$$

$$= (30 - 17 \cdot 1) \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$$

$$= 30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7)$$

$$\text{すなわち } 30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) = 1$$

両辺に5を掛けると

$$30 \cdot (5 \cdot 4) + 17 \cdot [5 \cdot (-7)] = 5$$

$$\text{すなわち } 30 \cdot 20 + 17 \cdot (-35) = 5$$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは $x = 20, y = -35$

(別解) (1) 26と11に互除法の計算を行う。

$$26 = 11 \cdot 2 + 4$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$

$$a = 26, b = 11 \text{ とおく。}$$

$$4 = 26 - 11 \cdot 2 \text{ より } 4 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$3 = 11 - 4 \cdot 2 \text{ より } 3 = b - (a - 2b) \cdot 2 = -2a + 5b$$

$$1 = 4 - 3 \cdot 1 \text{ より } 1 = (a - 2b) - (-2a + 5b) \cdot 1 = 3a - 7b$$

$$\text{よって, } 3a - 7b = 1 \text{ より } 26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7) = 1$$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは $x = 3, y = -7$

(2) 30と17に互除法の計算を行う。

$$30 = 17 \cdot 1 + 13$$

$$17 = 13 \cdot 1 + 4$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1$$

$$a = 30, b = 17 \text{ とおく。}$$

$$13 = 30 - 17 \cdot 1 \text{ より}$$

$$4 = 17 - 13 \cdot 1 \text{ より}$$

$$1 = 13 - 4 \cdot 3 \text{ より}$$

$$\text{よって, } 4a - 7b = 1 \text{ より}$$

$$\text{両辺に5を掛けると}$$

$$30 \cdot (5 \cdot 4) + 17 \cdot [5 \cdot (-7)] = 5$$

$$\text{すなわち } 30 \cdot 20 + 17 \cdot (-35) = 5$$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは $x = 20, y = -35$

6 次の等式を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。 [15点×2=30点]

$$(1) 33x + 14y = 1$$

$$(2) 33x + 14y = 4$$

(解答) (1) 33と14に互除法の計算を行う。

$$33 = 14 \cdot 2 + 5 \quad \text{移項すると } 5 = 33 - 14 \cdot 2$$

$$14 = 5 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると } 4 = 14 - 5 \cdot 2$$

$$5 = 4 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると } 1 = 5 - 4 \cdot 1$$

$$\text{よって } 1 = 5 - 4 \cdot 1$$

$$= 5 - (14 - 5 \cdot 2) \cdot 1$$

$$= 5 \cdot 3 + 14 \cdot (-1)$$

$$= (33 - 14 \cdot 2) \cdot 3 + 14 \cdot (-1)$$

$$= 33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7)$$

$$\text{すなわち } 33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7) = 1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは

$$x = 3, y = -7$$

(2) ①の両辺に4を掛けると

$$33 \cdot (4 \cdot 3) + 14 \cdot [4 \cdot (-7)] = 4$$

$$\text{すなわち } 33 \cdot 12 + 14 \cdot (-28) = 4$$

よって、求める整数 x, y の組の1つは

$$x = 12, y = -28$$

(解説)

(1) 33と14に互除法の計算を行う。

$$33 = 14 \cdot 2 + 5 \quad \text{移項すると } 5 = 33 - 14 \cdot 2$$

$$14 = 5 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると } 4 = 14 - 5 \cdot 2$$

$$5 = 4 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると } 1 = 5 - 4 \cdot 1$$

$$\text{よって } 1 = 5 - 4 \cdot 1$$

$$= 5 - (14 - 5 \cdot 2) \cdot 1$$

$$= 5 \cdot 3 + 14 \cdot (-1)$$

$$= (33 - 14 \cdot 2) \cdot 3 + 14 \cdot (-1)$$

$$= 33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7)$$

$$\text{すなわち } 33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7) = 1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは

$$x = 3, y = -7$$

(2) ①の両辺に4を掛けると

$$33 \cdot (4 \cdot 3) + 14 \cdot [4 \cdot (-7)] = 4$$

$$\text{すなわち } 33 \cdot 12 + 14 \cdot (-28) = 4$$

よって、求める整数 x, y の組の1つは

$$x = 12, y = -28$$

7 次の方程式の整数解の1つを求めよ。

$$(1) 17x + 13y = 1$$

$$(2) 24x + 19y = 1$$

(解答) (1) $x = -3, y = 4$ (2) $x = 4, y = -5$

(解説)

(1) 17と13に互除法を適用すると、次のようになる。

$$17 = 13 \cdot 1 + 4 \quad \leftarrow \text{変形すると } 4 = 17 - 13 \cdot 1$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1 \quad \leftarrow \text{変形すると } 1 = 13 - 4 \cdot 3$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3 = 13 \cdot 4 - 17 \cdot 3$$

したがって $17 \cdot (-3) + 13 \cdot 4 = 1$

よって、 $17x + 13y = 1$ の整数解の1つとして $x = -3, y = 4$ が得られる。

(2) 24と19に互除法を適用すると、次のようになる。

$$24 = 19 \cdot 1 + 5 \quad \leftarrow \text{変形すると } 5 = 24 - 19 \cdot 1$$

$$19 = 5 \cdot 3 + 4 \quad \leftarrow \text{変形すると } 4 = 19 - 5 \cdot 3$$

$$5 = 4 \cdot 1 + 1 \quad \leftarrow \text{変形すると } 1 = 5 - 4 \cdot 1$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$1 = 5 - 4 \cdot 1 = 5 - (19 - 5 \cdot 3) \cdot 1 = 5 \cdot 4 - 19 \cdot 1$$

$$= (24 - 19 \cdot 1) \cdot 4 - 19 \cdot 1 = 24 \cdot 4 - 19 \cdot 5$$

したがって $24 \cdot 4 + 19 \cdot (-5) = 1$

よって、 $24x + 19y = 1$ の整数解の1つとして $x = 4, y = -5$ が得られる。

8 次の方程式の整数解の1つを求めよ。 [20点]

$$30x + 17y = 1$$

(解答) 30と17に互除法を適用すると、次のようになる。

$$30 = 17 \cdot 1 + 13 \quad (\text{変形すると } 13 = 30 - 17 \cdot 1)$$

$$17 = 13 \cdot 1 + 4 \quad (\text{変形すると } 4 = 17 - 13 \cdot 1)$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1 \quad (\text{変形すると } 1 = 13 - 4 \cdot 3)$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3 = 13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$$

$$= (30 - 17 \cdot 1) \cdot 4 + 17 \cdot (-3) = 30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7)$$

よって $30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) = 1$

したがって、 $30x + 17y = 1$ の整数解の1つは $x = 4, y = -7$

(解説)

30と17に互除法を適用すると、次のようになる。

$$30 = 17 \cdot 1 + 13 \quad (\text{変形すると } 13 = 30 - 17 \cdot 1)$$

$$17 = 13 \cdot 1 + 4 \quad (\text{変形すると } 4 = 17 - 13 \cdot 1)$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1 \quad (\text{変形すると } 1 = 13 - 4 \cdot 3)$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3 = 13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$$

$$= (30 - 17 \cdot 1) \cdot 4 + 17 \cdot (-3) = 30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7)$$

よって $30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) = 1$

したがって、 $30x + 17y = 1$ の整数解の1つは $x = 4, y = -7$

9 次の方程式の整数解の1つを求めよ。 [20点]

$$83x + 54y = 1$$

(解答) 83と54に互除法を適用すると、次のようになる。

$$83 = 54 \cdot 1 + 29 \quad (\text{変形すると } 29 = 83 - 54 \cdot 1)$$

$$54 = 29 \cdot 1 + 25 \quad (\text{変形すると } 25 = 54 - 29 \cdot 1)$$

$$29 = 25 \cdot 1 + 4 \quad (\text{変形すると } 4 = 29 - 25 \cdot 1)$$

$$25 = 4 \cdot 6 + 1 \quad (\text{変形すると } 1 = 25 - 4 \cdot 6)$$

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$$1 = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - (29 - 25 \cdot 1) \cdot 6$$

よって $83 \cdot (-13) + 54 \cdot 20 = 1$

したがって、 $83x + 54y = 1$ の整数解の1つは $x = -13, y = 20$

(解説)

83と54に互除法を適用すると、次のようになる。

$83 = 54 \cdot 1 + 29$ (変形すると $29 = 83 - 54 \cdot 1$)

$54 = 29 \cdot 1 + 25$ (変形すると $25 = 54 - 29 \cdot 1$)

$29 = 25 \cdot 1 + 4$ (変形すると $4 = 29 - 25 \cdot 1$)

$25 = 4 \cdot 6 + 1$ (変形すると $1 = 25 - 4 \cdot 6$)

余りに着目して、この計算を逆にたどると

$1 = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - (29 - 25 \cdot 1) \cdot 6$

$= 25 \cdot 7 - 29 \cdot 6 = (54 - 29 \cdot 1) \cdot 7 - 29 \cdot 6$

$= 54 \cdot 7 - 29 \cdot 13 = 54 \cdot 7 - (83 - 54 \cdot 1) \cdot 13$

$= 83 \cdot (-13) + 54 \cdot 20$

よって $83 \cdot (-13) + 54 \cdot 20 = 1$

したがって、 $83x + 54y = 1$ の整数解の1つは $x = -13, y = 20$

10 次の方程式を満たす整数 x, y の組を1組求めなさい。

(1) $31x + 9y = 1$ (2) $11x + 24y = 1$

(解説) (1) $x = -2, y = 7$ (2) $x = 11, y = -5$

(解説)

(1) $31 = 9 \times 3 + 4$ ①

$9 = 4 \times 2 + 1$ ②

②から $1 = 9 - 4 \times 2$ ③

①から $4 = 31 - 9 \times 3$

これを③に代入すると

$1 = 9 - (31 - 9 \times 3) \times 2$

$= 9 - 31 \times 2 + 9 \times 6$

$= 31 \times (-2) + 9 \times 7$

よって $31 \times (-2) + 9 \times 7 = 1$

したがって、方程式 $31x + 9y = 1$ を満たす整数 x, y の組の1つは

$x = -2, y = 7$

(2) $24 = 11 \times 2 + 2$ ①

$11 = 2 \times 5 + 1$ ②

②から $1 = 11 - 2 \times 5$ ③

①から $2 = 24 - 11 \times 2$

これを③に代入すると

$1 = 11 - (24 - 11 \times 2) \times 5$

$= 11 - 24 \times 5 + 11 \times 10$

$= 11 \times 11 + 24 \times (-5)$

よって $11 \times 11 + 24 \times (-5) = 1$

したがって、方程式 $11x + 24y = 1$ を満たす整数 x, y の組の1つは

$x = 11, y = -5$

11 次の方程式を満たす整数 x, y の組を1組求めなさい。

(1) $47x + 22y = 1$ (2) $44x + 25y = 1$

(解説) (1) $x = -7, y = 15$ (2) $x = 4, y = -7$

(解説)

(1) $47 = 22 \times 2 + 3$ ①

$22 = 3 \times 7 + 1$ ②

②から $1 = 22 - 3 \times 7$ ③

①から $3 = 47 - 22 \times 2$

これを③に代入すると

$1 = 22 - (47 - 22 \times 2) \times 7 = 22 - 47 \times 7 + 22 \times 14$

$= 47 \times (-7) + 22 \times 15$

よって $47 \times (-7) + 22 \times 15 = 1$

したがって、方程式 $47x + 22y = 1$ を満たす整数 x, y の組の1つは

$x = -7, y = 15$

(2) $44 = 25 \times 1 + 19$ ①

$25 = 19 \times 1 + 6$ ②

$19 = 6 \times 3 + 1$ ③

③から $1 = 19 - 6 \times 3$ ④

②, ①から $6 = 25 - 19 \times 1, 19 = 44 - 25 \times 1$

これらを④に代入すると

$1 = 19 - (25 - 19 \times 1) \times 3 = 19 - 25 \times 3 + 19 \times 3$

$= -25 \times 3 + 19 \times 4 = -25 \times 3 + (44 - 25 \times 1) \times 4$

$= -25 \times 7 + 44 \times 4 = 44 \times 4 + 25 \times (-7)$

よって $44 \times 4 + 25 \times (-7) = 1$

したがって、方程式 $44x + 25y = 1$ を満たす整数 x, y の組の1つは

$x = 4, y = -7$

12 方程式 $21x + 19y = 1$ を満たす整数 x, y の組を1組求めなさい。 [25点]

(解説) $21 = 19 \times 1 + 2$ ①

$19 = 2 \times 9 + 1$ ②

②から $1 = 19 - 2 \times 9$ ③

①から $2 = 21 - 19 \times 1$

これを③に代入すると

$1 = 19 - (21 - 19 \times 1) \times 9$

$= 19 - 21 \times 9 + 19 \times 9$

$= 21 \times (-9) + 19 \times 10$

よって $21 \times (-9) + 19 \times 10 = 1$

したがって、方程式 $21x + 19y = 1$ を満たす整数 x, y の組の1つは

$x = -9, y = 10$

(解説)

$21 = 19 \times 1 + 2$ ①

$19 = 2 \times 9 + 1$ ②

②から $1 = 19 - 2 \times 9$ ③

①から $2 = 21 - 19 \times 1$

これを③に代入すると

$1 = 19 - (21 - 19 \times 1) \times 9$

$= 19 - 21 \times 9 + 19 \times 9$

$= 21 \times (-9) + 19 \times 10$

よって $21 \times (-9) + 19 \times 10 = 1$

したがって、方程式 $21x + 19y = 1$ を満たす整数 x, y の組の1つは $x = -9, y = 10$

13 次の等式を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

(1) $11x + 19y = 1$

(2) $11x + 19y = 5$

(解説) (1) $x = 7, y = -4$ (2) $x = 35, y = -20$

(解説)

(1) $19 = 11 \cdot 1 + 8$ 移項すると $8 = 19 - 11 \cdot 1$

$11 = 8 \cdot 1 + 3$ 移項すると $3 = 11 - 8 \cdot 1$

$8 = 3 \cdot 2 + 2$ 移項すると $2 = 8 - 3 \cdot 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$ 移項すると $1 = 3 - 2 \cdot 1$

よって $1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (8 - 3 \cdot 2) \cdot 1$

$= 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 8 \cdot (-1) + (11 - 8 \cdot 1) \cdot 3$

$= 11 \cdot 3 + 8 \cdot (-4) = 11 \cdot 3 + (19 - 11 \cdot 1) \cdot (-4)$

$= 11 \cdot 7 + 19 \cdot (-4)$

すなわち $11 \cdot 7 + 19 \cdot (-4) = 1$ ①

ゆえに、求める整数 x, y の組の1つは $x = 7, y = -4$

(別解) $a = 11, b = 19$ とする。

$8 = 19 - 11 \cdot 1 = b - a$

$3 = 11 - 8 \cdot 1 = a - (b - a) = 2a - b$

$2 = 8 - 3 \cdot 2 = (b - a) - (2a - b) \cdot 2 = -5a + 3b$

$1 = 3 - 2 \cdot 1 = (2a - b) - (-5a + 3b) \cdot 1 = 7a - 4b$

すなわち $11 \cdot 7 + 19 \cdot (-4) = 1$

よって、求める整数 x, y の組の1つは $x = 7, y = -4$

(2) ①の両辺に5を掛けると

$11 \cdot (7 \cdot 5) + 19 \cdot [(-4) \cdot 5] = 5$

すなわち $11 \cdot 35 + 19 \cdot (-20) = 5$

よって、求める整数 x, y の組の1つは $x = 35, y = -20$

14 次の等式を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

(1) $19x + 26y = 1$

(2) $19x + 26y = -2$

(解説) (1) $x = 11, y = -8$ (2) $x = -22, y = 16$

(解説)

(1) $26 = 19 \cdot 1 + 7$ 移項すると $7 = 26 - 19 \cdot 1$

$19 = 7 \cdot 2 + 5$ 移項すると $5 = 19 - 7 \cdot 2$

$7 = 5 \cdot 1 + 2$ 移項すると $2 = 7 - 5 \cdot 1$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$ 移項すると $1 = 5 - 2 \cdot 2$

よって $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2$

$= 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 7 \cdot (-2) + (19 - 7 \cdot 2) \cdot 3$

$= 19 \cdot 3 + 7 \cdot (-8) = 19 \cdot 3 + (26 - 19 \cdot 1) \cdot (-8)$

$= 19 \cdot 11 + 26 \cdot (-8) = 1$ ①

したがって、求める整数 x, y の組の1つは

$x = 11, y = -8$

(別解) $a = 19, b = 26$ とする。

$7 = 26 - 19 \cdot 1 = b - a$

$5 = 19 - 7 \cdot 2 = a - 2(b - a) = 3a - 2b$

$2 = 7 - 5 \cdot 1 = (b - a) - (3a - 2b) = -4a + 3b$

$1 = 5 - 2 \cdot 2 = (3a - 2b) - 2(-4a + 3b) = 11a - 8b$

すなわち $19 \cdot 11 + 26 \cdot (-8) = 1$

よって、求める整数 x, y の組の1つは $x = 11, y = -8$

(2) ①の両辺に-2を掛けると

$19 \cdot \{11 \cdot (-2)\} + 26 \cdot \{(-8) \cdot (-2)\} = -2$

すなわち $19 \cdot (-22) + 26 \cdot 16 = -2$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは

$x = -22, y = 16$

15 次の等式を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

(

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -22, y = -28$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$$a = 61, b = 48 \text{ とおく。}$$

$$13 = 61 - 48 \cdot 1 \text{ より } 13 = a - b \cdot 1 = a - b$$

$$9 = 48 - 13 \cdot 3 \text{ より } 9 = b - (a - b) \cdot 3 = -3a + 4b$$

$$4 = 13 - 9 \cdot 1 \text{ より } 4 = (a - b) - (-3a + 4b) \cdot 1 = 4a - 5b$$

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 \text{ より } 1 = (-3a + 4b) - (4a - 5b) \cdot 2 = -11a + 14b$$

$$\text{よって, } -11a + 14b = 1 \text{ より } 61 \cdot (-11) + 48 \cdot 14 = 1$$

$$\text{すなわち } 61 \cdot (-11) - 48 \cdot (-14) = 1$$

$$\text{両辺に } 2 \text{ を掛けて } 61 \cdot [2 \cdot (-11)] - 48 \cdot [2 \cdot (-14)] = 2$$

$$\text{すなわち } 61 \cdot (-22) - 48 \cdot (-28) = 2$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -22, y = -28$

(5) 43 と 18 に互除法の計算を行うと、次のようにになる。

$$43 = 18 \cdot 2 + 7 \quad \text{移項すると } 7 = 43 - 18 \cdot 2$$

$$18 = 7 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると } 4 = 18 - 7 \cdot 2$$

$$7 = 4 \cdot 1 + 3 \quad \text{移項すると } 3 = 7 - 4 \cdot 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{よって } 3 = 7 - 4 \cdot 1$$

$$= 7 - (18 - 7 \cdot 2) \cdot 1$$

$$= 7 \cdot 3 + 18 \cdot (-1)$$

$$= (43 - 18 \cdot 2) \cdot 3 + 18 \cdot (-1)$$

$$= 43 \cdot 3 + 18 \cdot (-7)$$

$$\text{すなわち } 43 \cdot 3 + 18 \cdot (-7) = 3$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 3, y = -7$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$$a = 43, b = 18 \text{ とおく。}$$

$$7 = 43 - 18 \cdot 2 \text{ より } 7 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$4 = 18 - 7 \cdot 2 \text{ より } 4 = b - (a - 2b) \cdot 2 = -2a + 5b$$

$$3 = 7 - 4 \cdot 1 \text{ より } 3 = (a - 2b) - (-2a + 5b) \cdot 1 = 3a - 7b$$

$$\text{よって, } 3a - 7b = 3 \text{ より } 43 \cdot 3 + 18 \cdot (-7) = 3$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 3, y = -7$

注意 43 と 18 の互除法の計算は、①以降も続くが①の時点で与えられた等式の右辺 3

が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

(6) 36 と 25 に互除法の計算を行うと、次のようにになる。

$$36 = 25 \cdot 1 + 11 \quad \text{移項すると } 11 = 36 - 25 \cdot 1$$

$$25 = 11 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると } 3 = 25 - 11 \cdot 2$$

$$11 = 3 \cdot 3 + 2 \quad \text{移項すると } 2 = 11 - 3 \cdot 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{よって } 2 = 11 - 3 \cdot 3$$

$$= 11 - (25 - 11 \cdot 2) \cdot 3$$

$$= 11 \cdot 7 - 25 \cdot 3$$

$$= (36 - 25 \cdot 1) \cdot 7 - 25 \cdot 3$$

$$= 36 \cdot 7 - 25 \cdot 10$$

$$\text{すなわち } 36 \cdot 7 - 25 \cdot 10 = 2$$

$$\text{両辺に } 2 \text{ を掛けて } 36 \cdot (2 \cdot 7) - 25 \cdot (2 \cdot 10) = 4$$

$$\text{すなわち } 36 \cdot 14 - 25 \cdot 20 = 4$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 14, y = 20$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$$a = 36, b = 25 \text{ とおく。}$$

$$11 = 36 - 25 \cdot 1 \text{ より } 11 = a - b \cdot 1 = a - b$$

$$3 = 25 - 11 \cdot 2 \text{ より } 3 = b - (a - b) \cdot 2 = -2a + 3b$$

$$2 = 11 - 3 \cdot 3 \text{ より } 2 = (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 3 = 7a - 10b$$

$$\text{よって, } 7a - 10b = 2 \text{ より } 36 \cdot 7 - 25 \cdot 10 = 2$$

$$\text{両辺に } 2 \text{ を掛けて } 36 \cdot (2 \cdot 7) - 25 \cdot (2 \cdot 10) = 4$$

$$\text{すなわち } 36 \cdot 14 - 25 \cdot 20 = 4$$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 14, y = 20$

注意 36 と 25 の互除法の計算は、①以降も続くが①の時点で与えられた等式の右辺 4 の約数 2 が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

[19] 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$(1) \ 50x + 23y = 1$$

$$(2) \ 90x + 37y = 2$$

$$(3) \ 37x + 26y = 1$$

$$(4) \ 62x - 23y = 5$$

$$(5) \ 86x + 31y = 3$$

$$(6) \ 103x - 38y = 10$$

解答 (1) $x = 6, y = -13$ (2) $x = 14, y = -34$ (3) $x = -7, y = 10$
(4) $x = -50, y = -135$ (5) $x = 4, y = -11$ (6) $x = 6, y = 16$

解説

(1) 50 と 23 に互除法の計算を行うと、次のようにになる。

$$50 = 23 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると } 4 = 50 - 23 \cdot 2$$

$$23 = 4 \cdot 5 + 3 \quad \text{移項すると } 3 = 23 - 4 \cdot 5$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると } 1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$\text{よって } 1 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (23 - 4 \cdot 5) \cdot 1$$

$$= 4 \cdot 6 + 23 \cdot (-1)$$

$$= (50 - 23 \cdot 2) \cdot 6 + 23 \cdot (-1)$$

$$= 50 \cdot 6 + 23 \cdot (-13)$$

$$\text{すなわち } 50 \cdot 6 + 23 \cdot (-13) = 1$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 6, y = -13$

別解 $a = 50, b = 23$ とおく。

50 と 23 の互除法の計算から

$$4 = 50 - 23 \cdot 2 \text{ より } 4 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$3 = 23 - 4 \cdot 5 \text{ より } 3 = b - (a - 2b) \cdot 5$$

$$= -5a + 11b$$

$$1 = 4 - 3 \cdot 1 \text{ より } 1 = (a - 2b) - (-5a + 11b) \cdot 1$$

$$= 6a - 13b$$

$$\text{よって, } 6a - 13b = 1 \text{ より } 50 \cdot 6 + 23 \cdot (-13) = 1$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 6, y = -13$

参考 割り算の等式を利用して係数を小さくする方法で求めることもできる。

50 = 23・2 + 4 より、方程式は次のようになる。

$$(23 \cdot 2 + 4)x + 23y = 1$$

整理すると $4x + 23(2x + y) = 1$

$$23 = 4 \cdot 5 + 3 \text{ より } 4x + (4 \cdot 5 + 3)(2x + y) = 1$$

$$\text{すなわち } 4(11x + 5y) + 3(2x + y) = 1$$

$$11x + 5y = m, 2x + y = n \text{ とおくと } 4m + 3n = 1$$

この等式を満たす整数 m, n の組の 1 つは $m = 1, n = -1$

$$11x + 5y = 1, 2x + y = -1 \text{ を解くと } x = 6, y = -13$$

(2) 90 と 37 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$90 = 37 \cdot 2 + 16 \quad \text{移項すると } 16 = 90 - 37 \cdot 2$$

$$37 = 16 \cdot 2 + 5 \quad \text{移項すると } 5 = 37 - 16 \cdot 2$$

$$16 = 5 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると } 1 = 16 - 5 \cdot 3$$

$$\text{よって } 1 = 16 - 5 \cdot 3 = 16 - (37 - 16 \cdot 2) \cdot 3$$

$$= 16 \cdot 7 + 37 \cdot (-3)$$

$$= (90 - 37 \cdot 2) \cdot 7 + 37 \cdot (-3)$$

$$= 90 \cdot 7 + 37 \cdot (-17)$$

$$\text{すなわち } 90 \cdot 7 + 37 \cdot (-17) = 1$$

両辺に 2 を掛けて $90 \cdot 14 + 37 \cdot (-34) = 2$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 14, y = -34$

別解 $a = 90, b = 37$ とおく。

90 と 37 の互除法の計算から

$$16 = 90 - 37 \cdot 2 \text{ より } 16 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$5 = 37 - 16 \cdot 2 \text{ より } 5 = b - (a - 2b) \cdot 2$$

$$= -2a + 5b$$

$$1 = 16 - 5 \cdot 3 \text{ より } 1 = (a - 2b) - (-2a + 5b) \cdot 3$$

$$= 7a - 17b$$

$$\text{よって, } 7a - 17b = 1 \text{ より } 90 \cdot 7 + 37 \cdot (-17) = 1$$

両辺に 2 を掛けて $90 \cdot 14 + 37 \cdot (-34) = 2$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 14, y = -34$

(3) 37 と 26 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$37 = 26 \cdot 1 + 11 \quad \text{移項すると } 11 = 37 - 26 \cdot 1$$

$$26 = 11 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると } 4 = 26 - 11 \cdot 2$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると } 3 = 11 - 4 \cdot 2$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると } 1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$\text{よって } 1 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (11 - 4 \cdot 2) \cdot 1$$

$$= 4 \cdot 3 + 11 \cdot (-1)$$

$$= (26 - 11 \cdot 2) \cdot 3 + 11 \cdot (-1)$$

$$= 26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7)$$

$$= 26 \cdot 3 + (37 - 26 \cdot 1) \cdot (-7)$$

$$= 37 \cdot (-7) + 26 \cdot 10$$

$$\text{すなわち } 37 \cdot (-7) + 26 \cdot 10 = 1$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -7, y = 10$

(4) 62 と 23 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$62 = 23 \cdot 2 + 16 \quad \text{移項すると } 16 = 62 - 23 \cdot 2$$

$$23 = 16 \cdot 1 + 7 \quad \text{移項すると } 7 = 23 - 16 \cdot 1$$

$$16 = 7 \cdot 2 + 2 \quad \text{移項すると } 2 = 16 - 7 \cdot 2$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると } 1 = 7 - 2 \cdot 3$$

$$\text{よって } 1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (16 - 7 \cdot 2) \cdot 3$$

$$= 7 \cdot 7 + 16 \cdot (-3)$$

$$$$

$$\begin{aligned}
 86 = 31 \cdot 2 + 24 & \text{ 移項すると } 24 = 86 - 31 \cdot 2 \\
 31 = 24 \cdot 1 + 7 & \text{ 移項すると } 7 = 31 - 24 \cdot 1 \\
 24 = 7 \cdot 3 + 3 & \text{ 移項すると } 3 = 24 - 7 \cdot 3 \quad \dots \dots \textcircled{1} \\
 \text{よって } 3 = 24 - 7 \cdot 3 & = 24 - (31 - 24 \cdot 1) \cdot 3 \\
 & = 24 \cdot 4 + 31 \cdot (-3) \\
 & = (86 - 31 \cdot 2) \cdot 4 + 31 \cdot (-3) \\
 & = 86 \cdot 4 + 31 \cdot (-11) \\
 \text{すなわち } 86 \cdot 4 + 31 \cdot (-11) & = 3
 \end{aligned}$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 4, y = -11$

注意 86 と 31 の互除法の計算は、①以降も

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

と続くが、①の時点では式の右辺 3 が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

別解 $a = 86, b = 31$ とおく。

86 と 31 の互除法の計算から

$$24 = 86 - 31 \cdot 2 \text{ より } 24 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$7 = 31 - 24 \cdot 1 \text{ より } 7 = b - (a - 2b) \cdot 1 = -a + 3b$$

$$3 = 24 - 7 \cdot 3 \text{ より } 3 = (a - 2b) - (-a + 3b) \cdot 3 = 4a - 11b$$

よって、 $4a - 11b = 3$ より $86 \cdot 4 + 31 \cdot (-11) = 3$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 4, y = -11$

(6) 103 と 38 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$103 = 38 \cdot 2 + 27 \text{ 移項すると } 27 = 103 - 38 \cdot 2$$

$$38 = 27 \cdot 1 + 11 \text{ 移項すると } 11 = 38 - 27 \cdot 1$$

$$27 = 11 \cdot 2 + 5 \text{ 移項すると } 5 = 27 - 11 \cdot 2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } 5 &= 27 - 11 \cdot 2 = 27 - (38 - 27 \cdot 1) \cdot 2 \\ &= 27 \cdot 3 + 38 \cdot (-2) \\ &= (103 - 38 \cdot 2) \cdot 3 + 38 \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$= 103 \cdot 3 + 38 \cdot (-8) = 103 \cdot 3 - 38 \cdot 8$$

$$\text{すなわち } 103 \cdot 3 - 38 \cdot 8 = 5$$

$$\text{両辺に } 2 \text{ を掛けて } 103 \cdot 6 - 38 \cdot 16 = 10$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 6, y = 16$

注意 ①の時点では式の右辺 10 の約数 5 が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

別解 $a = 103, b = 38$ とおく。

103 と 38 の互除法の計算から

$$27 = 103 - 38 \cdot 2 \text{ より } 27 = a - b \cdot 2 = a - 2b$$

$$11 = 38 - 27 \cdot 1 \text{ より } 11 = b - (a - 2b) \cdot 1 = -a + 3b$$

$$5 = 27 - 11 \cdot 2 \text{ より } 5 = (a - 2b) - (-a + 3b) \cdot 2 = 3a - 8b$$

よって、 $3a - 8b = 5$ より $103 \cdot 3 - 38 \cdot 8 = 5$

$$\text{両辺に } 2 \text{ を掛けて } 103 \cdot 6 - 38 \cdot 16 = 10$$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 6, y = 16$

20 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$(1) 23x + 41y = 1 \quad (2) 31x - 43y = 5 \quad (3) 26x + 34y = 6$$

解答 (1) $x = -16, y = 9$ (2) $x = -4, y = -3$ ($x = -90, y = -65$ でもよい)
(3) $x = 12, y = -9$

解説

(1) 23 と 41 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{lll}
 41 = 23 \cdot 1 + 18 & \text{移項すると} & 18 = 41 - 23 \cdot 1 \\
 23 = 18 \cdot 1 + 5 & \text{移項すると} & 5 = 23 - 18 \cdot 1 \\
 18 = 5 \cdot 3 + 3 & \text{移項すると} & 3 = 18 - 5 \cdot 3 \\
 5 = 3 \cdot 1 + 2 & \text{移項すると} & 2 = 5 - 3 \cdot 1 \\
 3 = 2 \cdot 1 + 1 & \text{移項すると} & 1 = 3 - 2 \cdot 1
 \end{array}$$

よって $1 = 3 - 2 \cdot 1$

$$= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1$$

$$= 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$$

$$= (18 - 5 \cdot 3) \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$$

$$= 18 \cdot 2 + 5 \cdot (-7)$$

$$= 18 \cdot 2 + (23 - 18 \cdot 1) \cdot (-7)$$

$$= 18 \cdot 9 + 23 \cdot (-7)$$

$$= (41 - 23 \cdot 1) \cdot 9 + 23 \cdot (-7)$$

$$= 23 \cdot (-16) + 41 \cdot 9$$

すなわち $23 \cdot (-16) + 41 \cdot 9 = 1$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -16, y = 9$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$a = 23, b = 41$ とおく。

$$18 = 41 - 23 \cdot 1 \text{ より } 18 = b - a \cdot 1 = b - a$$

$$5 = 23 - 18 \cdot 1 \text{ より } 5 = a - (b - a) \cdot 1 = 2a - b$$

$$3 = 18 - 5 \cdot 3 \text{ より } 3 = (b - a) - (2a - b) \cdot 3 = -7a + 4b$$

$$2 = 5 - 3 \cdot 1 \text{ より } 2 = (2a - b) - (-7a + 4b) \cdot 1 = 9a - 5b$$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 \text{ より } 1 = (-7a + 4b) - (9a - 5b) \cdot 1 = -16a + 9b$$

よって、 $-16a + 9b = 1$ より $23 \cdot (-16) + 41 \cdot 9 = 1$

ゆえに、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -16, y = 9$

(2) 31 と 43 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$43 = 31 \cdot 1 + 12 \text{ 移項すると } 12 = 43 - 31 \cdot 1$$

$$31 = 12 \cdot 2 + 7 \text{ 移項すると } 7 = 31 - 12 \cdot 2$$

$$12 = 7 \cdot 1 + 5 \text{ 移項すると } 5 = 12 - 7 \cdot 1$$

よって $5 = 12 - 7 \cdot 1$

$$= 12 - (31 - 12 \cdot 2) \cdot 1$$

$$= 12 \cdot 3 - 31 \cdot 1$$

$$= (43 - 31 \cdot 1) \cdot 3 - 31 \cdot 1$$

$$= 31 \cdot (-4) - 43 \cdot (-3)$$

すなわち $31 \cdot (-4) - 43 \cdot (-3) = 5$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -4, y = -3$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$a = 31, b = 43$ とおく。

$$12 = 43 - 31 \cdot 1 \text{ より } 12 = b - a \cdot 1 = b - a$$

$$7 = 31 - 12 \cdot 2 \text{ より } 7 = a - (b - a) \cdot 2 = 3a - 2b$$

$$5 = 12 - 7 \cdot 1 \text{ より } 5 = (b - a) - (3a - 2b) \cdot 1 = -4a + 3b$$

よって、 $-4a + 3b = 5$ より $31 \cdot (-4) + 43 \cdot 3 = 5$

すなわち $31 \cdot (-4) - 43 \cdot (-3) = 5$

ゆえに、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -4, y = -3$

(3) 両辺を 2 で割ると $13x + 17y = 3$

13 と 17 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$17 = 13 \cdot 1 + 4 \text{ 移項すると } 4 = 17 - 13 \cdot 1$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1 \text{ 移項すると } 1 = 13 - 4 \cdot 3$$

よって $1 = 13 \cdot 1 + 4 \cdot (-3)$

$$= 13 \cdot 1 + (17 - 13 \cdot 1) \cdot (-3)$$

$$= 13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$$

$$= 13 \cdot (17 - 13 \cdot 1) + 17 \cdot (-3)$$

$$= 13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$$

すなわち $13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3) = 1$

両辺に 3 を掛けて $13 \cdot 4 \cdot 3 + 17 \cdot (-3) \cdot 3 = 3$

すなわち $13 \cdot 12 + 17 \cdot (-9) = 3$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 12, y = -9$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$a = 13, b = 17$ とおく。

$$4 = 17 - 13 \cdot 1 \text{ より } 4 = b - a \cdot 1 = b - a$$

$$1 = 13 - 4 \cdot 3 \text{ より } 1 = a - (b - a) \cdot 3 = 4a - 3b$$

よって、 $4a - 3b = 1$ より $13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3) = 1$

(以下、同じ)

21 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

$$(1) 11x + 32y = 4$$

$$(2) 9x - 13y = 7$$

$$(3) 14x + 16y = 6$$

解答 (1) $x = 12, y = -4$ (2) $x = 21, y = 14$ (3) $x = -3, y = 3$

解説

(1) 11 と 32 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$32 = 11 \cdot 2 + 10 \text{ 移項すると } 10 = 32 - 11 \cdot 2$$

$$11 = 10 \cdot 1 + 1 \text{ 移項すると } 1 = 11 - 10 \cdot 1$$

よって $1 = 11 - 10 \cdot 1$

$$= 11 - (32 - 11 \cdot 2) \cdot 1$$

$$= 11 \cdot 3 + 32 \cdot (-1)$$

すなわち $11 \cdot 3 + 32 \cdot (-1) = 1$

両辺に 4 を掛けて $11 \cdot (3 \cdot 4) + 32 \cdot [(-1) \cdot 4] = 4$

すなわち $11 \cdot 12 + 32 \cdot (-4) = 4$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 12, y = -4$

別解 (互除法の計算までは同じ)

$a = 11, b = 32$ とおく。

$$10 = 32 - 11 \cdot 2 \text{ より } 10 = b - a \cdot 2 = b - 2a$$

$$1 = 11 - 10 \cdot 1 \text{ より } 1 = a - (b - 2a) \cdot 1 = 3a - b$$

よって、 $3a - b = 1$ より $11 \cdot 3 + 32 \cdot (-1) = 1$

(以下、同じ)

(2) 9 と 13 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$13 = 9 \cdot 1 + 4 \text{ 移項すると } 4 = 13 - 9 \cdot 1$$

$$9 = 4 \cdot 2 + 1 \text{ 移項すると } 1 = 9 - 4 \cdot 2$$

よって $1 = 9 - 4 \cdot 2$

$$= 9 - (13 - 9 \cdot 1) \cdot 2$$

$$= 9 \cdot 3 - 13 \cdot 2$$

すなわち $9 \cdot 3 - 13 \cdot 2 = 1$

両辺に 7 を掛けて $9 \cdot (3 \cdot 7) - 13 \cdot (2 \cdot 7) = 7$

すなわち $9 \cdot 21 - 13 \cdot 14 = 7$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 21, y = 14$

7と8に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$8=7 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=8-7 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 7 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 = 1 \\ \text{両辺に3を掛けて} \quad & 7 \cdot \{-(-1) \cdot 3\} + 8 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 7 \cdot (-3) + 8 \cdot 3 = 3 \\ \text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=-3, y=3 \end{aligned}$$

22 次の等式を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

- (1) $24x+19y=1$ (2) $63x+44y=2$ (3) $86x-49y=3$
(4) $95x+28y=1$ (5) $141x-52y=4$ (6) $25x-61y=9$

- 解答** (1) $x=4, y=-5$ (2) $x=14, y=-20$ (3) $x=12, y=21$
(4) $x=-5, y=17$ (5) $x=-28, y=-76$ (6) $x=15, y=6$

解説

(1) 24と19に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$24=19 \cdot 1 + 5 \quad \text{移項すると} \quad 5=24-19 \cdot 1$$

$$19=5 \cdot 3 + 4 \quad \text{移項すると} \quad 4=19-5 \cdot 3$$

$$5=4 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=5-4 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & 1=5-4 \cdot 1=5-(19-5 \cdot 3) \cdot 1=5 \cdot 4+19 \cdot (-1) \\ & =(24-19 \cdot 1) \cdot 4+19 \cdot (-1)=24 \cdot 4+19 \cdot (-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 24 \cdot 4+19 \cdot (-5)=1 \\ \text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=4, y=-5 \end{aligned}$$

参考 割り算の等式を利用して係数を小さくする方法を考えてみる。

$24=19 \cdot 1 + 5$ より、方程式は次のようになる。

$$(19 \cdot 1 + 5)x + 19y = 1$$

$$\text{整理すると} \quad 5x + 19(x+y) = 1$$

$$19=5 \cdot 3 + 4 \text{ より} \quad 5x + (5 \cdot 3 + 4)(x+y) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 5(4x+3y)+4(x+y)=1 \\ & 4x+3y=m, x+y=n \text{ とおくと} \quad 5m+4n=1 \end{aligned}$$

この等式を満たす整数 m, n の組の1つは $m=1, n=-1$

$$4x+3y=1, x+y=-1 \text{ を解くと} \quad x=4, y=-5$$

(2) 63と44に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$63=44 \cdot 1 + 19 \quad \text{移項すると} \quad 19=63-44 \cdot 1$$

$$44=19 \cdot 2 + 6 \quad \text{移項すると} \quad 6=44-19 \cdot 2$$

$$19=6 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=19-6 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & 1=19-6 \cdot 3=19-(44-19 \cdot 2) \cdot 3=19 \cdot 7+44 \cdot (-3) \\ & =(63-44 \cdot 1) \cdot 7+44 \cdot (-3)=63 \cdot 7+44 \cdot (-10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 63 \cdot 7+44 \cdot (-10)=1 \\ \text{両辺に2を掛けると} \quad & 63 \cdot (2 \cdot 7)+44 \cdot [2 \cdot (-10)]=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 63 \cdot 14+44 \cdot (-20)=2 \\ \text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=14, y=-20 \end{aligned}$$

(3) 86と49に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$86=49 \cdot 1 + 37 \quad \text{移項すると} \quad 37=86-49 \cdot 1$$

$$49=37 \cdot 1 + 12 \quad \text{移項すると} \quad 12=49-37 \cdot 1$$

$$37=12 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=37-12 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & 1=37-12 \cdot 3=37-(49-37 \cdot 1) \cdot 3=37 \cdot 4-49 \cdot 3 \\ & =(86-49 \cdot 1) \cdot 4-49 \cdot 3=86 \cdot 4-49 \cdot 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 86 \cdot 4-49 \cdot 7=1 \\ \text{両辺に3を掛けると} \quad & 86 \cdot (3 \cdot 4)-49 \cdot (3 \cdot 7)=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 86 \cdot 12-49 \cdot 21=3 \\ \text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=12, y=21 \end{aligned}$$

(4) 95と28に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$95=28 \cdot 3 + 11 \quad \text{移項すると} \quad 11=95-28 \cdot 3$$

$$28=11 \cdot 2 + 6 \quad \text{移項すると} \quad 6=28-11 \cdot 2$$

$$11=6 \cdot 1 + 5 \quad \text{移項すると} \quad 5=11-6 \cdot 1$$

$$6=5 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=6-5 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & 1=6-5 \cdot 1=6-(11-6 \cdot 1) \cdot 1=6 \cdot 2+11 \cdot (-1) \\ & =(28-11 \cdot 2) \cdot 2+11 \cdot (-1)=28 \cdot 2+11 \cdot (-5) \\ & =28 \cdot 2+(95-28 \cdot 3) \cdot (-5)=95 \cdot (-5)+28 \cdot 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 95 \cdot (-5)+28 \cdot 17=1 \\ \text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=-5, y=17 \end{aligned}$$

(5) 141と52に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$141=52 \cdot 2 + 37 \quad \text{移項すると} \quad 37=141-52 \cdot 2$$

$$52=37 \cdot 1 + 15 \quad \text{移項すると} \quad 15=52-37 \cdot 1$$

$$37=15 \cdot 2 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7=37-15 \cdot 2$$

$$15=7 \cdot 2 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=15-7 \cdot 2$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & 1=15-7 \cdot 2=15-(37-15 \cdot 2) \cdot 2=15 \cdot 5+37 \cdot (-2) \\ & =(52-37 \cdot 1) \cdot 5+37 \cdot (-2)=52 \cdot 5+37 \cdot (-7) \\ & =52 \cdot 5+(141-52 \cdot 2) \cdot (-7)=141 \cdot (-7)-52 \cdot (-19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 141 \cdot (-7)-52 \cdot (-19)=1 \\ \text{両辺に4を掛けると} \quad & 141 \cdot [4 \cdot (-7)]-52 \cdot [4 \cdot (-19)]=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 141 \cdot (-28)-52 \cdot (-76)=4 \\ \text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=-28, y=-76 \end{aligned}$$

(6) 25と61に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$61=25 \cdot 2 + 11 \quad \text{移項すると} \quad 11=61-25 \cdot 2$$

$$25=11 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3=25-11 \cdot 2 \quad \dots \dots (*)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & 3=25-11 \cdot 2=25-(61-25 \cdot 2) \cdot 2 \\ & =25 \cdot 5-61 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 25 \cdot 5-61 \cdot 2=3 \\ \text{両辺に3を掛けると} \quad & 25 \cdot 15-61 \cdot 6=9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=15, y=6 \end{aligned}$$

注意 (*)の時点で等式の右辺9の約数3が余りとして出てきたため、そこで互除法の計算を止めている。

23 次の等式を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

- (1) $17x+14y=1$ (2) $24x+19y=1$
(3) $52x-37y=1$ (4) $43x+16y=2$

- 解答** (1) $x=5, y=-6$ (2) $x=4, y=-5$ (3) $x=5, y=7$

- (4) $x=6, y=-16$

解説

(1) 17と14に互除法の計算を行う。

$$17=14 \cdot 1 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3=17-14 \cdot 1$$

$$14=3 \cdot 4 + 2 \quad \text{移項すると} \quad 2=14-3 \cdot 4$$

$$3=2 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=3-2 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & 1=3-2 \cdot 1=3-(14-3 \cdot 4) \cdot 1 \\ & =3 \cdot 5+14 \cdot (-1) \\ & =(17-14 \cdot 1) \cdot 5+14 \cdot (-1) \\ & =17 \cdot 5+14 \cdot (-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 17 \cdot 5+14 \cdot (-6)=1 \\ \text{したがって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=5, y=-6 \end{aligned}$$

別解 $a=17, b=14$ とおく。

$$3=17-14 \cdot 1 \quad \text{より} \quad 3=a-b$$

$$2=14-3 \cdot 4 \quad \text{より} \quad 2=b-(a-b) \cdot 4$$

$$= -4a+5b$$

$$1=3-2 \cdot 1 \quad \text{より} \quad 1=(a-b)-(-4a+5b)$$

$$=5a-6b$$

$$\text{よって, } 5a-6b=1 \quad \text{より} \quad 17 \cdot 5+14 \cdot (-6)=1$$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは

$$x=5, y=-6$$

(2) 24と19に互除法の計算を行う。

$$24=19 \cdot 1 + 5 \quad \text{移項すると} \quad 5=24-19 \cdot 1$$

$$19=5 \cdot 3 + 4 \quad \text{移項すると} \quad 4=19-5 \cdot 3$$

$$5=4 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=5-4 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & 1=5-4 \cdot 1=5-(19-5 \cdot 3) \cdot 1 \\ & =5 \cdot 4+19 \cdot (-1) \\ & =(24-19 \cdot 1) \cdot 4+19 \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$=24 \cdot 4+19 \cdot (-5)$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 24 \cdot 4+19 \cdot (-5)=1 \\ \text{したがって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=4, y=-5 \end{aligned}$$

別解 $a=24, b=19$ とおく。

$$5=24-19 \cdot 1 \quad \text{より} \quad 5=a-b$$

$$4=19-5 \cdot 3 \quad \text{より} \quad 4=b-(a-b) \cdot 3$$

$$= -3a+4b$$

$$1=5-4 \cdot 1 \quad \text{より} \quad 1=(a-b)-(-3a+4b)$$

$$=4a-5b$$

$$\text{よって, } 4a-5b=1 \quad \text{より} \quad 24 \cdot 4+19 \cdot (-5)=1$$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは

$$x=4, y=-5$$

(3) 52と37に互除法の計算を行う。

$$52=37 \cdot 1 + 15 \quad \text{移項すると} \quad 15=52-37 \cdot 1$$

$$37=15 \cdot 2 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7=37-15 \cdot 2$$

$$15=7 \cdot 2 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=15-7 \cdot 2$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & 1=15-7 \cdot 2=15-(37-15 \cdot 2) \cdot 2 \\ & =15 \cdot 5-37 \cdot 2 \\ & =(52-37 \cdot 1) \cdot 5-37 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$=52 \cdot 5-37 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad & 52 \cdot 5-37 \cdot 7=1 \\ \text{したがって、求める整数 } x, y \text{ の組の1つは} \quad & x=5, y=7 \end{aligned}$$

別解 $a=52, b=37$ とおく。

$$15=52-37 \cdot 1 \quad \text{より} \quad 15=a-b$$

$$7=37-15 \cdot 2 \quad \text{より} \quad 7=b-(a-b) \cdot 2$$

$$= -2a+3b$$

$$1=15-7 \cdot 2 \quad \text{より} \quad 1=(a-b)-(-2a+3b) \cdot 2$$

$$=5a-7b$$

$$\text{よって, } 5a-7b=1 \quad \text{より} \quad 52 \cdot 5-37 \cdot 7=1$$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは

$$x=5, y=7$$

(4) 43と16に互除法の計算を行う。

$$43=16 \cdot 2 + 11 \quad \text{移項すると} \quad 11=43-16 \cdot 2$$

$$16=11 \cdot 1 + 5 \quad \text{移項すると} \quad 5=16-11 \cdot 1$$

$$11=5 \cdot 2 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1=11-5 \cdot 2$$

よって $1 = 11 - 5 \cdot 2 = 11 - (16 - 11 \cdot 1) \cdot 2$
 $= 11 \cdot 3 + 16 \cdot (-2)$
 $= (43 - 16 \cdot 2) \cdot 3 + 16 \cdot (-2)$
 $= 43 \cdot 3 + 16 \cdot (-8)$

すなわち $43 \cdot 3 + 16 \cdot (-8) = 1$

両辺に 2 を掛けると

$43 \cdot (2 \cdot 3) + 16 \cdot [2 \cdot (-8)] = 2$

すなわち $43 \cdot 6 + 16 \cdot (-16) = 2$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x = 6, y = -16$

別解 $a = 43, b = 16$ とおく。

$11 = 43 - 16 \cdot 2$ より $11 = a - b \cdot 2 = a - 2b$

$5 = 16 - 11 \cdot 1$ より $5 = b - (a - 2b) = -a + 3b$

$1 = 11 - 5 \cdot 2$ より $1 = (a - 2b) - (-a + 3b) \cdot 2$
 $= 3a - 8b$

よって、 $3a - 8b = 1$ より $43 \cdot 3 + 16 \cdot (-8) = 1$

両辺に 2 を掛けると

$43 \cdot (2 \cdot 3) + 16 \cdot [2 \cdot (-8)] = 2$

すなわち $43 \cdot 6 + 16 \cdot (-16) = 2$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x = 6, y = -16$

24 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(1) $36x + 25y = 1$

(2) $87x - 61y = 5$

解答 (1) $x = -9, y = 13$ (2) $x = -35, y = -50$

解説

(1) 36 と 25 に互除法の計算を行う。

$36 = 25 \cdot 1 + 11$ 移項すると $11 = 36 - 25 \cdot 1$

$25 = 11 \cdot 2 + 3$ 移項すると $3 = 25 - 11 \cdot 2$

$11 = 3 \cdot 3 + 2$ 移項すると $2 = 11 - 3 \cdot 3$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$ 移項すると $1 = 3 - 2 \cdot 1$

よって $1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (11 - 3 \cdot 3) \cdot 1$

$= 3 \cdot 4 + 11 \cdot (-1)$

$= (25 - 11 \cdot 2) \cdot 4 + 11 \cdot (-1)$

$= 25 \cdot 4 + 11 \cdot (-9)$

$= 25 \cdot 4 + (36 - 25 \cdot 1) \cdot (-9)$

$= 36 \cdot (-9) + 25 \cdot 13$

すなわち $36 \cdot (-9) + 25 \cdot 13 = 1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x = -9, y = 13$

別解 $a = 36, b = 25$ とおく。

$11 = 36 - 25 \cdot 1$ より $11 = a - b$

$3 = 25 - 11 \cdot 2$ より $3 = b - (a - b) \cdot 2$

$= -2a + 3b$

$2 = 11 - 3 \cdot 3$ より $2 = (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 3$

$= 7a - 10b$

$1 = 3 - 2 \cdot 1$ より $1 = (-2a + 3b) - (7a - 10b)$

$= -9a + 13b$

よって、 $-9a + 13b = 1$ より $36 \cdot (-9) + 25 \cdot 13 = 1$

したがって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x = -9, y = 13$

(2) 87 と 61 に互除法の計算を行う。

$87 = 61 \cdot 1 + 26$ 移項すると $26 = 87 - 61 \cdot 1$
 $61 = 26 \cdot 2 + 9$ 移項すると $9 = 61 - 26 \cdot 2$
 $26 = 9 \cdot 2 + 8$ 移項すると $8 = 26 - 9 \cdot 2$
 $9 = 8 \cdot 1 + 1$ 移項すると $1 = 9 - 8 \cdot 1$

よって $1 = 9 - 8 \cdot 1 = 9 - (26 - 9 \cdot 2) \cdot 1$

$= 9 \cdot 3 + 26 \cdot (-1)$

$= (61 - 26 \cdot 2) \cdot 3 + 26 \cdot (-1)$

$= 61 \cdot 3 + 26 \cdot (-7)$

$= 61 \cdot 3 + (87 - 61 \cdot 1) \cdot (-7)$

$= 87 \cdot (-7) - 61 \cdot (-10)$

すなわち $87 \cdot (-7) - 61 \cdot (-10) = 1$

両辺に 5 を掛けると

$87 \cdot \{5 \cdot (-7)\} - 61 \cdot \{5 \cdot (-10)\} = 5$

すなわち $87 \cdot (-35) - 61 \cdot (-50) = 5$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x = -35, y = -50$

別解 $a = 87, b = 61$ とおく。

$26 = 87 - 61 \cdot 1$ より $26 = a - b$

$9 = 61 - 26 \cdot 2$ より $9 = b - (a - b) \cdot 2$

$= -2a + 3b$

$8 = 26 - 9 \cdot 2$ より $8 = (a - b) - (-2a + 3b) \cdot 2$

$= 5a - 7b$

$1 = 9 - 8 \cdot 1$ より $1 = (-2a + 3b) - (5a - 7b)$

$= -7a + 10b$

よって、 $-7a + 10b = 1$ より $87 \cdot (-7) - 61 \cdot (-10) = 1$

両辺に 5 を掛けると

$87 \cdot \{5 \cdot (-7)\} - 61 \cdot \{5 \cdot (-10)\} = 5$

すなわち $87 \cdot (-35) - 61 \cdot (-50) = 5$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$x = -35, y = -50$