最大公約数•最小公倍数クイズ

$\boxed{1}$ 次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　24，42　　(2)　65，78　　(3)　36，234

(4)　300，450　　(5)　140，525　　(6)　594，792

解答　最大公約数，最小公倍数の順に

(1)　6，168　(2)　13，390　(3)　18，468　(4)　150，900　(5)　35，2100

(6)　198，2376

解説

(1)　$24=2^3\cdot 3$

$42=2\cdot 3\cdot 7$

よって，最大公約数は　$2\cdot 3=6$

最小公倍数は　$2^3\cdot 3\cdot 7=168$

(2)　$65=5\cdot 13$

$78=2\cdot 3\cdot 13$

よって，最大公約数は　13

最小公倍数は　$2\cdot 3\cdot 5\cdot 13=390$

(3)　$36=2^2\cdot 3^2$

$234=2\cdot 3^2\cdot 13$

よって，最大公約数は　$2\cdot 3^2=18$

最小公倍数は　$2^2\cdot 3^2\cdot 13=468$

(4)　$300=2^2\cdot 3\cdot 5^2$

$450=2\cdot 3^2\cdot 5^2$

よって，最大公約数は　$2\cdot 3\cdot 5^2=150$

最小公倍数は　$2^2\cdot 3^2\cdot 5^2=900$

(5)　$140=2^2\cdot 5\cdot 7$

$525=3\cdot 5^2\cdot 7$

よって，最大公約数は　$5\cdot 7=35$

最小公倍数は　$2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7=2100$

(6)　$594=2\cdot 3^3\cdot 11$

$792=2^3\cdot 3^2\cdot 11$

よって，最大公約数は　$2\cdot 3^2\cdot 11=198$

最小公倍数は　$2^3\cdot 3^3\cdot 11=2376$

$\boxed{2}$ 次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　60，126，450　　(2)　108，360，900

(3)　150，225，675　　(4)　198，396，726

解答　最大公約数，最小公倍数の順に

(1)　6，6300　(2)　36，5400　(3)　75，1350　(4)　66，4356

解説

(1)　$60=2^2\cdot 3\cdot 5$

$126=2\cdot 3^2\cdot 7$

$450=2\cdot 3^2\cdot 5^2$

よって，最大公約数は　$2\cdot 3=6$

最小公倍数は　$2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7=6300$

(2)　$108=2^2\cdot 3^3$

$360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$

$900=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$

よって，最大公約数は　$2^2\cdot 3^2=36$

最小公倍数は　$2^3\cdot 3^3\cdot 5^2=5400$

(3)　$150=2\cdot 3\cdot 5^2$

$225=3^2\cdot 5^2$

$675=3^3\cdot 5^2$

よって，最大公約数は　$3\cdot 5^2=75$

最小公倍数は　$2\cdot 3^3\cdot 5^2=1350$

(4)　$198=2\cdot 3^2\cdot 11$

$396=2^2\cdot 3^2\cdot 11$

$726=2\cdot 3\cdot 11^2$

よって，最大公約数は　$2\cdot 3\cdot 11=66$

最小公倍数は　$2^2\cdot 3^2\cdot 11^2=4356$

$\boxed{3}$ n は正の整数とする。次のような n をすべて求めよ。

(1)　n と 36 の最小公倍数が 504　　(2)　n と 48 の最小公倍数が 720

解答　(1)　$n=56$，168，504　(2)　$n=45$，90，180，360，720

解説

(1)　36，504 をそれぞれ素因数分解すると　$36=2^2\cdot 3^2$，　$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$

よって，36 との最小公倍数が 504 である正の整数は

$2^3\cdot 3^a\cdot 7$　　ただし，$a=0$，1，2

と表される。したがって，求める整数 n は　$n=2^3\cdot 3^0\cdot 7$，$2^3\cdot 3^1\cdot 7$，$2^3\cdot 3^2\cdot 7$

すなわち　$n=56$，168，504

(2)　48，720 をそれぞれ素因数分解すると　$48=2^4\cdot 3$，　$720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$

よって，48 との最小公倍数が 720 である正の整数は

$2^a\cdot 3^2\cdot 5$　　ただし，$a=0$，1，2，3，4

と表される。したがって，求める整数 n は

$n=2^0\cdot 3^2\cdot 5$，$2^1\cdot 3^2\cdot 5$，$2^2\cdot 3^2\cdot 5$，$2^3\cdot 3^2\cdot 5$，$2^4\cdot 3^2\cdot 5$

すなわち　$n=45$，90，180，360，720

$\boxed{4}$ 3 つの自然数 40，56，n の最大公約数が 8，最小公倍数が 1400 であるとき，n をすべて求めよ。

解答　$n=200$，1400

解説

40，56，8，1400 をそれぞれ素因数分解すると

$40=2^3\cdot 5$，$56=2^3\cdot 7$，$8=2^3$，$1400=2^3\cdot 5^2\cdot 7$

よって，3 つの自然数 40，56，n の最大公約数が 8，最小公倍数が 1400 である正の整数 n は

$2^3\cdot 5^2\cdot 7^a$　　ただし，$a=0$，1

と表される。

したがって　$n=2^3\cdot 5^2$，$2^3\cdot 5^2\cdot 7$

すなわち　$n=200$，1400

$\boxed{5}$ 次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　最大公約数が 5，最小公倍数が 75　　(2)　最大公約数が 11，最小公倍数が 275

(3)　最大公約数が 12，最小公倍数が 144

解答　(1)　$(a,\ b)=(5,\ 75)$，$(15,\ 25)$　(2)　$(a,\ b)=(11,\ 275)$

(3)　$(a,\ b)=(12,\ 144)$，$(36,\ 48)$

解説

(1)　最大公約数が 5 であるから，a，b は

$a=5a'$，$b=5b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $5a'b'$ と表されるから　$5a'b'=75$

すなわち　$a'b'=15$

$a'b'=15$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 15)$，$(3,\ 5)$

よって　$(a,\ b)=(5,\ 75)$，$(15,\ 25)$

(2)　最大公約数が 11 であるから，a，b は

$a=11a'$，$b=11b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $11a'b'$ と表されるから　$11a'b'=275$

すなわち　$a'b'=25$

$a'b'=25$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 25)$

よって　$(a,\ b)=(11,\ 275)$

(3)　最大公約数が 12 であるから，a，b は

$a=12a'$，$b=12b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $12a'b'$ と表されるから　$12a'b'=144$

すなわち　$a'b'=12$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 12)$，$(3,\ 4)$

よって　$(a,\ b)=(12,\ 144)$，$(36,\ 48)$

$\boxed{6}$ 次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　積が 700，最大公約数が 5　　(2)　和が 280，最大公約数が 14

(3)　積が 300，最小公倍数が 60　　(4)　和が 168，最小公倍数が 1001

解答　(1)　$(a,\ b)=(5,\ 140)$，$(20,\ 35)$

(2)　$(a,\ b)=(14,\ 266)$，$(42,\ 238)$，$(98,\ 182)$，$(126,\ 154)$

(3)　$(a,\ b)=(5,\ 60)$，$(15,\ 20)$　(4)　$(a,\ b)=(77,\ 91)$

解説

(1)　最大公約数が 5 であるから，a，b は

$a=5a'$，$b=5b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a と b の積が 700 であるから　$25a'b'=700$

すなわち　$a'b'=28$

$a'b'=28$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 28)$，$(4,\ 7)$

よって　$(a,\ b)=(5,\ 140)$，$(20,\ 35)$

(2)　最大公約数が 14 であるから，a，b は

$a=14a'$，$b=14b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a と b の和が 280 であるから　$14a'+14b'=280$

すなわち　$a'+b'=20$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 19)$，$(3,\ 17)$，$(7,\ 13)$，$(9,\ 11)$

よって　$(a,\ b)=(14,\ 266)$，$(42,\ 238)$，$(98,\ 182)$，$(126,\ 154)$

(3)　最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a と b の積が 300 であるから　$ga'\cdot gb'=300$

すなわち　$g\cdot ga'b'=300$　……①

最小公倍数が 60 であるから　$ga'b'=60$　……②

② を ① に代入すると　$60g=300$

すなわち　$g=5$

よって，② より　$a'b'=12$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 12),\ (3,\ 4)$

よって　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

(4)　最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a と b の和が 168 であるから　$ga'+gb'=168$

すなわち　$g(a'+b')=2^3\cdot3\cdot7$　……①

最小公倍数が 1001 であるから　$ga'b'=1001$

すなわち　$ga'b'=7\cdot11\cdot13$　……②

①，② の右辺に共通する因数を考えて　$g=1,\ 7$

[1]　$g=1$ のとき

このとき，①，② より　$a'+b'=2^3\cdot3\cdot7=168$

$a'b'=7\cdot11\cdot13=1001$

$a'b'=7\cdot11\cdot13$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 1001),\ (7,\ 143),\ (11,\ 91),\ (13,\ 77)$

この中で $a'+b'=168$ を満たす組は存在しない。

[2]　$g=7$ のとき

このとき，①，② より　$a'+b'=2^3\cdot3=24$

$a'b'=11\cdot13=143$

$a'b'=11\cdot13$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 143),\ (11,\ 13)$

この中で $a'+b'=24$ を満たす組は　$(a',\ b')=(11,\ 13)$

よって　$(a,\ b)=(77,\ 91)$

[1]，[2] より，求める自然数 a，b の組は　$(a,\ b)=(77,\ 91)$

7 次のような条件を満たす自然数 n を求めよ。

(1)　n と 30 の最大公約数が 6，最小公倍数が 120

(2)　n と 180 の最大公約数が 18，最小公倍数が 1260

解答　(1)　$n=24$　　(2)　$n=126$

解説

(1)　2 つの数の積は 2 つの数の最大公約数と最小公倍数の積に等しいから

$n\cdot30=6\cdot120$

よって　$n=24$

(2)　2 つの数の積は 2 つの数の最大公約数と最小公倍数の積に等しいから

$n\cdot180=18\cdot1260$

よって　$n=126$

8 次の (A)，(B)，(C) を満たす 3 つの自然数 a，b，c の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，$a<b<c$ とする。

(A)　a，b，c の最大公約数は 12 である。

(B)　b，c の最大公約数は 36，最小公倍数は 1620 である。

(C)　a，b の最小公倍数は 720 である。

解答　$(a,\ b,\ c)=(48,\ 180,\ 324)$

解説

(B) より，b，c の最大公約数が 36 であるから，b，c は

$b=36b'$，$c=36c'$

と表される。ただし，b'，c' は互いに素である自然数で，$b'<c'$ である。

このとき，b，c の最小公倍数は $36b'c'$ と表されるから

$36b'c'=1620$　　すなわち　$b'c'=45$

$b'c'=45$，$b'<c'$ を満たし，互いに素である自然数 b'，c' の組は

$(b',\ c')=(1,\ 45),\ (5,\ 9)$

よって　$(b,\ c)=(36,\ 1620),\ (180,\ 324)$

[1]　$(b,\ c)=(36,\ 1620)$ のとき

$b=2^2\cdot3^2$，$c=2^2\cdot3^4\cdot5$

また　$720=2^4\cdot3^2\cdot5$

(C) より，a，b の最小公倍数は 720 であるから，a は

$a=2^4\cdot3^k\cdot5$ (ただし，$k=0,\ 1,\ 2$)

と表される。

このとき，$a\geqq80$ であるから，$a<b$ を満たさない。

[2]　$(b,\ c)=(180,\ 324)$ のとき

$b=2^2\cdot3^2\cdot5$，$c=2^2\cdot3^4$

(C) より，a，b の最小公倍数は 720 であるから，a は

$a=2^4\cdot3^k\cdot5^l$ (ただし，$k=0,\ 1,\ 2$；$l=0,\ 1$)

と表される。

また，(A) より，a は $12=2^2\cdot3$ を約数にもつ。

したがって　$k\geqq1$

このような a のうち，$a<b$ を満たすものは

$a=2^4\cdot3=48$，$a=2^4\cdot3^2=144$

$a=48$ のとき，a，b，c の最大公約数は $2^2\cdot3=12$ となり，(A) を満たす。

$a=144$ のとき，a，b，c の最大公約数は $2^2\cdot3^2=36$ となり，(A) を満たさない。

以上から　$(a,\ b,\ c)=(48,\ 180,\ 324)$

9 縦 270 cm，横 396 cm の長方形の床に，1 辺の長さ a cm の正方形のタイルをすき間なく敷き詰めたい。タイルをできるだけ大きくするには，a の値をいくらにすればよいか。また，そのときタイルは何枚必要か。ただし，a は整数とする。

解答　$a=18$，タイルの枚数は 330 枚

解説

$270=a\cdot$(縦に並ぶ枚数)，$396=a\cdot$(横に並ぶ枚数)

となるから，a は 270 と 396 の公約数である。

したがって，タイルをできるだけ大きくするには，1 辺の長さ a を 270 と 396 の最大公約数にすればよい。

$270=2\cdot3^3\cdot5$，$396=2^2\cdot3^2\cdot11$ であるから，270 と 396 の最大公約数は　$2\cdot3^2=18$

よって　$a=18$

また，タイルの枚数は　$(270\div18)\times(396\div18)=15\times22=330$ (枚)

10 みかんが 435 個，りんごが 268 個ある。何人かの子どもに，みかんもりんごも平等に，できるだけ多く配ったところ，みかんは 45 個，りんごは 34 個余った。子どもの人数を求めよ。

解答　78 人

解説

子どもに配ったみかんとりんごの個数は，それぞれ $435-45=390$ (個)，

$268-34=234$ (個) である。

よって，子どもの人数は，390 と 234 の公約数のうち，45 より大きい数である。

$390=2\cdot3\cdot5\cdot13$，$234=2\cdot3^2\cdot13$ であるから，390 と 234 の最大公約数は　$2\cdot3\cdot13=78$

78 の約数のうち，45 より大きい数は，78 のみである。

したがって，求める子どもの人数は　78 人

11 縦 9 cm，横 10 cm，高さ 6 cmの直方体の箱を，同じ向きに並べたり積み上げたりして立方体を作る。このとき，作ることのできる立方体のうち，最も小さい立方体の 1 辺の長さを求めよ。

解答　90 cm

解説

立方体の 1 辺の長さを a cm とすると，a は直方体の縦，横，高さの公倍数である。

よって，最も小さい立方体の 1 辺の長さは，9，10，6 の最小公倍数である。

$9=3^2$，$10=2\cdot5$，$6=2\cdot3$

であるから，9，10，6 の最小公倍数は　$2\cdot3^2\cdot5=90$

したがって，最も小さい立方体の 1 辺の長さは　90 cm

12 (1)　n は自然数で，$\dfrac{n}{20}$，$\dfrac{n}{42}$ がともに自然数となるという。このような n のうちで最も小さいものを求めよ。

(2)　$\dfrac{42}{5}$，$\dfrac{21}{10}$，$\dfrac{35}{16}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

解答　(1)　$n=420$　　(2)　$\dfrac{80}{7}$

解説

(1)　$\dfrac{n}{20}$，$\dfrac{n}{42}$ がともに自然数となるから，n は 20 の倍数かつ 42 の倍数である。

このような n のうちで，最小のものは，20 と 42 の最小公倍数，すなわち 420 である。

よって　$n=420$

(2)　求める分数を $\dfrac{a}{b}$ (a，b は互いに素である自然数) とする。

$\dfrac{42}{5}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 5 の倍数，b は 42 の約数　……①

$\dfrac{21}{10}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 10 の倍数，b は 21 の約数　……②

$\dfrac{35}{16}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 16 の倍数，b は 35 の約数　……③

求める分数 $\dfrac{a}{b}$ を最小にするには，a を最小にし，b を最大にするとよい。

よって，①，②，③ から

a は 5 と 10 と 16 の最小公倍数，b は 42 と 21 と 35 の最大公約数

とすればよい。

したがって　$a=80$，$b=7$

よって，求める分数は　$\dfrac{80}{7}$

13 縦 120 cm，横 132 cm の長方形の床に，1 辺の長さ a cm の正方形のタイルをすき間なく敷き詰めたい。タイルをできるだけ大きくするには，a の値をいくらにすればよいか。ただし，a は整数とする。

解答　$a=12$

解説

$120=a\cdot$(縦に並ぶ枚数)，$132=a\cdot$(横に並ぶ枚数) となるから，a は 120 と 132 の公約数である。

したがって，タイルをできるだけ大きくするには，1 辺の長さ a を 120 と 132 の最大公約数にすればよい。

$120=2^3\cdot3\cdot5$，$132=2^2\cdot3\cdot11$ であるから，120 と 132 の最大公約数は　$2^2\cdot3=12$

よって　$a=12$

14 705，1453，4785 のいずれを割っても，余りが 25 となる自然数のうち，最大のものを求めよ。

解答 68

解説

$705-25=680$，$1453-25=1428$，$4785-25=4760$

よって，680，1428，4760 の最大公約数が求める自然数である。

3 つの数をそれぞれ素因数分解すると

$680=2^3\cdot5\cdot17$，$1428=2^2\cdot3\cdot7\cdot17$，$4760=2^3\cdot5\cdot7\cdot17$

これらの最大公約数，すなわち求める自然数は　$2^2\cdot17=68$

15 次の 2 つの整数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) 30，45　(2) 91，130　(3) 72，132

(4) 252，378　(5) 140，525　(6) 612，918

解答 最大公約数，最小公倍数の順に

(1) 15，90　(2) 13，910　(3) 12，792　(4) 126，756　(5) 35，2100　(6) 306，1836

解説

(1) $30=2\cdot3\cdot5$

$45=3^2\cdot5$

よって，最大公約数は　$3\cdot5=15$

最小公倍数は　$2\cdot3^2\cdot5=90$

(2) $91=7\cdot13$

$130=2\cdot5\cdot13$

よって，最大公約数は　13

最小公倍数は　$2\cdot5\cdot7\cdot13=910$

(3) $72=2^3\cdot3^2$

$132=2^2\cdot3\cdot11$

よって，最大公約数は　$2^2\cdot3=12$

最小公倍数は　$2^3\cdot3^2\cdot11=792$

(4) $252=2^2\cdot3^2\cdot7$

$378=2\cdot3^3\cdot7$

よって，最大公約数は　$2\cdot3^2\cdot7=126$

最小公倍数は　$2^2\cdot3^3\cdot7=756$

(5) $140=2^2\cdot5\cdot7$

$525=3\cdot5^2\cdot7$

よって，最大公約数は　$5\cdot7=35$

最小公倍数は　$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot7=2100$

(6) $612=2^2\cdot3^2\cdot17$

$918=2\cdot3^3\cdot17$

よって，最大公約数は　$2\cdot3^2\cdot17=306$

最小公倍数は　$2^2\cdot3^3\cdot17=1836$

16 次の 3 つの整数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) 60，84，90　(2) 180，225，360

(3) 490，630，882　(4) 198，396，726

解答 最大公約数，最小公倍数の順に

(1) 6，1260　(2) 45，1800　(3) 14，4410　(4) 66，4356

解説

(1) $60=2^2\cdot3\cdot5$

$84=2^2\cdot3\cdot7$

$90=2\cdot3^2\cdot5$

よって，最大公約数は　$2\cdot3=6$

最小公倍数は　$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7=1260$

(2) $180=2^2\cdot3^2\cdot5$

$225=3^2\cdot5^2$

$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

よって，最大公約数は　$3^2\cdot5=45$

最小公倍数は　$2^3\cdot3^2\cdot5^2=1800$

(3) $490=2\cdot5\cdot7^2$

$630=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$

$882=2\cdot3^2\cdot7^2$

よって，最大公約数は　$2\cdot7=14$

最小公倍数は　$2\cdot3^2\cdot5\cdot7^2=4410$

(4) $198=2\cdot3^2\cdot11$

$396=2^2\cdot3^2\cdot11$

$726=2\cdot3\cdot11^2$

よって，最大公約数は　$2\cdot3\cdot11=66$

最小公倍数は　$2^2\cdot3^2\cdot11^2=4356$

17 n は正の整数とする。次のような n をすべて求めよ。

(1) n と 36 の最小公倍数が 360　(2) n と 40 の最小公倍数が 1400

解答 (1) $n=40$，120，360　(2) $n=175$，350，700，1400

解説

(1) 36 と 360 を素因数分解すると

$36=2^2\cdot3^2$，$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

よって，36 との最小公倍数が 360 である正の整数は

$2^3\cdot3^a\cdot5$　($a=0$，1，2)

と表される。

したがって，求める整数 n は　$n=2^3\cdot3^0\cdot5$，$2^3\cdot3^1\cdot5$，$2^3\cdot3^2\cdot5$

すなわち　$n=40$，120，360

(2) 40 と 1400 を素因数分解すると

$40=2^3\cdot5$，$1400=2^3\cdot5^2\cdot7$

よって，40 との最小公倍数が 1400 である正の整数は

$2^a\cdot5^2\cdot7$　($a=0$，1，2，3)

と表される。

したがって，求める整数 n は　$n=2^0\cdot5^2\cdot7$，$2^1\cdot5^2\cdot7$，$2^2\cdot5^2\cdot7$，$2^3\cdot5^2\cdot7$

すなわち　$n=175$，350，700，1400

18 縦 378 cm，横 468 cm の長方形の床に，1 辺の長さ a cm の正方形のタイルを何枚か敷き詰めて，すき間がないようにしたい。タイルをできるだけ大きくするには，a の値をいくらにすればよいか。また，そのときタイルは何枚必要か。ただし，a は整数とする。

解答 $a=18$，タイルの枚数は 546 枚

解説

$378=a\times$(縦に並ぶ枚数)，

$468=a\times$(横に並ぶ枚数)

となるから，a は 378 と 468 の公約数である。

したがって，タイルをできるだけ大きくするには，1 辺の長さ a を 378 と 468 の最大公約数にすればよい。

$378=2\cdot3^3\cdot7$，$468=2^2\cdot3^2\cdot13$ であるから，378 と 468 の最大公約数は

$2\cdot3^2=18$

よって　$a=18$

また，タイルの枚数は

$(378\div18)\times(468\div18)=21\times26=546$ (枚)

19 縦 45 cm，横 75 cmの長方形の板を，同じ向きに並べて正方形を埋め尽くすことにする。このとき，埋め尽くすことのできる正方形のうち，最も小さい正方形の 1 辺の長さを求めよ。また，そのときに使われる板の枚数を求めよ。

解答 1 辺の長さ 225 cm，板の枚数は 15 枚

解説

正方形の 1 辺の長さは，45 と 75 の公倍数であるから，最も小さい正方形の 1 辺の長さは，45 と 75 の最小公倍数である。

$45=3^2\cdot5$，$75=3\cdot5^2$

であるから，45 と 75 の最小公倍数は　$3^2\cdot5^2=225$

よって，求める正方形の 1 辺の長さは　225 cm

また，そのときに使われる板の枚数は　$5\times3=15$ (枚)

20 3 つの自然数 45，63，n の最大公約数が 9，最小公倍数が 3150 であるとき，n を求めよ。

解答 $n=450$，3150

解説

$45=3^2\cdot5$，$63=3^2\cdot7$

3 つの自然数 45，63，n の最大公約数が $9=3^2$，最小公倍数が $3150=2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$ であるから　$n=2\cdot3^2\cdot5^2$　または　$2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$

よって　$n=450$，3150

21 $\dfrac{15}{22}$，$\dfrac{20}{33}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

解答 $\dfrac{66}{5}$

解説

求める分数を $\dfrac{a}{b}$ (a，b は互いに素である自然数) とする。

$\dfrac{15}{22}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 22 の倍数，b は 15 の約数　…… ①

$\dfrac{20}{33}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 33 の倍数，b は 20 の約数　…… ②

求める分数 $\dfrac{a}{b}$ を最小にするには，a を最小にし，b を最大にするとよい。

よって，①，② から

a は 22 と 33 の最小公倍数，b は 15 と 20 の最大公約数

とすればよい。

したがって　$a=66$，$b=5$

よって，求める分数は　$\dfrac{66}{5}$

22 次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1) 和が 320，最大公約数が 16　(2) 積が 720，最大公約数が 6

解答 (1) $(a, b)=(16, 304)$，$(48, 272)$，$(112, 208)$，$(144, 176)$

(2)　$(a,\ b)=(6,\ 120),\ (24,\ 30)$

解説

(1)　最大公約数が 16 であるから，a，b は

$a=16a'$，$b=16b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の和が 320 であるから　　$16a'+16b'=320$

すなわち　　$a'+b'=20$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 19),\ (3,\ 17),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$

よって　　$(a,\ b)=(16,\ 304),\ (48,\ 272),\ (112,\ 208),\ (144,\ 176)$

(2)　最大公約数が 6 であるから，a，b は

$a=6a'$，$b=6b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積が 720 であるから　　$36a'b'=720$

すなわち　　$a'b'=20$

$a'b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 20),\ (4,\ 5)$

よって　　$(a,\ b)=(6,\ 120),\ (24,\ 30)$

23 次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　最大公約数が 18，最小公倍数が 270　　(2)　最大公約数が 25，最小公倍数が 900

解答　(1)　$(a,\ b)=(18,\ 270),\ (54,\ 90)$　　(2)　$(a,\ b)=(25,\ 900),\ (100,\ 225)$

解説

(1)　最大公約数が 18 であるから，a，b は

$a=18a'$，$b=18b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $18a'b'$ と表されるから

$18a'b'=270$

すなわち　　$a'b'=15$

$a'b'=15$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$

よって　　$(a,\ b)=(18,\ 270),\ (54,\ 90)$

(2)　最大公約数が 25 であるから，a，b は

$a=25a'$，$b=25b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $25a'b'$ と表されるから

$25a'b'=900$

すなわち　　$a'b'=36$

$a'b'=36$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 36),\ (4,\ 9)$

よって　　$(a,\ b)=(25,\ 900),\ (100,\ 225)$

24 n と 90 の最大公約数が 6，最小公倍数が 1260 となるような自然数 n を求めよ。

解答　$n=84$

解説

2 つの数の積は 2 つの数の最大公約数と最小公倍数の積に等しいから

$n\times 90=6\times 1260$

よって　　$n=84$

別解　$90=6\times 3\times 5$，$1260=6\times 3\times 5\times 14$ で，90 と n の最大公約数が 6 であるから

$n=6\times 14=84$

25 積が 735，最小公倍数が 105 である 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

解答　$(a,\ b)=(7,\ 105),\ (21,\ 35)$

解説

最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積と最大公約数，最小公倍数の積は等しいから

$735=g\cdot 105$

ゆえに　　$g=7$

最小公倍数が 105 であるから　　$ga'b'=105$

すなわち　　$7a'b'=105$

よって　　$a'b'=15$

$a'b'=15$，$a'<b'$を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$

よって　　$(a,\ b)=(7,\ 105),\ (21,\ 35)$

別解　a，b の積が 735 であるから　　$ga'\cdot gb'=735$　……①

最小公倍数が 105 であるから　　$ga'b'=105$　……②

①÷② から　　$g=7$　　② より　　$a'b'=15$

(以下同様)

26 縦 120 cm，横 132 cm の長方形の床に，1 辺の長さ a cm の正方形のタイルを何枚か敷き詰めて，すき間がないようにしたい。タイルをできるだけ大きくするには，a の値をいくらにすればよいか。ただし，a は整数とする。

解答　$a=12$

解説

$120=a\times$(縦に並ぶ枚数)，$132=a\times$(横に並ぶ枚数) となるから，a は 120 と 132 の公約数である。

したがって，タイルをできるだけ大きくするには，1 辺の長さ a を 120 と 132 の最大公約数にすればよい。

$120=2^3\cdot 3\cdot 5$，$132=2^2\cdot 3\cdot 11$ であるから，120 と 132 の最大公約数は

$2^2\cdot 3=12$

よって　　$a=12$

27 和が 210，最大公約数が 14 である 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

解答　$(a,\ b)=(14,\ 196),\ (28,\ 182),\ (56,\ 154),\ (98,\ 112)$

解説

最大公約数が 14 であるから，a，b は

$a=14a'$，$b=14b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の和が 210 であるから　　$14a'+14b'=210$

すなわち　　$a'+b'=15$

$a'+b'=15$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 14),\ (2,\ 13),\ (4,\ 11),\ (7,\ 8)$

よって，$a=14a'$，$b=14b'$ から

$(a,\ b)=(14,\ 196),\ (28,\ 182),\ (56,\ 154),\ (98,\ 112)$

28 次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　168，252　　(2)　84，126，630

解答　(1)　最大公約数 84，最小公倍数 504　　(2)　最大公約数 42，最小公倍数 1260

解説

(1)　$168=2^3\cdot 3\cdot 7$

$252=2^2\cdot 3^2\cdot 7$

最大公約数は　　$2^2\cdot 3\cdot 7=84$

最小公倍数は　　$2^3\cdot 3^2\cdot 7=504$

(2)　$84=2^2\cdot 3\cdot 7$

$126=2\cdot 3^2\cdot 7$

$630=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

最大公約数は　　$2\cdot 3\cdot 7=42$

最小公倍数は　　$2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=1260$

29 次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　36，378　　(2)　462，1155

(3)　60，135，195　　(4)　180，336，4410

解答　最大公約数，最小公倍数の順に

(1)　18，756　　(2)　231，2310　　(3)　15，7020　　(4)　6，35280

解説

(1)　$36=2^2\cdot 3^2$

$378=2\cdot 3^3\cdot 7$

最大公約数は　　$2\cdot 3^2=18$

最小公倍数は　　$2^2\cdot 3^3\cdot 7=756$

(2)　$462=2\cdot 3\cdot 7\cdot 11$

$1155=3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$

最大公約数は　　$3\cdot 7\cdot 11=231$

最小公倍数は　　$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=2310$

(3)　$60=2^2\cdot 3\cdot 5$

$135=3^3\cdot 5$

$195=3\cdot 5\cdot 13$

最大公約数は　　$3\cdot 5=15$

最小公倍数は　　$2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 13=7020$

(4)　$180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$

$336=2^4\cdot 3\cdot 7$

$4410=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2$

最大公約数は　　$2\cdot 3=6$

最小公倍数は　　$2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2=35280$

30 次の条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　和が 192，最大公約数が 16　　(2)　積が 375，最小公倍数が 75

解答　(1)　$(a,\ b)=(16,\ 176),\ (80,\ 112)$　　(2)　$(a,\ b)=(5,\ 75),\ (15,\ 25)$

解説

(1)　最大公約数が 16 であるから，a，b は

$a=16a'$，$b=16b'$　　と表される。

ただし，a'，b' は互いに素な自然数で　　$a'<b'$

和が 192 であるから　　$16a'+16b'=192$　すなわち　$a'+b'=12$　……①

① を満たす，互いに素である自然数 a'，b' $(a'<b')$ の組は

$(a',\ b')=(1,\ 11),\ (5,\ 7)$

したがって　　$(a,\ b)=(16,\ 176),\ (80,\ 112)$

(2)　最大公約数を g とすると，積が 375，最小公倍数が 75 であるから

$375=g\cdot 75$　　ゆえに　　$g=5$

よって，$a=5a'$，$b=5b'$ と表される。

ただし，a'，b' は互いに素な自然数で　$a'<b'$

ここで，$75=5a'b'$ が成り立つから　$a'b'=15$　…… ②

② を満たす，互いに素である自然数 a'，b' $(a'<b')$ の組は

$$(a',\ b')=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$$

したがって　$(a,\ b)=(5,\ 75),\ (15,\ 25)$

31 次の条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　和が 175，最大公約数が 35　　(2)　積が 384，最大公約数が 8

(3)　最大公約数が 8，最小公倍数が 240

解答　(1)　$(a,\ b)=(35,\ 140),\ (70,\ 105)$　(2)　$(a,\ b)=(8,\ 48),\ (16,\ 24)$

(3)　$(a,\ b)=(8,\ 240),\ (16,\ 120),\ (24,\ 80),\ (40,\ 48)$

解説

(1)　最大公約数が 35 であるから，$a=35a'$，$b=35b'$ と表される。

ただし，a'，b' は互いに素な自然数で　$a'<b'$　…… ①

和が 175 であるから　$35a'+35b'=175$

すなわち　$a'+b'=5$　…… ②

①，② を満たす a'，b' の組は　$(a',\ b')=(1,\ 4),\ (2,\ 3)$

よって　$(a,\ b)=(35,\ 140),\ (70,\ 105)$

(2)　最大公約数が 8 であるから，$a=8a'$，$b=8b'$ と表される。

ただし，a'，b' は互いに素な自然数で　$a'<b'$　…… ①

積が 384 であるから　$8a'\cdot 8b'=384$

すなわち　$a'b'=6$　…… ②

①，② を満たす a'，b' の組は　$(a',\ b')=(1,\ 6),\ (2,\ 3)$

よって　$(a,\ b)=(8,\ 48),\ (16,\ 24)$

(3)　最大公約数が 8 であるから，$a=8a'$，$b=8b'$ と表される。

ただし，a'，b' は互いに素な自然数で　$a'<b'$　…… ①

このとき，a，b の最小公倍数は $8a'b'$ であるから

$8a'b'=240$　すなわち　$a'b'=30$　…… ②

①，② を満たす a'，b' の組は

$$(a',\ b')=(1,\ 30),\ (2,\ 15),\ (3,\ 10),\ (5,\ 6)$$

よって　$(a,\ b)=(8,\ 240),\ (16,\ 120),\ (24,\ 80),\ (40,\ 48)$

32 次の (A)，(B)，(C) を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，$a<b<c$ とする。

(A)　a，b，c の最大公約数は 6

(B)　b と c の最大公約数は 24，最小公倍数は 144

(C)　a と b の最小公倍数は 240

解答　$(a,\ b,\ c)=(30,\ 48,\ 72)$

解説

(B) の前半の条件から，$b=24b'$，$c=24c'$ と表される。

ただし，b'，c' は互いに素な自然数で　$b'<c'$　…… ①

(B) の後半の条件から　$24b'c'=144$　すなわち　$b'c'=6$

これと ① を満たす b'，c' の組は　$(b',\ c')=(1,\ 6),\ (2,\ 3)$

ゆえに　$(b,\ c)=(24,\ 144),\ (48,\ 72)$

(A) から，a は 2 と 3 を素因数にもつ。

また，(C) において　$240=2^4\cdot 3\cdot 5$

[1]　$b=24$ $(=2^3\cdot 3)$ のとき，a と 24 の最小公倍数が 240 であるような a は

$$a=2^4\cdot 3\cdot 5$$

これは，$a<b$ を満たさない。

[2]　$b=48$ $(=2^4\cdot 3)$ のとき，a と 48 の最小公倍数が 240 であるような a は

$$a=2^p\cdot 3\cdot 5　ただし　p=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$a<48$ を満たすのは $p=1$ の場合で，このとき　$a=30$

30，48，72 の最大公約数は 6 で，(A) を満たす。

以上から　$(a,\ b,\ c)=(30,\ 48,\ 72)$

33 次の (A)，(B)，(C) を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，$a<b<c$ とする。

(A)　a，b，c の最大公約数は 7

(B)　b と c の最大公約数は 21，最小公倍数は 294

(C)　a と b の最小公倍数は 84

解答　$(a,\ b,\ c)=(28,\ 42,\ 147)$

解説

(B) の前半の条件から，$b=21b'$，$c=21c'$ と表される。

ただし，b'，c' は互いに素な自然数で　$b'<c'$　…… ①

(B) の後半の条件から　$21b'c'=294$　すなわち　$b'c'=14$

これと ① を満たす b'，c' の組は　$(b',\ c')=(1,\ 14),\ (2,\ 7)$

ゆえに　$(b,\ c)=(21,\ 294),\ (42,\ 147)$

(A) から，a は 7 を素因数にもち，(C) から　$84=2^2\cdot 3\cdot 7$

[1]　$b=21$ $(=3\cdot 7)$ のとき，a と 21 の最小公倍数が 84 であるような a は

$$a=2^2\cdot 3^p\cdot 7=28\cdot 3^p　ただし　p=0,\ 1$$

$a\geqq 28$ となるから，これは $a<b$ を満たさない。

[2]　$b=42$ $(=2\cdot 3\cdot 7)$ のとき，a と 42 の最小公倍数が 84 であるような a は

$$a=2^2\cdot 3^p\cdot 7　ただし　p=0,\ 1$$

$a<42$ を満たすのは $p=0$ の場合で，このとき　$a=28$

28，42，147 の最大公約数は 7 で，(A) を満たす。

以上から　$(a,\ b,\ c)=(28,\ 42,\ 147)$