倍数と約数クイズ

1 次の数が9の倍数であるとき，□に入る数(0～9)をすべて求めよ。

(1) 6945□　(2) 312□7　(3) 78□75　(4) 8□5845

解答　(1) 3　(2) 5　(3) 0，9　(4) 6

解説

□に入る数を a $(0\leqq a\leqq 9)$ とする。

(1) $6+9+4+5+a=24+a$ が9の倍数であるとき，この自然数は9の倍数になる。
$24+a$ が9の倍数になるのは，$a=3$ のときである。
よって，求める数は　3

(2) $3+1+2+a+7=13+a$ が9の倍数であるとき，この自然数は9の倍数になる。
$13+a$ が9の倍数になるのは，$a=5$ のときである。
よって，求める数は　5

(3) $7+8+a+7+5=27+a$ が9の倍数であるとき，この自然数は9の倍数になる。
$27+a$ が9の倍数になるのは，$a=0$，9 のときである。
よって，求める数は　0，9

(4) $8+a+5+8+4+5=30+a$ が9の倍数であるとき，この自然数は9の倍数になる。
$30+a$ が9の倍数になるのは，$a=6$ のときである。
よって，求める数は　6

2 次の5桁の数が9の倍数であるとき，□に入る数を求めよ。

(1) 7123□　(2) 486□1　(3) 58□77

解答　(1) 5　(2) 8　(3) 0，9

解説

□に入る数を a $(0\leqq a\leqq 9)$ とする。

(1) $7+1+2+3+a=13+a$ が9の倍数であるとき，この自然数は9の倍数になる。
$13+a$ が9の倍数になるのは，$a=5$ のときである。
よって，求める数は　5

(2) $4+8+6+a+1=19+a$ が9の倍数であるとき，この自然数は9の倍数になる。
$19+a$ が9の倍数になるのは，$a=8$ のときである。
よって，求める数は　8

(3) $5+8+a+7+7=27+a$ が9の倍数であるとき，この自然数は9の倍数になる。
$27+a$ が9の倍数になるのは，$a=0$，9 のときである。
よって，求める数は　0，9

3 (1) 4桁の自然数 58□7 が3の倍数であるとき，□に入る数をすべて求めよ。

(2) 4桁の自然数 257□ が4の倍数であるとき，□に入る数をすべて求めよ。

(3) 5桁の自然数 7□4□5 の□に，それぞれ適当な数を入れると，3の倍数になる。
このような自然数で最大のものを求めよ。

(4) 5桁の自然数 43□8□ の□に，それぞれ適当な数を入れると，9の倍数になる。
このような自然数で最大のものを求めよ。

解答　(1) 1，4，7　(2) 2，6　(3) 79485　(4) 43983

解説

(1) □に入る数を a $(0\leqq a\leqq 9)$ とする。
$5+8+a+7=20+a$ が3の倍数であるとき，4桁の自然数は3の倍数になる。
$20+a$ が3の倍数になるのは，$a=1$，4，7 のときである。
よって，求める数は　1，4，7

(2) □に入る数を a $(0\leqq a\leqq 9)$ とする。
下2桁が4の倍数であるとき，4桁の自然数は4の倍数になる。
下2桁が4の倍数になるのは，$a=2$，6 のときである。
よって，求める数は　2，6

(3) □に入る数を大きい位から順に a，b $(0\leqq a\leqq 9,\ 0\leqq b\leqq 9)$ とする。
$7+a+4+b+5=a+b+16$ が3の倍数であるとき，5桁の自然数は3の倍数になる。
$a+b+16$ が3の倍数になり，5桁の自然数が最大となるのは $a=9$，$b=8$ のときである。よって，求める自然数は　79485

(4) □に入る数を大きい位から順に a，b $(0\leqq a\leqq 9,\ 0\leqq b\leqq 9)$ とする。
$4+3+a+8+b=a+b+15$ が9の倍数であるとき，5桁の自然数は9の倍数になる。
$a+b+15$ が9の倍数になり，5桁の自然数が最大となるのは $a=9$，$b=3$ のときである。よって，求める自然数は　43983

4 (1) 4桁の自然数 42□5 が3の倍数であるとき，□に入る数をすべて求めよ。

(2) 4桁の自然数 835□ が4の倍数であるとき，□に入る数をすべて求めよ。

(3) 5桁の自然数 6□7□4 の□に，それぞれ適当な数を入れると，3の倍数になる。
このような自然数で最大のものを求めよ。

(4) 5桁の自然数 76□8□ の□に，それぞれ適当な数を入れると，9の倍数になる。
このような自然数で最大のものを求めよ。

解答　(1) 1，4，7　(2) 2，6　(3) 69774　(4) 76986

解説

(1) □に入る数を a $(0\leqq a\leqq 9)$ とする。
$4+2+a+5=11+a$ が3の倍数であるとき，4桁の自然数は3の倍数になる。
$11+a$ が3の倍数になるのは，$a=1$，4，7 のときである。
よって，求める数は　1，4，7

(2) □に入る数を a $(0\leqq a\leqq 9)$ とする。
下2桁が4の倍数であるとき，4桁の自然数は4の倍数になる。
下2桁すなわち $50+a$ が4の倍数になるのは，$a=2$，6 のときである。
よって，求める数は　2，6

(3) □に入る数を大きい位から a，b $(0\leqq a\leqq 9,\ 0\leqq b\leqq 9)$ とする。
$6+a+7+b+4=a+b+17$ が3の倍数であるとき，5桁の自然数は3の倍数になる。
$a+b+17$ が3の倍数になり，5桁の自然数が最大となるのは $a=9$，$b=7$ のときである。
よって，求める自然数は　69774

(4) □に入る数を大きい位から a，b $(0\leqq a\leqq 9,\ 0\leqq b\leqq 9)$ とする。
$7+6+a+8+b=a+b+21$ が9の倍数であるとき，5桁の自然数は9の倍数になる。
$a+b+21$ が9の倍数になり，5桁の自然数が最大となるのは $a=9$，$b=6$ のときである。
よって，求める自然数は　76986

5 一の位の数がわからない5桁の自然数 4183□ が，5の倍数であり，3の倍数でもあるとき，一の位の数を求めよ。

解答　5

解説

□に入る数を a $(0\leqq a\leqq 9)$ とする。
4183□ が5の倍数であるから　$a=0$，5　……①
各位の数の和は　$4+1+8+3+a=16+a$
これが3の倍数であるとき，4183□ は3の倍数になる。
$16+a$ が3の倍数になるのは，① のうち $a=5$ のときである。
よって，求める数は　5

6 (1) 5桁の自然数 342□8 が4の倍数であるとき，□に入る数をすべて求めよ。[10 点]

(2) 6桁の自然数 625□78 が9の倍数であるとき，□に入る数を求めよ。[10 点]

解答　(1) 下2桁の□8が4の倍数になればよいから，□に入る数は　0，2，4，6，8
(2) $6+2+5+7+8+\square=28+\square$ が9の倍数になるから　8

解説

(1) 下2桁の□8が4の倍数になればよいから，□に入る数は　0，2，4，6，8

(2) $6+2+5+7+8+\square=28+\square$ が9の倍数になるから　8

7 4桁の自然数 716□ が3の倍数であり，4の倍数でもあるとき，□に入る数を求めよ。

解答　4

解説

□に入る数を a $(0\leqq a\leqq 9)$ とする。
与えられた自然数が3の倍数になるのは，各位の数の和が3の倍数になるときである。
また，4の倍数になるのは，下2桁が4の倍数になるときである。
各位の数の和は　$7+1+6+a=14+a$
これが3の倍数になるのは　$a=1$，4，7
各場合について，下2桁が4の倍数になるかを調べると
$a=1$ のとき，61で4の倍数でない。
$a=4$ のとき，64で4の倍数である。
$a=7$ のとき，67で4の倍数でない。
よって，□に入る数は　4

8 一の位の数がわからない5桁の自然数 3817□ が，5の倍数であり，3の倍数でもあるとき，一の位の数を求めよ。

解答　5

解説

□に入る数字を a $(0\leqq a\leqq 9)$ とする。
3817□ が5の倍数であるから　$a=0$，5
各位の数の和は　$3+8+1+7+a=19+a$
これが3の倍数であるとき，3817□ は3の倍数になる。
$19+a$ が3の倍数になるのは，$a=5$ のときである。
よって，求める数は　5

9 ある2桁の正の整数を9倍して81を足すと，百の位は5，十の位は7であるとき，もとの整数を求めよ。

解答　55

解説

ある2桁の正の整数を x とすると，x を9倍して81を足した数は
$$9x+81=9(x+9)$$
この数は9の倍数であり，各位の数の和は9の倍数になる。
よって，その一の位の数を c とすると，$5+7+c=12+c$ が9の倍数より
$$c=6$$
したがって　$9(x+9)=576$
これを解いて　$x=55$
よって，求める整数は　55

10 ある2桁の整数を9倍して18を引くと3桁の整数となり，百の位は7，一の位は5である。もとの整数を求めよ。[20点]

解答　ある2桁の整数を x とする。
x を9倍して18引いた数は，$9x-18=9(x-2)$ より9の倍数であるから，各位の

数の和は 9 の倍数になる。

よって，その十の位を b $(0\leqq b\leqq 9)$ とすると　$7+b+5=b+12$

$b+12$ が 9 の倍数になるのは，$b=6$ のときである。

したがって　$9(x-2)=765$

これを解いて　$x=87$

よって，求める整数は　87

解説

ある 2 桁の整数を x とする。

x を 9 倍して 18 引いた数は，$9x-18=9(x-2)$ より 9 の倍数であるから，各位の数の和は 9 の倍数になる。

よって，その十の位を b $(0\leqq b\leqq 9)$ とすると　$7+b+5=b+12$

$b+12$ が 9 の倍数になるのは，$b=6$ のときである。

したがって　$9(x-2)=765$

これを解いて　$x=87$

よって，求める整数は　87

11 次の数が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(1) $\sqrt{156n}$　　(2) $\sqrt{360n}$　　(3) $\sqrt{1512n}$

解答　(1) $n=39$　(2) $n=10$　(3) $n=42$

解説

(1) $\sqrt{156n}$ が自然数になるのは，$156n$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$156n$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

156 を素因数分解すると　$156=2^2\cdot 3\cdot 13$

よって，求める最小の自然数 n は　$n=3\cdot 13=39$

(2) $\sqrt{360n}$ が自然数になるのは，$360n$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$360n$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

360 を素因数分解すると　$360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$

よって，求める最小の自然数 n は　$n=2\cdot 5=10$

(3) $\sqrt{1512n}$ が自然数になるのは，$1512n$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$1512n$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

1512 を素因数分解すると　$1512=2^3\cdot 3^3\cdot 7$

よって，求める最小の自然数 n は　$n=2\cdot 3\cdot 7=42$

12 $\sqrt{480n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

解答　$n=30$

解説

$\sqrt{480n}$ が自然数になるのは，$480n$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$480n$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

480 を素因数分解すると　$480=2^5\cdot 3\cdot 5$

よって，求める最小の自然数 n は　$n=2\cdot 3\cdot 5=30$

13 次の数が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{280}{n}}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{756}{n}}$

解答　(1) $n=70$　(2) $n=21$

解説

(1) $\sqrt{\dfrac{280}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{280}{n}$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$\dfrac{280}{n}$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

280 を素因数分解すると　$280=2^3\cdot 5\cdot 7$

よって，求める最小の自然数 n は　$n=2\cdot 5\cdot 7=70$

(2) $\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{756}{n}$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$\dfrac{756}{n}$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

756 を素因数分解すると　$756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$

よって，求める最小の自然数 n は　$n=3\cdot 7=21$

14 $\sqrt{\dfrac{504}{n}}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

解答　$n=14$

解説

$\sqrt{\dfrac{504}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{504}{n}$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$\dfrac{504}{n}$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

504 を素因数分解すると　$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$

よって，求める最小の自然数 n は　$n=2\cdot 7=14$

15 n は自然数とする。$\sqrt{\dfrac{2160}{n}}$ が自然数になるような n をすべて求めよ。

解答　$n=15,\ 60,\ 135,\ 240,\ 540,\ 2160$

解説

$\sqrt{\dfrac{2160}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{2160}{n}$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$\dfrac{2160}{n}$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

2160 を素因数分解すると　$2160=2^4\cdot 3^3\cdot 5$

ここで　$\dfrac{2^4\cdot 3^3\cdot 5}{3\cdot 5}=(2^2\cdot 3)^2$，$\dfrac{2^4\cdot 3^3\cdot 5}{2^2\cdot 3\cdot 5}=(2\cdot 3)^2$，$\dfrac{2^4\cdot 3^3\cdot 5}{2^4\cdot 3\cdot 5}=3^2$，

$\dfrac{2^4\cdot 3^3\cdot 5}{3^3\cdot 5}=(2^2)^2$，$\dfrac{2^4\cdot 3^3\cdot 5}{2^2\cdot 3^3\cdot 5}=2^2$，$\dfrac{2^4\cdot 3^3\cdot 5}{2^4\cdot 3^3\cdot 5}=1^2$

したがって，求める自然数 n は

$n=15,\ 60,\ 135,\ 240,\ 540,\ 2160$

16 次の数の正の約数の個数を求めよ。

(1) 96　　(2) 540　　(3) 784　　(4) 1260

解答　(1) 12 個　(2) 24 個　(3) 15 個　(4) 36 個

解説

(1) 96 を素因数分解すると　$96=2^5\cdot 3$

よって，96 の正の約数の個数は

$(5+1)(1+1)=6\cdot 2=12$ (個)

(2) 540 を素因数分解すると　$540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$

よって，540 の正の約数の個数は

$(2+1)(3+1)(1+1)=3\cdot 4\cdot 2=24$ (個)

(3) 784 を素因数分解すると　$784=2^4\cdot 7^2$

よって，784 の正の約数の個数は

$(4+1)(2+1)=5\cdot 3=15$ (個)

(4) 1260 を素因数分解すると　$1260=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

よって，1260 の正の約数の個数は

$(2+1)(2+1)(1+1)(1+1)=3\cdot 3\cdot 2\cdot 2=36$ (個)

17 次の数の正の約数の個数を求めよ。

(1) 144　　(2) 756　　(3) 840

(4) 900　　(5) 1872　　(6) 5280

解答　(1) 15 個　(2) 24 個　(3) 32 個　(4) 27 個　(5) 30 個　(6) 48 個

解説

(1) 144 を素因数分解すると　$144=2^4\cdot 3^2$

よって，144 の正の約数の個数は　$(4+1)(2+1)=5\cdot 3=15$ (個)

(2) 756 を素因数分解すると　$756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$

よって，756 の正の約数の個数は　$(2+1)(3+1)(1+1)=3\cdot 4\cdot 2=24$ (個)

(3) 840 を素因数分解すると　$840=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

よって，840 の正の約数の個数は　$(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)=4\cdot 2\cdot 2\cdot 2=32$ (個)

(4) 900 を素因数分解すると　$900=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$

よって，900 の正の約数の個数は　$(2+1)(2+1)(2+1)=3\cdot 3\cdot 3=27$ (個)

(5) 1872 を素因数分解すると　$1872=2^4\cdot 3^2\cdot 13$

よって，1872 の正の約数の個数は　$(4+1)(2+1)(1+1)=5\cdot 3\cdot 2=30$ (個)

(6) 5280 を素因数分解すると　$5280=2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 11$

よって，5280 の正の約数の個数は　$(5+1)(1+1)(1+1)(1+1)=6\cdot 2\cdot 2\cdot 2=48$ (個)

18 (1) 24 の倍数で，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を求めよ。

(2) 300 以下の自然数のうち，正の約数が 9 個である数の個数を求めよ。

解答　(1) $n=576$　(2) 5 個

解説

(1) 21 を素因数分解すると　$21=3\cdot 7$

よって，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^{20}，p^2q^6 (p，q は異なる素数)

のどちらかの形で表される。

n は 24 の倍数であり，$24=3\cdot 2^3$ であるから，n は p^2q^6 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は

$n=3^2\cdot 2^6=576$

(2) 9 を素因数分解すると　$9=3^2$

よって，正の約数の個数が 9 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^8，p^2q^2 (p，q は異なる素数)

のどちらかの形で表される。

[1] 自然数 n が p^8 の形で表されるとき

$2^8=256$，$3^8>300$ であるから，$p=2$ は条件を満たす。

[2] 自然数 n が p^2q^2 $(p<q)$ の形で表されるとき

$p=2$ とすると

$2^2\cdot 3^2=36$，$2^2\cdot 5^2=100$，$2^2\cdot 7^2=196$，$2^2\cdot 11^2>300$ であるから，$q=3$，5，7 は条件を満たす。

$p=3$ とすると

$3^2\cdot 5^2=225$，$3^2\cdot 7^2>300$ であるから，$q=5$ は条件を満たす。

$p=5$ とすると

$5^2\cdot 7^2>300$ であるから，条件を満たさない。

以上から，300 以下の自然数のうち，正の約数が 9 個である数は，36，100，196，225，256 の 5 個である。

19 (1) $\sqrt{\dfrac{63n}{40}}$ が有理数となるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) $\dfrac{n}{6}$，$\dfrac{n^2}{196}$，$\dfrac{n^3}{441}$ がすべて自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

解答　(1) $n=70$　(2) $n=42$

解説

(1) $\sqrt{\dfrac{63n}{40}}=\sqrt{\dfrac{3^2\cdot 7n}{2^3\cdot 5}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{7n}{2\cdot 5}}$

これが有理数となるような最小の自然数 n は　　$n=2\cdot 5\cdot 7=70$

(2) $\dfrac{n}{6}=m$ (m は自然数) とおくと　　$n=2\cdot 3m$

ゆえに　　$\dfrac{n^2}{196}=\dfrac{2^2\cdot 3^2m^2}{2^2\cdot 7^2}=\dfrac{3^2m^2}{7^2}=\left(\dfrac{3m}{7}\right)^2$

これが自然数となるのは，m が 7 の倍数のときであるから，$m=7k$ (k は自然数) とおくと　　$n=2\cdot 3\cdot 7k$　…… ①

よって　　$\dfrac{n^3}{441}=\dfrac{2^3\cdot 3^3\cdot 7^3k^3}{3^2\cdot 7^2}=2^3\cdot 3\cdot 7k^3$

これが自然数となるもので最小のものは，$k=1$ のときであるから，① に $k=1$ を代入して　　$n=42$

$\boxed{20}$ (1) $\sqrt{\dfrac{500}{77n}}$ が有理数となるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) $\sqrt{54000n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(3) $\dfrac{n}{10}$，$\dfrac{n^2}{18}$，$\dfrac{n^3}{45}$ がすべて自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

解答　(1)　$n=385$　　(2)　$n=15$　　(3)　$n=30$

解説

(1) $\sqrt{\dfrac{500}{77n}}=\sqrt{\dfrac{2^2\cdot 5^3}{7\cdot 11n}}=10\sqrt{\dfrac{5}{7\cdot 11n}}$ であるから，これが有理数となるような最小の自然数 n は　　$n=5\cdot 7\cdot 11=385$

(2) $\sqrt{54000}=\sqrt{2^4\cdot 3^3\cdot 5^3}=2^2\cdot 3\cdot 5\sqrt{3\cdot 5}$

ゆえに，$\sqrt{54000n}$ が自然数となるのは，$\sqrt{3\cdot 5n}$ の根号の中の $3\cdot 5n$ を素因数分解したとき，それぞれの指数が偶数になるときである。

よって，求める最小の自然数 n は　　$n=3\cdot 5=15$

(3) $\dfrac{n}{10}=m$ (m は自然数) とおくと　　$n=2\cdot 5m$

ゆえに　　$\dfrac{n^2}{18}=\dfrac{2^2\cdot 5^2m^2}{2\cdot 3^2}=\dfrac{2\cdot 5^2m^2}{3^2}=2\left(\dfrac{5m}{3}\right)^2$

これが自然数となるのは，m が 3 の倍数のときであるから，$m=3k$ (k は自然数) とおくと　　$n=2\cdot 3\cdot 5k$　…… ①

よって　　$\dfrac{n^3}{45}=\dfrac{2^3\cdot 3^3\cdot 5^3k^3}{3^2\cdot 5}=2^3\cdot 3\cdot 5^2k^3$

これが自然数となるもので最小のものは，$k=1$ のときである。

① に $k=1$ を代入して　　$n=30$

$\boxed{21}$ (1) n は自然数とする。$\dfrac{n}{6}$，$\dfrac{n^2}{196}$，$\dfrac{n^3}{441}$ がすべて自然数となるような n のうち最小のものを求めよ。

(2) $\dfrac{n!}{1024}$ が整数となる最小の正の整数 n を求めよ。

解答　(1)　$n=42$　　(2)　$n=12$

解説

(1) $\dfrac{n}{6}$ が自然数であるから，$n=2\cdot 3\cdot k$ (k は自然数) とおける。

$\dfrac{n^2}{196}=\dfrac{2^2\cdot 3^2\cdot k^2}{2^2\cdot 7^2}=\dfrac{3^2\cdot k^2}{7^2}$ が自然数であるから，$k=7l$ (l は自然数) とおける。

ゆえに　　$n=2\cdot 3\cdot 7\cdot l$

このとき

$$\frac{n^3}{441}=\frac{2^3\cdot 3^3\cdot 7^3\cdot l^3}{3^2\cdot 7^2}=2^3\cdot 3\cdot 7\cdot l^3$$

は自然数となる。

よって，$l=1$ のとき，n は最小で，その最小値は　　$n=42$

(2) $1024=2^{10}$ であるから，$n!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数が，10 個以上のとき，$\dfrac{n!}{1024}$ は整数となる。

正の偶数について，素因数 2 の個数を考えると

2 は 1 個，4 は 2 個，6 は 1 個，8 は 3 個，10 は 1 個，12 は 2 個

である。

また，奇数は素因数 2 をもたない。

$n=10$ のとき，$n!$ の素因数 2 の個数は　　$1+2+1+3+1=8$ (個)

$n=12$ のとき，$n!$ の素因数 2 の個数は　　$1+2+1+3+1+2=10$ (個)

ゆえに，$\dfrac{n!}{1024}$ が整数となる最小の正の整数 n は　　$n=12$

$\boxed{22}$ (1) 360 の正の約数の個数と，正の約数のうち偶数であるものの総和を求めよ。

(2) 12^n の正の約数の個数が 28 個となるような自然数 n を求めよ。

(3) 56 の倍数で，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を求めよ。

解答　(1)　個数は 24 個，総和は 1092　　(2)　$n=3$　　(3)　$n=784$

解説

(1) $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$ であるから，正の約数の個数は

$(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot 3\cdot 2=24$ (個)

また，正の約数のうち偶数であるものの総和は

$(2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=14\cdot 13\cdot 6=1092$

(2) $12^n=(2^2\cdot 3)^n=2^{2n}\cdot 3^n$ であるから，12^n の正の約数が 28 個であるための条件は

$(2n+1)(n+1)=28$

よって　　$2n^2+3n-27=0$　　　ゆえに　　$(n-3)(2n+9)=0$

n は自然数であるから　　$n=3$

(3) n の正の約数の個数は $15\ (=15\cdot 1=5\cdot 3)$ であるから，n は

p^{14}　または　p^4q^2　(p，q は異なる素数)

の形で表される。

n は 56 の倍数であり，$56=2^3\cdot 7$ であるから，n は p^4q^2 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は　　$n=2^4\cdot 7^2=784$

$\boxed{23}$ (1) 756 の正の約数の個数と，正の約数のうち奇数であるものの総和を求めよ。

(2) 正の約数の個数が 3 で，正の約数の総和が 57 となる自然数 n を求めよ。

(3) 300 以下の自然数のうち，正の約数が 9 個である数の個数を求めよ。

解答　(1)　24 個，総和 320　　(2)　$n=49$　　(3)　5 個

解説

(1) $756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$ であるから，正の約数の個数は

$(2+1)(3+1)(1+1)=3\cdot 4\cdot 2=24$ (個)

756 の正の約数のうち，奇数であるものは $3^3\cdot 7$ の正の約数である。

その総和は　　$(1+3+3^2+3^3)(1+7)=40\cdot 8=320$

(2) n の正の約数の個数は $3\ (=3\cdot 1)$ であるから，

$n=p^{3-1}=p^2$ (p は素数)　　と表される。

n の正の約数の総和が 57 であるから　　$1+p+p^2=57$

よって　　$p^2+p-56=0$　　　ゆえに　　$(p-7)(p+8)=0$

p は素数であるから　　$p=7$　　　よって　　$n=7^2=49$

(3) 正の約数の個数が $9\ (=9\cdot 1=3\cdot 3)$ であるような自然数を n として，n を素因数分解すると，次の形で表される。

p^8 または p^2q^2 (p，q は異なる素数，$p<q$)

[1] $n=p^8$ の形の場合

$2^8=256$，$3^8>300$ であるから，条件を満たす p の値は　　$p=2$

[2] $n=p^2q^2$ の形の場合

$\sqrt{300}=10\sqrt{3}<18$ であるから，積 pq が 17 以下となるような素数 p，q について考える。

$p=2$ のとき，$p<q$，$2q\leqq 17$ を満たす素数 q は　　$q=3，5，7$

$p=3$ のとき，$p<q$，$3q\leqq 17$ を満たす素数 q は　　$q=5$

$p=5$ のとき，$p<q$，$5q\leqq 17$ を満たす素数 q は存在しない。

よって，正の約数の個数が 9 個であるような自然数は 5 個。

$\boxed{24}$ (1) 5 桁の自然数 746□2 が 8 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

(2) 6 桁の自然数 N を 3 桁ごとに 2 つの数に分けたとき，前の数と後の数の差が 7 の倍数であるという。このとき，N は 7 の倍数であることを証明せよ。

(例)　869036 の場合　　$869-036=833=7\times 119$ であり，$869036=7\times 124148$

解答　(1)　3，7　　(2)　略

解説

(1) □ に入る数を a (a は整数，$0\leqq a\leqq 9$) とする。

下 3 桁が 8 の倍数であるとき，746□2 は 8 の倍数となるから

$600+10a+2=602+10a=8(a+75)+2(a+1)$

$2(a+1)$ は 8 の倍数となるから，$a+1$ は 4 の倍数となる。

よって　　$a+1=4，8$　すなわち　$a=3，7$

したがって，□に入る数は　　3，7

(2) $N=1000a+b$ (a，b は整数；$100\leqq a\leqq 999$，$0\leqq b\leqq 999$) とおくと，条件から，$a-b=7m$ (m は整数) と表される。

ゆえに，$a=b+7m$ であるから　　$N=1000(b+7m)+b=7(143b+1000m)$

したがって，N は 7 の倍数である。

$\boxed{25}$ (1) 5 桁の自然数 257□6 が 8 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

(2) 6 桁の自然数 N を 3 桁ごとに 2 つの数に分けたとき，前の数と後の数の差が 7 の倍数であるという。このとき，N は 7 の倍数であることを証明せよ。

(例)　869036 の場合　　$869-036=833=7\times 119$ であり，$869036=7\times 124148$

解答　(1)　3，7　　(2)　略

解説

(1) □ に入る数を a (a は整数，$0\leqq a\leqq 9$) とする。

下 3 桁が 8 の倍数であるとき，257□6 は 8 の倍数となるから

$700+10a+6=706+10a=8(a+88)+2(a+1)$

$2(a+1)$ は 8 の倍数となるから，$a+1$ は 4 の倍数となる。

よって　　$a+1=4，8$　すなわち　$a=3，7$

したがって，□に入る数は　　3，7

(2) $N=1000a+b$ (a，b は整数；$100\leqq a\leqq 999$，$0\leqq b\leqq 999$) とおくと，条件から，$a-b=7m$ (m は整数) と表される。

ゆえに，$a=b+7m$ であるから　　$N=1000(b+7m)+b=7(143b+1000m)$

したがって，N は 7 の倍数である。

$\boxed{26}$ (1) 720 の正の約数の個数と正の約数の総和を求めよ。

(2) 24 の倍数で，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を求めよ。

解答　(1)　個数は 30 個，総和は 2418　　(2)　$n=576$

解説

(1) $720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$ であるから，正の約数の個数は

$(4+1)(2+1)(1+1)=5\cdot 3\cdot 2=30$ (個)

また，正の約数の総和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+5)=31\cdot13\cdot6=2418$$

(2)　n の正の約数の個数は 21 $(=21\cdot1=7\cdot3)$ であるから，n は

p^{20}　または　p^6q^2 (p，q は異なる素数)

の形で表される。

n は 24 の倍数であり，$24=2^3\cdot3$ であるから，n は p^6q^2 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は　　$n=2^6\cdot3^2=576$

$\boxed{27}$ (1)　720 の正の約数の個数を求めよ。

(2)　自然数 N を素因数分解すると，素因数には 2 と 3 があり，それ以外の素因数はない。また，N の正の約数はちょうど 10 個あるという。このような自然数 N をすべて求めよ。

解答　(1)　30　　(2)　$N=162$，48

解説

(1)　$720=2^4\cdot3^2\cdot5$ であるから，求める正の約数の個数は

$$(4+1)(2+1)(1+1)=30\ (\text{個})$$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 720 \\ \hline 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

(2)　条件から，a，b を自然数として $N=2^a\cdot3^b$ と表され，N の正の約数が 10 個であることから

$$(a+1)(b+1)=10$$

が成り立つ。

$a+1$，$b+1$ はともに 2 以上の自然数であり，10 を 2 以上の 2 つの整数の積で表すとすると $10=2\cdot5$ しかない。

ゆえに　　$a+1=2$，$b+1=5$　または　$a+1=5$，$b+1=2$

よって　　$a=1$，$b=4$　または　$a=4$，$b=1$

したがって，求める自然数 N は　　$N=2^1\cdot3^4$，$2^4\cdot3^1$

すなわち　　$N=162$，48

$\boxed{28}$ (1)　1800 の正の約数の個数を求めよ。

(2)　自然数 N を素因数分解すると，素因数には 3 と 5 があり，それ以外の素因数はない。また，N の正の約数はちょうど 6 個あるという。このような 自然数 N をすべて求めよ。

解答　(1)　36 個　　(2)　$N=75$，45

解説

(1)　$1800=2^3\cdot3^2\cdot5^2$ であるから，求める正の約数の個数は

$$(3+1)(2+1)(2+1)=36\ (\text{個})$$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 1800 \\ \hline 2 & 900 \\ \hline 2 & 450 \\ \hline 3 & 225 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

(2)　条件から，a，b を自然数として $N=3^a\cdot5^b$ と表され，N の正の約数が 6 個であることから

$$(a+1)(b+1)=6$$

が成り立つ。

$a+1$，$b+1$ はともに 2 以上の自然数であり，6 を 2 以上の 2 つの整数の積で表すとすると，$6=2\cdot3$ しかない。

よって　　$a+1=2$，$b+1=3$　または　$a+1=3$，$b+1=2$

ゆえに　　$a=1$，$b=2$　または　$a=2$，$b=1$

したがって，求める N は　　$N=3^1\cdot5^2$，$3^2\cdot5^1$　すなわち　$N=75$，45