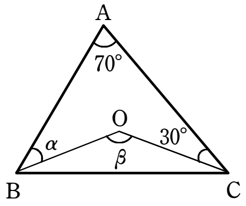
1 右の図において，点 O は $\triangle ABC$ の外心である。$\angle BAC=70^\circ$，$\angle ACO=30^\circ$ のとき，角 α，β を求めよ。



解答　$\alpha=40^\circ$，$\beta=140^\circ$

解説

点 O は $\triangle ABC$ の外心であるから

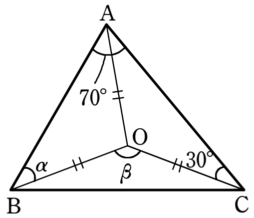
$OA=OB=OC$

よって，$\triangle OAB$，$\triangle OCA$ は二等辺三角形である。

ゆえに　$\angle OAC=\angle OCA=30^\circ$

$\angle OAB=70^\circ-\angle OAC=40^\circ$

$\alpha=\angle OAB$ であるから　$\alpha=40^\circ$



$\triangle ABC$ の内角の和は 180° であるから

$70^\circ+40^\circ+30^\circ+\angle OBC+\angle OCB=180^\circ$

よって　$\angle OBC+\angle OCB=40^\circ$

$\triangle OBC$ の内角の和も 180° であるから

$\beta=180^\circ-(\angle OBC+\angle OCB)$

$=180^\circ-40^\circ=140^\circ$

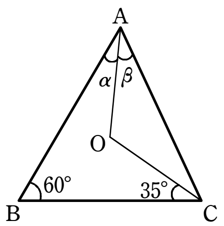
別解　（後半）　$\triangle ABC$ は点 O を中心とし，半径 OA の円に内接する。

よって，円周角の定理により

$\beta=2\angle BAC=2\times70^\circ=140^\circ$

2 $\triangle ABC$ の外心を O とする。右の図の角 α，β を求めよ。

[20 点]



解答　$\angle OBC=\angle OCB=35^\circ$

よって　$\angle OBA=60^\circ-35^\circ=25^\circ$

ゆえに　$\alpha=\angle OBA=25^\circ$

よって　$\beta=\{180^\circ-(25^\circ+60^\circ+35^\circ)\}\div2=30^\circ$

解説

$\angle OBC=\angle OCB=35^\circ$

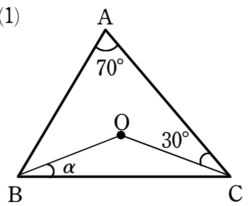
よって　$\angle OBA=60^\circ-35^\circ=25^\circ$

ゆえに　$\alpha=\angle OBA=25^\circ$

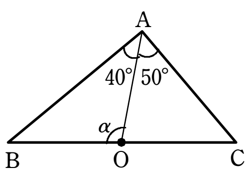
よって　$\beta=\{180^\circ-(25^\circ+60^\circ+35^\circ)\}\div2=30^\circ$

3 下の図において，点 O は $\triangle ABC$ の外心である。α を求めよ。

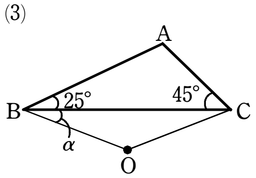
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$\alpha=20^\circ$　　(2)　$\alpha=100^\circ$　　(3)　$\alpha=20^\circ$

解説

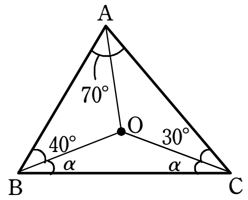
(1)　$OA=OB=OC$ であるから，$\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$ はいずれも二等辺三角形である。

$\angle OAC=\angle OCA=30^\circ$

$\angle OBA=\angle OAB=70^\circ-30^\circ=40^\circ$

$\angle OCB=\angle OBC=\alpha$

よって，角の大きさは右の図のようになる。



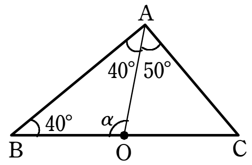
$\triangle ABC$ において

$70^\circ+40^\circ+2\alpha+30^\circ=180^\circ$

これを解いて　$\alpha=20^\circ$

(2)　$OA=OB$ であるから，$\triangle OAB$ は二等辺三角形である。よって

$\angle OBA=\angle OAB=40^\circ$



したがって

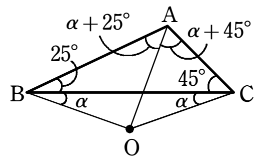
$\alpha=180^\circ-2\times40^\circ=100^\circ$

(3)　$OA=OB=OC$ であるから，$\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$ はいずれも二等辺三角形である。

$\angle OAB=\angle OBA=\alpha+25^\circ$

$\angle OAC=\angle OCA=\angle ACB+\angle OCB$

$=45^\circ+\alpha$



よって，角の大きさは右の図のようになる。

$\triangle ABC$ において

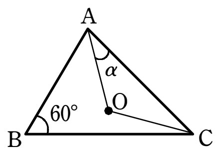
$(\alpha+25^\circ)+25^\circ+45^\circ+(\alpha+45^\circ)=180^\circ$

$2\alpha=40^\circ$

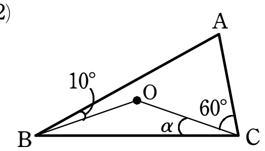
したがって　$\alpha=20^\circ$

4 下の図で，点 O は $\triangle ABC$ の外心である。α を求めよ。　[10点×2=20点]

(1)



(2)



解答　(1)　$\angle OAB+\angle OCB=\angle OBA+OBC=60^\circ$

よって　$\alpha=\{180^\circ-(60^\circ+60^\circ)\}\div2=30^\circ$

(2)　$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC=\angle OBA+\angle OCA=10^\circ+60^\circ=70^\circ$

よって　$\alpha=\{180^\circ-(70^\circ+10^\circ+60^\circ)\}\div2=20^\circ$

解説

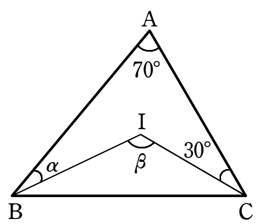
(1)　$\angle OAB+\angle OCB=\angle OBA+OBC=60^\circ$

よって　$\alpha=\{180^\circ-(60^\circ+60^\circ)\}\div2=30^\circ$

(2)　$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC=\angle OBA+\angle OCA=10^\circ+60^\circ=70^\circ$

よって　$\alpha=\{180^\circ-(70^\circ+10^\circ+60^\circ)\}\div2=20^\circ$

5 右の図において，点 I は $\triangle ABC$ の内心である。$\angle BAC=70^\circ$，$\angle ACI=30^\circ$ のとき，角 α，β を求めよ。



解答　$\alpha=25^\circ$，$\beta=125^\circ$

解説

点 I は $\triangle ABC$ の内心であるから

$\angle IBC=\angle IBA=\alpha$

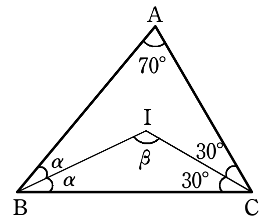
$\angle ICB=\angle ICA=30^\circ$

よって　$2\alpha+70^\circ+30^\circ\times2=180^\circ$

ゆえに　$\alpha=25^\circ$

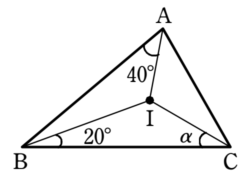
また　$\beta=180^\circ-(\alpha+30^\circ)$

$=180^\circ-(25^\circ+30^\circ)=125^\circ$

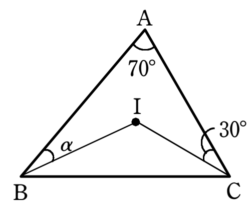


6 下の図において，点 I は $\triangle ABC$ の内心である。α を求めよ。

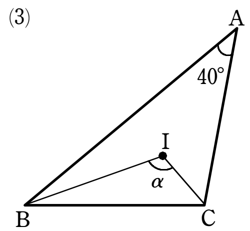
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$\alpha=30^\circ$　　(2)　$\alpha=25^\circ$　　(3)　$\alpha=110^\circ$

解説

(1)　$\angle IAC=\angle IAB=40^\circ$

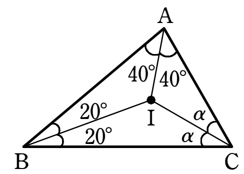
$\angle IBA=\angle IBC=20^\circ$

$\angle ICA=\angle ICB=\alpha$

よって，$\triangle ABC$ において

$2(40^\circ+20^\circ+\alpha)=180^\circ$

これを解いて　$\alpha=30^\circ$



(2)　$\angle IBC=\angle IBA=\alpha$

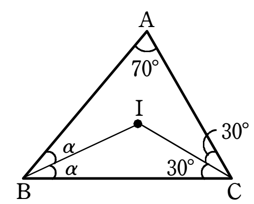
$\angle ICB=\angle ICA=30^\circ$

よって，$\triangle ABC$ において

$2\alpha+2\times30^\circ+70^\circ=180^\circ$

$2\alpha=50^\circ$

したがって　$\alpha=25^\circ$



(3)　$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-40^\circ=140^\circ$

$\angle IBA=\angle IBC$

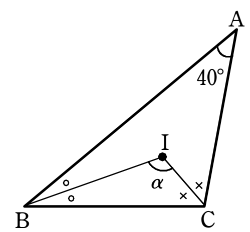
$\angle ICA=\angle ICB$

であるから

$\angle IBC+\angle ICB=\dfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

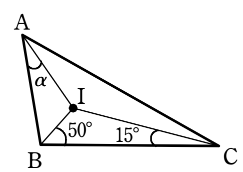
$=\dfrac{1}{2}\times140^\circ=70^\circ$

よって　$\alpha=180^\circ-70^\circ=110^\circ$

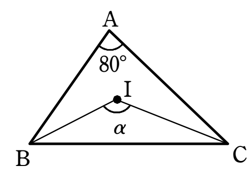


7 下の図で，点 I は $\triangle ABC$ の内心である。α を求めよ。　[10点×2=20点]

(1)



(2)



解答　(1)　$\angle ABC=50^\circ\times2=100^\circ$，$\angle BCA=15^\circ\times2=30^\circ$

よって　$\alpha=\{180^\circ-(100^\circ+30^\circ)\}\div2=25^\circ$

(2)　$\angle ABC+\angle ACB=2(\angle IBC+\angle ICB)$　……①

ここで　$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-80^\circ=100^\circ$，$\angle IBC+\angle ICB=180^\circ-\alpha$

であるから，① より　$100^\circ=2(180^\circ-\alpha)$　これを解いて　$\alpha=130^\circ$

解説

(1)　$\angle ABC=50^\circ\times2=100^\circ$，$\angle BCA=15^\circ\times2=30^\circ$

よって　$\alpha=\{180^\circ-(100^\circ+30^\circ)\}\div2=25^\circ$

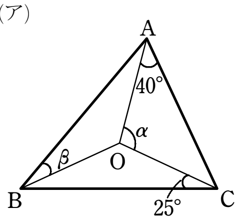
(2)　$\angle ABC+\angle ACB=2(\angle IBC+\angle ICB)$　……①

ここで　$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-80^\circ=100^\circ$，$\angle IBC+\angle ICB=180^\circ-\alpha$

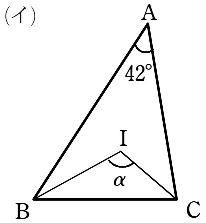
であるから，① より　$100^\circ=2(180^\circ-\alpha)$　これを解いて　$\alpha=130^\circ$

8　(1)　次の図で，△ABC の外心を O，内心を I，垂心を H とする。角 α，β の大きさを求めよ。

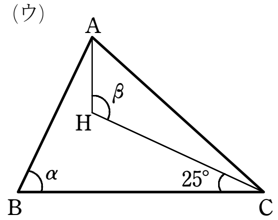
(ア)



(イ)

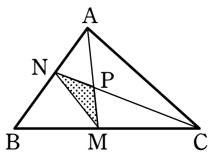


(ウ)



(2)　△ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする。AB=3，BC=6，CA=4 のとき，AI : ID を求めよ。

(3)　右の図の △ABC において，点 M，N をそれぞれ辺 BC，AB の中点とする。△ABC の面積が 12 のとき，△PNM の面積を求めよ。



解答　(1)　(ア)　$\alpha=100^\circ$，$\beta=25^\circ$　(イ)　$\alpha=111^\circ$　(ウ)　$\alpha=65^\circ$，$\beta=115^\circ$

(2)　7 : 6　(3)　1

解説

(1)　(ア)　OA=OC であるから

$\angle OCA=\angle OAC=40^\circ$

よって　$\alpha=180^\circ-2\times40^\circ=100^\circ$

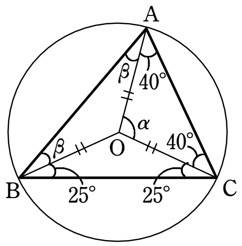
また，OA=OB，OB=OC から

$\angle OAB=\angle OBA=\beta$，$\angle OBC=\angle OCB=25^\circ$

ゆえに，△ABC において

$2\times40^\circ+2\times25^\circ+2\beta=180^\circ$

よって　$2\beta=50^\circ$　したがって　$\beta=25^\circ$



別解　まず，先に β を求める。

次に，円周角の定理により　$\alpha=2(\beta+25^\circ)=2(25^\circ+25^\circ)=100^\circ$

(イ)　$\angle ABI=\angle IBC$，$\angle ACI=\angle ICB$ であるから，

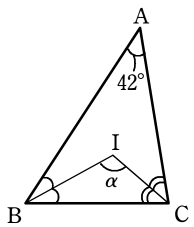
△IBC において

$\alpha=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$

$=180^\circ-90^\circ+\frac{42^\circ}{2}$

$=111^\circ$



(ウ)　直線 AH と辺 BC との交点を D，直線 CH と辺 AB との交点を E とすると

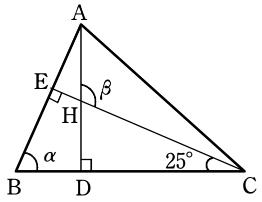
$\angle ADC=\angle CEB=90^\circ$

△BCE において　$\alpha+25^\circ+90^\circ=180^\circ$

よって　$\alpha=65^\circ$

△CHD において，内角と外角の関係から

$\beta=25^\circ+90^\circ=115^\circ$



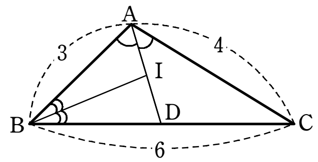
別解　四角形 BDHE は円に内接する。よって　$\alpha+\angle EHD=180^\circ$

$\angle EHD=\beta$ であるから　$\beta=180^\circ-\alpha=115^\circ$

(2)　△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから　BD : DC=AB : AC=3 : 4

よって　$BD=\frac{3}{3+4}BC=\frac{3}{7}\times6=\frac{18}{7}$

△ABD において，BI は ∠B の二等分線であるから　$AI : ID=BA : BD=3 : \frac{18}{7}=7 : 6$



(3)　N は辺 AB の中点であるから　$\triangle ANC=\frac{1}{2}\triangle ABC=6$

P は △ABC の重心であるから　CP : PN=2 : 1

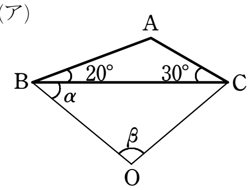
よって　△ANP : △ANC=NP : NC=1 : 3

ゆえに　$\triangle ANP=\frac{1}{3}\triangle ANC=2$

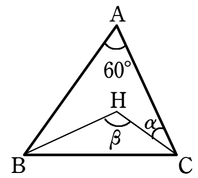
また，AP : PM=2 : 1 であるから　$\triangle PNM=\frac{1}{2}\triangle ANP=1$

9　(1)　右の図で，△ABC の外心を O，垂心を H とする。角 α，β の大きさを求めよ。

(ア)



(イ)



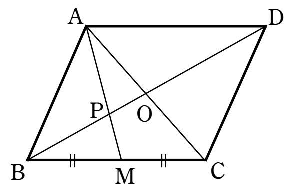
(2)　△ABC の内心を I とする。∠BIC=130° のとき，∠A の大きさを求めよ。

(3)　3 辺が AB=5，BC=8，CA=4 である △ABC の内心を I とし，直線 CI と辺 AB との交点を D とする。このとき，CI : ID を求めよ。

(4)　右の図のように，平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O，辺 BC の中点を M とし，AM と BD の交点を P とする。

(ア)　線分 PD の長さは，線分 BD の長さの何倍か。

(イ)　△ABP の面積が 6 cm^2 のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。



解答　(1)　(ア)　$\alpha=40^\circ$，$\beta=100^\circ$　(イ)　$\alpha=30^\circ$，$\beta=120^\circ$　(2)　80°

(3)　12 : 5　(4)　(ア)　$\frac{2}{3}$ 倍　(イ)　36 cm^2

解説

(1)　(ア)　△ABC において

$\angle BAC=180^\circ-(20^\circ+30^\circ)=130^\circ$

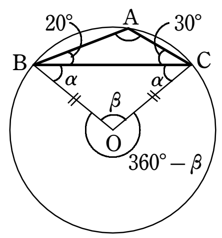
よって　$360^\circ-\beta=2\angle BAC=260^\circ$

ゆえに　$\beta=100^\circ$

OB=OC から

$\angle OBC=\angle OCB=\alpha$

よって　$\alpha=\frac{180^\circ-\beta}{2}=\frac{180^\circ-100^\circ}{2}=40^\circ$



(イ)　直線 BH と辺 CA の交点を D，直線 CH と辺AB の交点を E とすると

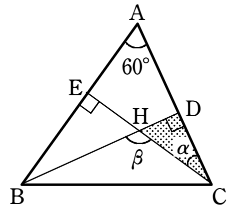
$\angle BDC=90^\circ$，$\angle AEC=90^\circ$

△AEC において

$\alpha=180^\circ-(60^\circ+90^\circ)=30^\circ$

△CDH において，内角と外角の関係から

$\beta=\alpha+90^\circ=30^\circ+90^\circ=120^\circ$



別解　$\angle AEH+\angle ADH=180^\circ$ であるから，四角形 AEHD は円に内接する。

よって　$\angle EHD=180^\circ-\angle A=120^\circ$　ゆえに　$\beta=\angle EHD=120^\circ$

$\beta=\alpha+90^\circ$ であるから　$\alpha=\beta-90^\circ=30^\circ$

(2)　IB，IC はそれぞれ ∠ABC，∠ACB の二等分線である。

また，△IBC において

$\angle IBC+\angle ICB=180^\circ-\angle BIC$

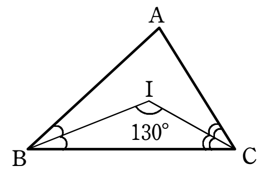
$=180^\circ-130^\circ=50^\circ$

ゆえに　$\angle ABC+\angle ACB=2(\angle IBC+\angle ICB)$

$=2\times50^\circ=100^\circ$

よって，△ABC において

$\angle A=180^\circ-(\angle ABC+\angle ACB)=180^\circ-100^\circ=80^\circ$



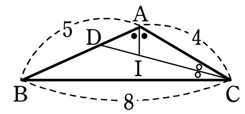
(3)　△ABC において，CD は ∠C の二等分線であるから

AD : DB=CA : CB=4 : 8=1 : 2

よって　$AD=\frac{1}{1+2}AB=\frac{1}{3}\times5=\frac{5}{3}$

△ADC において，AI は ∠A の二等分線であるから

$CI : ID=AC : AD=4 : \frac{5}{3}=12 : 5$



(4)　(ア)　AO=CO，BM=CM より，点 P は △ABC の重心であるから　BP : PO=2 : 1

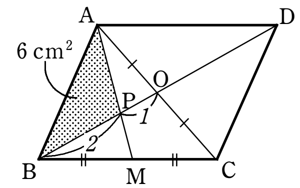
よって，$PO=\frac{1}{3}BO$ であり，$BO=OD=\frac{1}{2}BD$

であるから

$PD=PO+OD=\frac{1}{3}BO+BO=\frac{4}{3}BO$

$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}BD=\frac{2}{3}BD$

したがって　$\frac{2}{3}$ 倍



(イ)　$BP=BD-PD=BD-\frac{2}{3}BD=\frac{1}{3}BD$

よって　$BP : PD=\frac{1}{3}BD : \frac{2}{3}BD=1 : 2$

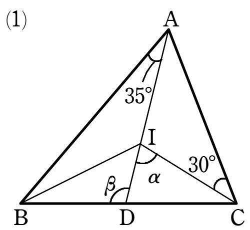
ゆえに　$\triangle ABD=3\triangle ABP=3\times6=18$ (cm^2)

よって，四角形 ABCD の面積は　$2\times\triangle ABD=36$ (cm^2)

10　(1)　△ABC の内心を I とするとき，右の図の角 α，β を求めよ。ただし，点 D は AI と BC の交点である。

(2)　△ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする。AB=8，BC=7，AC=4 であるとき，AI : ID を求めよ。

(1)



解答　(1)　$\alpha=65^\circ$，$\beta=95^\circ$　(2)　12 : 7

解説

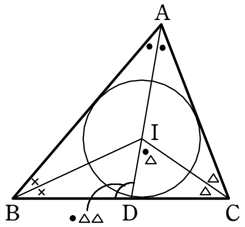
(1)　$\angle IAC=\angle IAB=35^\circ$ であるから

$\alpha=\angle IAC+\angle ICA$

$=35^\circ+30^\circ=65^\circ$

よって　$\beta=\alpha+\angle ICD=65^\circ+\angle ICA$

$=65^\circ+30^\circ=95^\circ$



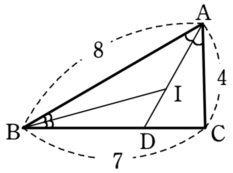
(2)　直線 AD は ∠A の二等分線であるから

$BD : DC=AB : AC=2 : 1$

よって　$BD=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{14}{3}$

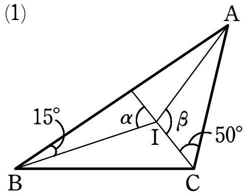
直線 BI は ∠B の二等分線であるから

$AI : ID=BA : BD=8 : \dfrac{14}{3}=12 : 7$



11　(1)　△ABC の内心を I とするとき，右の図の角 α，β を求めよ。

(2)　3 辺が AB＝5，BC＝8，CA＝4 である △ABC の内心を I とし，直線 CI と辺 AB との交点を D とする。このとき，CI : ID を求めよ。

(1)


解答　(1)　$\alpha=65^\circ$，$\beta=105^\circ$　　(2)　12 : 5

解説

(1)　I は △ABC の内心であるから

$\angle IBC=\angle IBA=15^\circ$，$\angle ICB=\angle ICA=50^\circ$

ゆえに　$\alpha=\angle IBC+\angle ICB=15^\circ+50^\circ=65^\circ$

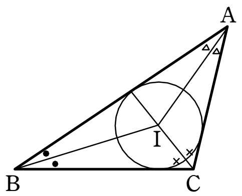
また　$\angle B=2\angle ABI=30^\circ$，$\angle C=2\angle ACI=100^\circ$

よって　$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-(30^\circ+100^\circ)$

$=50^\circ$

ゆえに　$\angle IAC=\dfrac{1}{2}\angle A=25^\circ$

よって　$\beta=180^\circ-(\angle IAC+\angle ICA)=180^\circ-(25^\circ+50^\circ)=105^\circ$



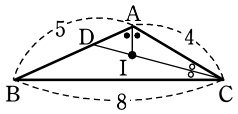
(2)　△ABC において，CD は ∠C の二等分線であるから

$AD : DB=CA : CB=4 : 8=1 : 2$

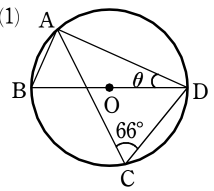
よって　$AD=\dfrac{1}{1+2}\times AB=\dfrac{1}{3}\times 5=\dfrac{5}{3}$

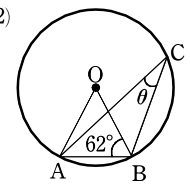
また，△ADC において，AI は ∠A の二等分線であるから

$CI : ID=AC : AD=4 : \dfrac{5}{3}=12 : 5$



12　右の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

(1)


(2)


解答　(1)　24°　　(2)　28°

解説

(1)　円周角の定理により　$\angle ABD=\angle ACD=66^\circ$

線分 BD は円の直径であるから　$\angle BAD=90^\circ$

△ABD の内角の和は 180° であるから

$\theta=180^\circ-(90^\circ+66^\circ)=24^\circ$

(2)　△OAB は OA＝OB の二等辺三角形であるから

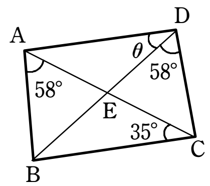
$\angle OAB=\angle OBA=62^\circ$

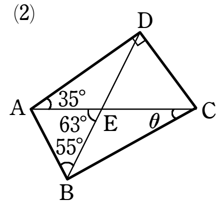
△OAB の内角の和は 180° であるから

$\angle AOB=180^\circ-62^\circ\times 2=56^\circ$

円周角の定理により　$\theta=\dfrac{1}{2}\angle AOB=28^\circ$

13　右の図において，角 θ を求めよ。

(1)


(2)


解答　(1)　35°　　(2)　28°

解説

(1)　A と D は直線 BC に関して同じ側にあり，∠BAC＝∠BDC であるから，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

よって，円周角の定理により　$\theta=\angle ACB=35^\circ$

(2)　△ACD の内角の和は 180° であるから

$\angle ACD=180^\circ-(90^\circ+35^\circ)=55^\circ$

よって，B と C は直線 AD に関して同じ側にあり，∠ABD＝∠ACD であるから，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

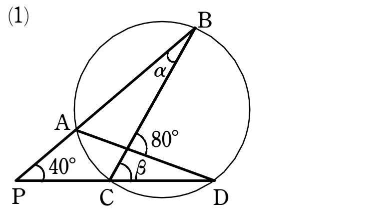
よって，円周角の定理により　$\angle CBD=\angle CAD=35^\circ$

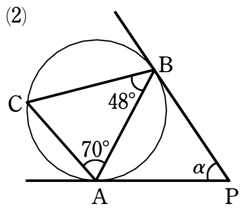
また　$\angle BEA=\angle EBC+\angle ECB$

よって　$63^\circ=35^\circ+\theta$

ゆえに　$\theta=28^\circ$

14　下の図において，角 α，β を求めよ。ただし，(2) で直線 PA，PB は △ABC の外接円の接線である。

(1)


(2)


解答　(1)　$\alpha=20^\circ$，$\beta=60^\circ$　　(2)　$\alpha=56^\circ$

解説

(1)　弧 BD に対する円周角より

$\angle BAD=\angle BCD=\beta$

また，∠ABC＋∠BAD＝80° であるから

$\alpha+\beta=80^\circ$　……①

一方，∠ABC＋∠APC＝∠BCD であるから

$\alpha+40^\circ=\beta$　……②

①，② から　$\alpha=20^\circ$，$\beta=60^\circ$

(2)　$\angle ACB=180^\circ-(\angle CAB+\angle CBA)$

$=180^\circ-(70^\circ+48^\circ)=62^\circ$

接線と弦の作る角の関係から

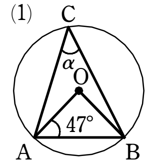
$\angle BAP=\angle ACB=62^\circ$

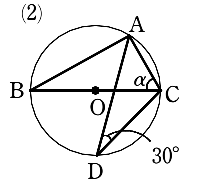
$\angle ABP=\angle BCA=62^\circ$

ゆえに　$\alpha=180^\circ-(\angle BAP+\angle ABP)$

$=180^\circ-(62^\circ+62^\circ)=56^\circ$

15　右の図において，α を求めよ。ただし，O は円の中心，(2) の線分 BC は円の直径である。

(1)


(2)


解答　(1)　$\alpha=43^\circ$　　(2)　$\alpha=60^\circ$

解説

(1)　△OAB は二等辺三角形であるから

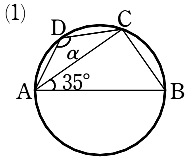
$\angle AOB=180^\circ-2\times 47^\circ=86^\circ$

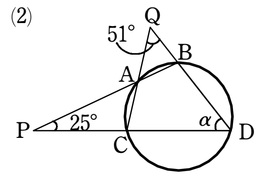
よって　$\alpha=\dfrac{1}{2}\angle AOB=43^\circ$

(2)　∠ABC＝∠ADC＝30°，∠BAC＝90° であるから

$\alpha=180^\circ-(30^\circ+90^\circ)=60^\circ$

16　右の図において，α を求めよ。ただし，(1)で線分 AB は円の直径とする。

(1)


(2)


解答　(1)　$\alpha=125^\circ$　　(2)　$\alpha=52^\circ$

解説

(1)　AB が円の直径であるから　$\angle ACB=90^\circ$

よって　$\angle ABC=180^\circ-(35^\circ+90^\circ)=55^\circ$

四角形 ABCD は円に内接するから

$\alpha=180^\circ-55^\circ=125^\circ$

(2)　四角形 ACDB は円に内接するから　$\angle PAC=\alpha$

また　$\angle ACP=\alpha+51^\circ$

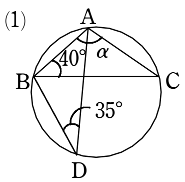
よって，△APC において　$\alpha+25^\circ+(\alpha+51^\circ)=180^\circ$

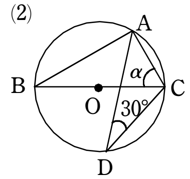
これを解いて　$\alpha=52^\circ$

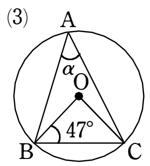
別解　(1)　B と D を結ぶと　$\angle BDC=\angle BAC=35^\circ$，$\angle ADB=90^\circ$

よって　$\alpha=\angle ADB+\angle BDC=90^\circ+35^\circ=125^\circ$

17　下の図において，α を求めよ。ただし，(2)，(3) の O は円の中心，(2) の線分 BC は円の直径である。

(1)


(2)


(3)


解答　(1)　$\alpha=105^\circ$　　(2)　$\alpha=60^\circ$　　(3)　$\alpha=43^\circ$

解説

(1)　円周角の定理により　$\angle ADB=\angle ACB=35^\circ$

よって，△ABC において　$\alpha+40^\circ+35^\circ=180^\circ$

これを解いて　$\alpha=105^\circ$

(2)　円周角の定理により　$\angle ADC=\angle ABC=30^\circ$

また，線分 BC は円の直径であるから　$\angle BAC=90^\circ$

よって，△ABC において　$\alpha+30^\circ+90^\circ=180^\circ$

これを解いて　$\alpha=60^\circ$

(3)　△OBC は二等辺三角形であるから

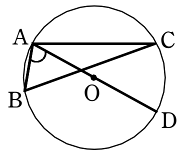
$$\angle \mathrm{BOC}=180^\circ-47^\circ\times 2=86^\circ$$

よって，円周角の定理により　$\alpha=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{BOC}=43^\circ$

18　右の図の △ABC において

$$\angle \mathrm{A}:\angle \mathrm{B}:\angle \mathrm{C}=5:3:1$$

である。
3 点 A，B，C を通る円 O の周上の点 A を通る直径を AD とするとき，∠BAD の大きさを求めよ。

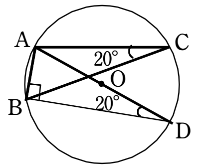


解答　70°

解説

△ABC の内角の和は 180° で

$$\angle \mathrm{C}=180^\circ\times\frac{1}{5+3+1}=20^\circ$$



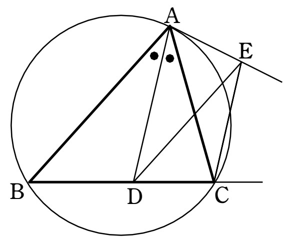
弧 AB に対する円周角で

$\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{ACB}=20^\circ$

直径 AD に対する円周角で　$\angle \mathrm{ABD}=90^\circ$

よって　$\angle \mathrm{BAD}=180^\circ-90^\circ-20^\circ=70^\circ$

19　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とする。A における △ABC の外接円の接線と，C を通り AD に平行な直線との交点を E とする。
∠A=58°，∠B=48° であるとき，∠CDE の大きさを求めよ。

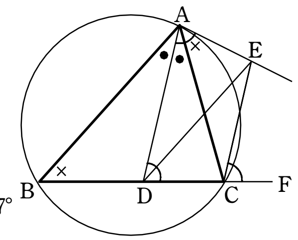


解答　∠CDE=48°

解説

AD は ∠A の二等分線であるから

$$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{CAD}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}=29^\circ$$



接弦定理により　$\angle \mathrm{CAE}=\angle \mathrm{B}=48^\circ$

ゆえに　$\angle \mathrm{DAE}=29^\circ+48^\circ=77^\circ$

△ABD において

$$\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{ABD}+\angle \mathrm{BAD}=48^\circ+29^\circ=77^\circ$$

よって　$\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{DAE}$　…… ①

図のように点 F をとると，AD∥EC であるから　$\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{ECF}$　…… ②

①，② から　$\angle \mathrm{DAE}=\angle \mathrm{ECF}$

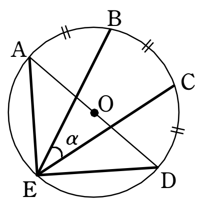
したがって，四角形 ADCE は円に内接する。

この円の $\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$ に対する円周角であるから　$\angle \mathrm{CDE}=\angle \mathrm{CAE}=48^\circ$

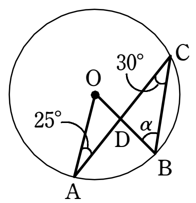
20　下の図において，α を求めよ。ただし，点 O は円の中心であり，(1) では

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ である。

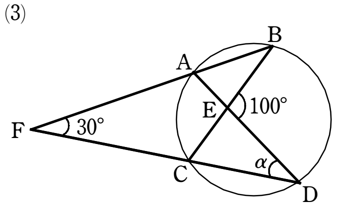
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　α=30°　(2)　α=55°　(3)　α=35°

解説

(1)　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ であるから　$\angle \mathrm{AEB}=\angle \mathrm{BEC}=\angle \mathrm{CED}=\alpha$

また，線分 AD は円 O の直径であるから

$\angle \mathrm{AED}=90^\circ$　すなわち　$3\alpha=90^\circ$

よって　$\alpha=30^\circ$

(2)　円周角の定理により　$\angle \mathrm{AOB}=2\angle \mathrm{ACB}=2\times 30^\circ=60^\circ$

また，△OAD において

$\angle \mathrm{ODC}=\angle \mathrm{AOD}+\angle \mathrm{OAD}=60^\circ+25^\circ=85^\circ$

△BCD において

$\angle \mathrm{ODC}=\angle \mathrm{DBC}+\angle \mathrm{DCB}=\alpha+30^\circ$

ゆえに　$\alpha+30^\circ=85^\circ$

よって　$\alpha=55^\circ$

(3)　△AFD において　$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{AFD}+\angle \mathrm{ADF}=30^\circ+\alpha$

$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ に対する円周角は等しいから

$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{ADC}=\alpha$

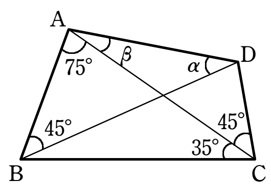
△BAE において

$\angle \mathrm{BED}=\angle \mathrm{BAE}+\angle \mathrm{ABE}=(30^\circ+\alpha)+\alpha=2\alpha+30^\circ$

ゆえに　$2\alpha+30^\circ=100^\circ$

よって　$\alpha=35^\circ$

21　右の図において，α，β を求めよ。



解答　α=35°，β=25°

解説

$\angle \mathrm{ABD}=45^\circ$，$\angle \mathrm{ACD}=45^\circ$ であるから　$\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{ACD}$

よって，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

この円において，円周角の定理により

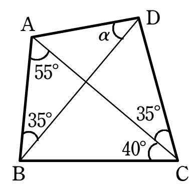
$\alpha=\angle \mathrm{ACB}=35^\circ$

また，△ABD において，内角の和は 180° であるから

$45^\circ+(75^\circ+\beta)+35^\circ=180^\circ$

よって　$\beta=25^\circ$

22　右の図において，α を求めよ。



解答　α=40°

解説

$\angle \mathrm{ABD}=35^\circ$，$\angle \mathrm{ACD}=35^\circ$ であるから

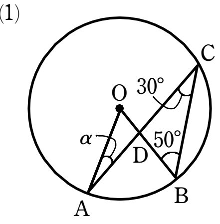
$\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{ACD}$

よって，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

この円において，円周角の定理により　$\alpha=\angle \mathrm{ACB}=40^\circ$

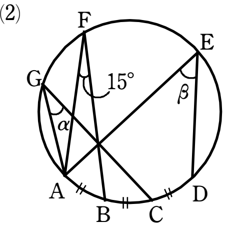
23　下の図において，α，β を求めよ。

(1)



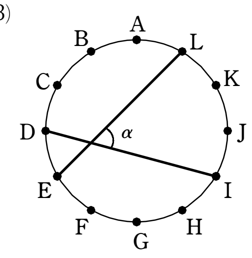
O は円の中心

(2)



$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$

(3)



A ～ L は円周を 12 等分する点

解答　(1)　α=20°　(2)　α=30°，β=45°　(3)　α=60°

解説

(1)　円周角の定理により

$\angle \mathrm{AOB}=2\angle \mathrm{ACB}=2\times 30^\circ=60^\circ$

△OAD において

$\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{OAD}+\angle \mathrm{AOD}=\angle \mathrm{OAD}+\angle \mathrm{AOB}=\alpha+60^\circ$

△BCD において

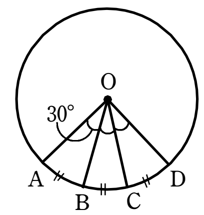
$\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{DBC}+\angle \mathrm{DCB}=50^\circ+30^\circ=80^\circ$

よって　$\alpha+60^\circ=80^\circ$

すなわち　$\alpha=20^\circ$

(2)　円の中心を O とすると，円周角の定理により

$\angle \mathrm{AOB}=30^\circ$ であるから



$\angle \mathrm{AOC}=2\times 30^\circ=60^\circ$

$\angle \mathrm{AOD}=3\times 30^\circ=90^\circ$

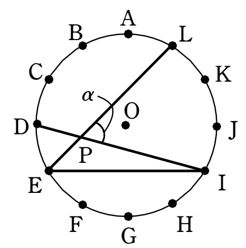
よって

$$\alpha=\angle \mathrm{AGC}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{AOC}=30^\circ$$

$$\beta=\angle \mathrm{AED}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{AOD}=45^\circ$$

(3)　円の中心を O とする。

$$\angle \mathrm{DIE}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{DOE}=\frac{1}{2}\times 360^\circ\times\frac{1}{12}=15^\circ$$



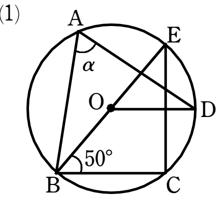
また　$\angle \mathrm{IEL}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{IOL}=\dfrac{1}{2}\times 360^\circ\times\dfrac{3}{12}=45^\circ$

よって，線分 DI と EL の交点を P とすると

$\alpha=\angle \mathrm{PIE}+\angle \mathrm{PEI}=15^\circ+45^\circ=60^\circ$

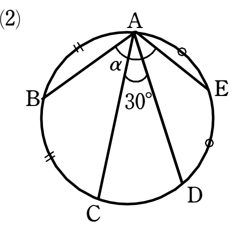
24　下の図において，α を求めよ。ただし，O は円の中心とする。

(1)



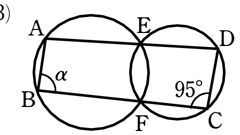
OD∥BC

(2)



$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=\overset{\frown}{\mathrm{ED}}$

(3)



解答　(1)　α=65°　(2)　α=105°　(3)　α=85°

解説

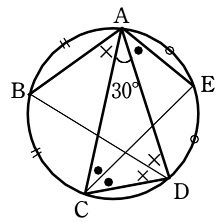
(1)　OD∥BC より，$\angle \mathrm{EOD}=\angle \mathrm{OBC}=50^\circ$ であるから

$\angle \mathrm{BOD}=180^\circ-\angle \mathrm{EOD}=180^\circ-50^\circ=130^\circ$

よって　$\alpha=\angle \mathrm{BAD}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{BOD}=\dfrac{1}{2}\times 130^\circ=65^\circ$

(2)　$\angle ADB=\angle BDC=\angle BAC$

$\angle ACE=\angle ECD=\angle EAD$



よって

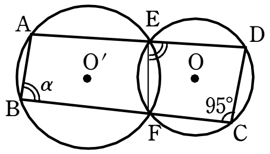
$\alpha=30^\circ+(\angle BAC+\angle EAD)$

$=30^\circ+\dfrac{1}{2}(\angle ADC+\angle ACD)$

$=30^\circ+\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle CAD)$

$=30^\circ+\dfrac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=105^\circ$

(3)　右の図において，四角形 EFCD は円 O に内接するから



$\angle DEF+\angle DCF=180^\circ$

よって

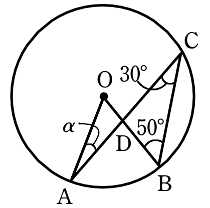
$\angle DEF=180^\circ-95^\circ=85^\circ$

四角形 ABFE は円 O′ に内接するから

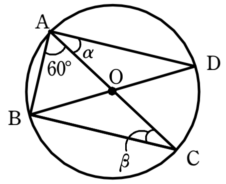
$\alpha=\angle ABF=\angle DEF=85^\circ$

$\boxed{25}$ 下の図において，α，β を求めよ。ただし，O は円の中心とする。

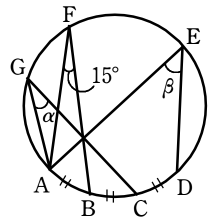
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$\alpha=20^\circ$　(2)　$\alpha=30^\circ$，$\beta=30^\circ$　(3)　$\alpha=30^\circ$，$\beta=45^\circ$

解説

(1)　円周角の定理により　$\angle AOB=2\angle ACB=2\times30^\circ=60^\circ$

△OAD において

$\angle ADB=\angle OAD+\angle AOD=\angle OAD+\angle AOB=\alpha+60^\circ$

△BCD において

$\angle ADB=\angle DBC+\angle DCB=50^\circ+30^\circ=80^\circ$

よって　$\alpha+60^\circ=80^\circ$

すなわち　$\alpha=20^\circ$

(2)　線分 BD は円の直径であるから　$\angle BAD=90^\circ$

よって　$\alpha=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

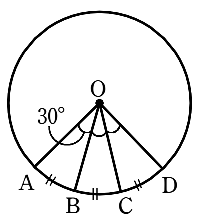
また，線分 AC は円の直径であるから　$\angle ABC=90^\circ$

△ABC の内角の和は 180° であるから　$\beta=180^\circ-90^\circ-60^\circ=30^\circ$

(3)　円の中心を O とすると，円周角の定理により

$\angle AOB=30^\circ$ であるから

$\angle AOC=2\times30^\circ=60^\circ$，$\angle AOD=3\times30^\circ=90^\circ$



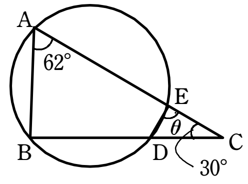
よって

$\alpha=\angle AGC=\dfrac{1}{2}\angle AOC=30^\circ$

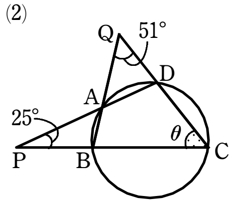
$\beta=\angle AED=\dfrac{1}{2}\angle AOD=45^\circ$

$\boxed{26}$ 下の図において，角 θ を求めよ。

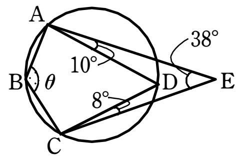
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　88°　(2)　52°　(3)　124°

解説

(1)　△ABC において　$\angle B=180^\circ-(62^\circ+30^\circ)=88^\circ$

四角形 ABDE は円に内接しているから

$\theta=\angle B$　　よって　$\theta=88^\circ$

(2)　△PCD の外角から

$\angle ADQ=\theta+25^\circ$

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle QAD=\theta$

よって，△QAD において

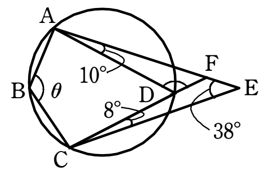
$51^\circ+\theta+(\theta+25^\circ)=180^\circ$

ゆえに　$\theta=52^\circ$

(3)　直線 CD と AE の交点を F とすると，

△ECF の外角から

$\angle AFD=8^\circ+38^\circ=46^\circ$



四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle ADF=\theta$

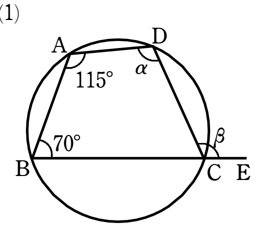
よって，△ADF において

$10^\circ+\theta+46^\circ=180^\circ$

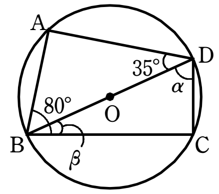
ゆえに　$\theta=124^\circ$

$\boxed{27}$ 下の図において，角 α，β を求めよ。ただし，O は円の中心とする。[各 10 点]

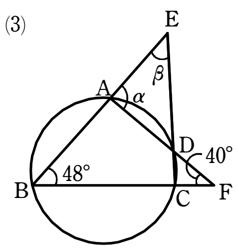
(1)



(2)　$\angle ABC=80^\circ$



(3)



解答　(1)　$\alpha=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-70^\circ=110^\circ$，　$\beta=\angle BAD=115^\circ$

(2)　$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

よって　$\alpha=100^\circ-35^\circ=65^\circ$

$\angle BCD=90^\circ$ であるから　$\beta=180^\circ-(65^\circ+90^\circ)=25^\circ$

(3)　$\alpha=48^\circ+40^\circ=88^\circ$

$\angle ADE=\angle ABC=48^\circ$ であるから　$\beta=180^\circ-(88^\circ+48^\circ)=44^\circ$

解説

(1)　$\alpha=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-70^\circ=110^\circ$，　$\beta=\angle BAD=115^\circ$

(2)　$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

よって　$\alpha=100^\circ-35^\circ=65^\circ$

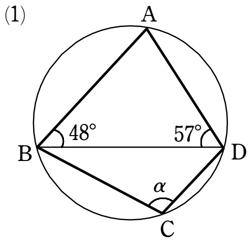
$\angle BCD=90^\circ$ であるから　$\beta=180^\circ-(65^\circ+90^\circ)=25^\circ$

(3)　$\alpha=48^\circ+40^\circ=88^\circ$

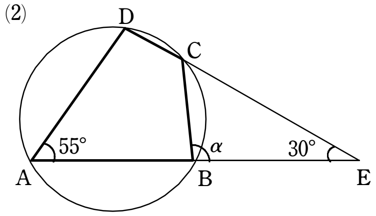
$\angle ADE=\angle ABC=48^\circ$ であるから　$\beta=180^\circ-(88^\circ+48^\circ)=44^\circ$

$\boxed{28}$ 下の図において，α を求めよ。

(1)



(2)



解答　(1)　$\alpha=105^\circ$　(2)　$\alpha=95^\circ$

解説

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから　$\alpha+\angle BAD=180^\circ$

△ABD において　$\angle BAD+(48^\circ+57^\circ)=180^\circ$

よって　$\alpha=48^\circ+57^\circ=105^\circ$

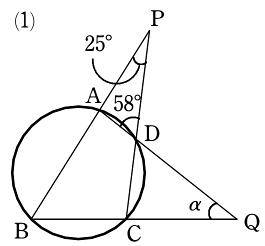
(2)　四角形 ABCD は円に内接するから　$\alpha=\angle ADC$

△AED において　$\angle ADE=180^\circ-(55^\circ+30^\circ)=95^\circ$

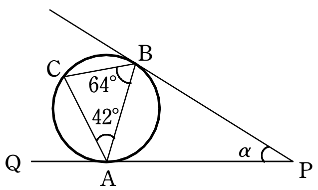
よって　$\alpha=\angle ADC=\angle ADE=95^\circ$

$\boxed{29}$ 右の図において，α を求めよ。ただし，(2) で直線 PA，PB は円の接線で，A，B は接点である。

(1)



(2)



解答　(1)　$\alpha=39^\circ$　(2)　$\alpha=32^\circ$

解説

(1)　$\angle ABC=\angle ADP=58^\circ$

$\angle BAD=25^\circ+58^\circ=83^\circ$ であるから

$\alpha=180^\circ-(58^\circ+83^\circ)=39^\circ$

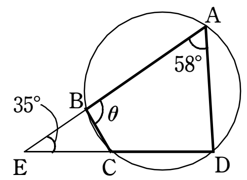
(2)　$\angle ACB=180^\circ-(64^\circ+42^\circ)=74^\circ$

$\angle PAB=\angle ACB$，$\angle PBA=\angle ACB$ であるから

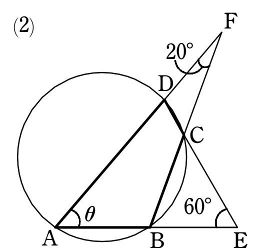
$\alpha=180^\circ-(74^\circ+74^\circ)=32^\circ$

$\boxed{30}$ 下の図で，(1)，(2) の四角形 ABCD，(3) の五角形 ABCDE はそれぞれ円に内接している。角 θ を求めよ。ただし，(3) では AE=CE である。

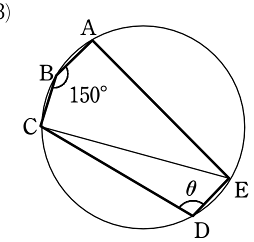
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$\theta=93^\circ$　(2)　$\theta=50^\circ$　(3)　$\theta=105^\circ$

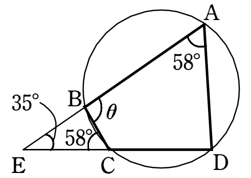
解説

(1)　$\angle BCE=\angle A=58^\circ$

よって　$\theta=\angle E+\angle BCE$

$=35^\circ+58^\circ$

$=93^\circ$



(2)　四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle BCE=\angle DAB=\theta$

よって　$\angle ABF=\angle BCE+\angle BEC$

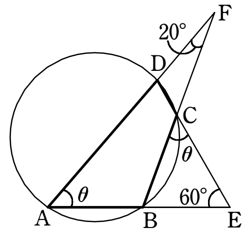
$=\theta+60^\circ$

△ABF において

$\theta+20^\circ+(\theta+60^\circ)=180^\circ$

整理して　$2\theta=100^\circ$

したがって　$\theta=50^\circ$



(3)　対角線 AC を引く。

四角形 ABCE は円に内接するから

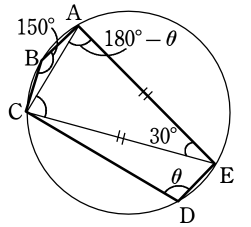
$\angle AEC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

AE＝CE より，△ACE は二等辺三角形であるから

$\angle EAC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AEC)=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$

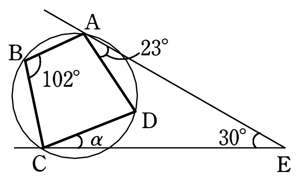
四角形 ACDE は円に内接するから

$\theta=180^\circ-\angle EAC=180^\circ-75^\circ=105^\circ$

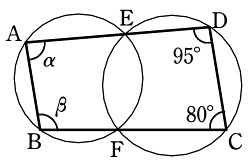


31　下の図において，α，β を求めよ。ただし，(3) では $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ である。

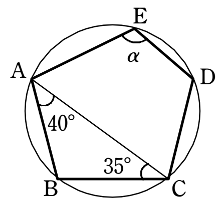
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$\alpha=25^\circ$　(2)　$\alpha=85^\circ$，$\beta=100^\circ$　(3)　$\alpha=110^\circ$

解説

(1)　直線 AD と直線 CE の交点を F とする。

△AFE において

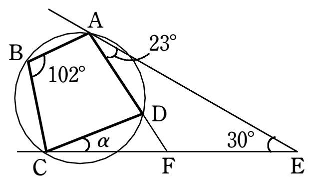
$\angle DFC=\angle EAF+\angle AEF$

$=23^\circ+30^\circ=53^\circ$

四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle CDF=102^\circ$

よって　$\alpha=180^\circ-(102^\circ+53^\circ)=25^\circ$



(2)　E と F を結ぶ。

四角形 ABFE は円に内接するから

$\angle EFC=\angle BAE=\alpha$

また，四角形 EFCD は円に内接するから

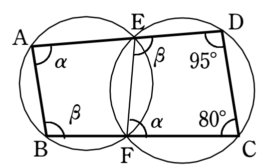
$\angle EFC+\angle EDC=180^\circ$

すなわち　$\alpha+95^\circ=180^\circ$　　よって　$\alpha=85^\circ$

同様にして　$\angle FED=\angle ABF=\beta$

また　$\angle FED+\angle FCD=180^\circ$

すなわち　$\beta+80^\circ=180^\circ$　　よって　$\beta=100^\circ$



(3)　A と D を結ぶ。

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ であるから　$\angle CAD=\angle ACB=35^\circ$

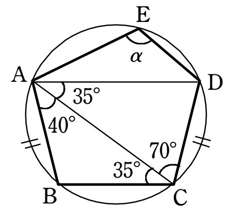
四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$

よって　$\angle ACD=180^\circ-(35^\circ+40^\circ+35^\circ)=70^\circ$

四角形 ACDE は円に内接するから

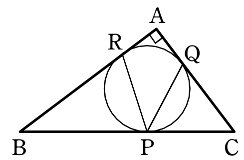
$\alpha=180^\circ-\angle ACD=180^\circ-70^\circ=110^\circ$



32　右の図で，点 P，Q，R は △ABC の内接円と辺との接点である。$\angle A=90^\circ$，BP＝6，PC＝4 であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　∠RPQ の大きさを求めよ。

(2)　内接円の半径を求めよ。



解答　(1)　45°　(2)　2

解説

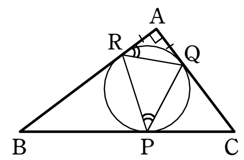
(1)　R と Q を結ぶと，円の接線と弦の作る角の性質により

$\angle RPQ=\angle ARQ$

また，AR＝AQ より，△ARQ は直角二等辺三角形であるから

$\angle ARQ=\frac{1}{2}(180^\circ-90^\circ)=45^\circ$

よって　$\angle RPQ=45^\circ$



(2)　内接円の半径を r とすると　$AR=AQ=r$

また，BR＝BP＝6，CQ＝CP＝4 より

$AB=AR+BR=r+6$

$AC=AQ+CQ=r+4$

直角三角形 ABC において，三平方の定理により

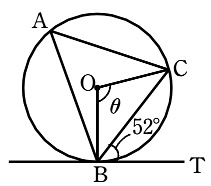
$(6+4)^2=(r+4)^2+(r+6)^2$

整理すると　$r^2+10r-24=0$　すなわち　$(r-2)(r+12)=0$

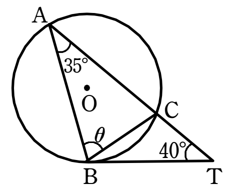
$r>0$ であるから　$r=2$

33　下の図で，BT は円 O の接線，B はその接点である。角 θ を求めよ。

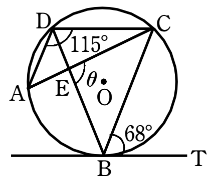
(1)



(2)



(3)



（BC＝BD）

解答　(1)　$\theta=104^\circ$　(2)　$\theta=70^\circ$　(3)　$\theta=89^\circ$

解説

(1)　接弦定理により　$\angle BAC=\angle CBT=52^\circ$

よって　$\theta=2\times\angle BAC=2\times52^\circ=104^\circ$

(2)　接弦定理により　$\angle CBT=\angle BAC=35^\circ$

よって，△ABT において　$35^\circ+(\theta+35^\circ)+40^\circ=180^\circ$

したがって　$\theta=70^\circ$

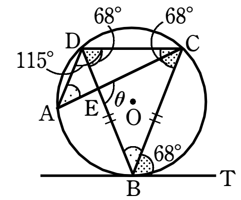
(3)　接弦定理と BC＝BD から

$\angle CBT=\angle BDC=\angle BCD=68^\circ$

また　$\angle DBC=180^\circ-(68^\circ+68^\circ)=44^\circ$

$\angle ACB=\angle ADB=115^\circ-68^\circ=47^\circ$

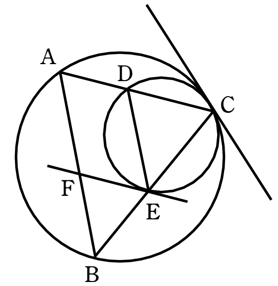
よって　$\theta=180^\circ-(44^\circ+47^\circ)=89^\circ$



34　右の図において，2 つの円は点 C で内接している。

また，△DEC の外接円は直線 EF と接している。

AB＝BC，$\angle BAC=65^\circ$ のとき，∠AFE を求めよ。



解答　115°

解説

2 つの円の共通な接線上で，図のような位置に点 G をとる。

直線 CG は円の接線であるから

$\angle FAC=\angle ECG$

同様に　$\angle EDC=\angle ECG$

よって　$\angle FAC=\angle EDC$

2 直線の同位角が等しいから　FA∥ED　……①

また，AB＝BC より　$\angle FAC=\angle ECD$

よって　$\angle EDC=\angle ECD$

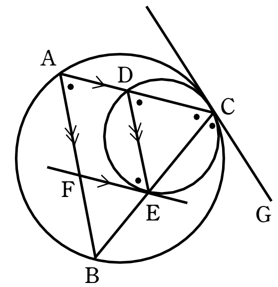
直線 EF は円の接線であるから　$\angle DEF=\angle ECD$

よって　$\angle EDC=\angle DEF$

2 直線の錯角が等しいから　AD∥FE　……②

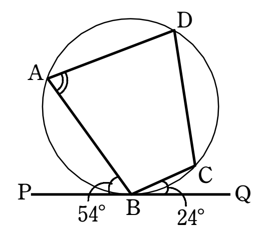
①，② より，四角形 AFED は平行四辺形である。

よって　$\angle AFE=180^\circ-\angle FAD=180^\circ-65^\circ=115^\circ$



35　右の図で，直線 PQ は点 B における円の接線である。

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$，$\angle ABP=54^\circ$，$\angle CBQ=24^\circ$ のとき，∠BAD の大きさを求めよ。



解答　75°

解説

$\angle ABC=180^\circ-(54^\circ+24^\circ)=102^\circ$

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$ であるから

$\angle ABD=\angle DBC$

よって　$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=51^\circ$

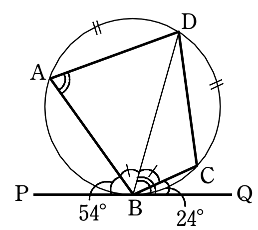
直線 PQ は円の接線であるから

$\angle BAD=\angle DBQ$

$=\angle DBC+\angle CBQ$

$=51^\circ+24^\circ$

$=75^\circ$



別解　（∠ABD＝∠DBC を示した後の解答の別解）

ゆえに　$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=51^\circ$

直線 PQ は円の接線であるから

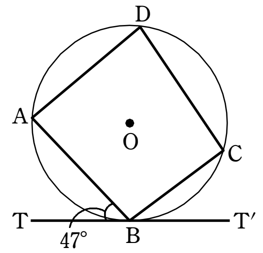
$\angle ADB=\angle ABP=54^\circ$

よって　$\angle BAD=180^\circ-(\angle ABD+\angle ADB)$

$=180^\circ-(51^\circ+54^\circ)$

$=75^\circ$

36 右の図で，四角形 ABCD は円 O に内接し，直線 TT′ は点 B で円 O に接している。$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$，$\angle TBA=47^\circ$ のとき $\angle BCD$，$\angle BAD$ の大きさを求めよ。



解答　順に 94°，86°

解説

直線 TT′ は円 O の接線であるから

$\angle ACB=\angle TBA=47^\circ$

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AB}$ であるから

$\angle ACD=\angle ACB=47^\circ$

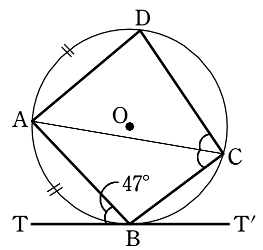
よって　$\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD$

$=47^\circ+47^\circ=94^\circ$

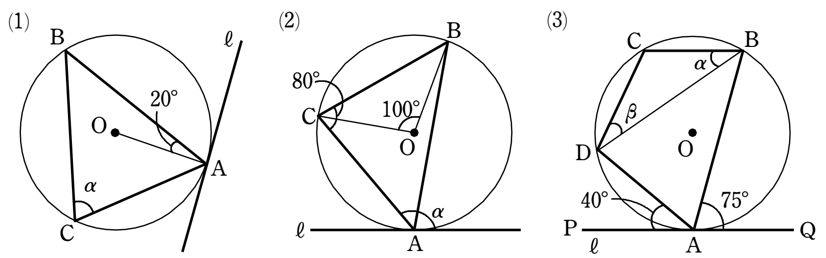
四角形 ABCD は円 O に内接しているから

$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$

ゆえに　$\angle BAD=180^\circ-\angle BCD=180^\circ-94^\circ=86^\circ$



37 次の図において，α，β を求めよ。ただし，ℓ は円 O の接線であり，点 A は接点である。また PQ∥CB である。



解答　(1)　70°　(2)　130°　(3)　$\alpha=35^\circ$，$\beta=30^\circ$

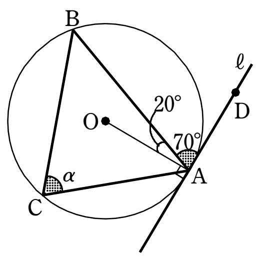
解説

(1)　直線 ℓ 上に点 D を右の図のようにとると

$\angle BAD=\angle OAD-\angle OAB$

$=90^\circ-20^\circ=70^\circ$

よって　$\alpha=\angle BAD=70^\circ$



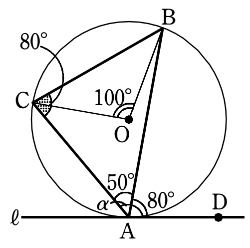
(2)　$\angle CAB=\frac{1}{2}\angle COB=\frac{1}{2}\times 100^\circ=50^\circ$

また，直線 ℓ 上に点 D を右の図のようにとると

$\angle BAD=\angle BCA=80^\circ$

よって　$\alpha=\angle CAB+\angle BAD$

$=50^\circ+80^\circ=130^\circ$



(3)　PQ∥CB から　$\alpha+\angle ABD=75^\circ$

また　$\angle ABD=\angle DAP=40^\circ$

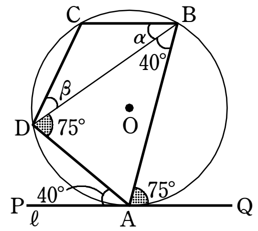
よって　$\alpha=75^\circ-40^\circ=35^\circ$

次に，四角形 ABCD は円に内接するから

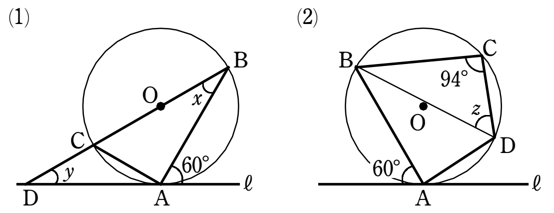
$\angle CDA=180^\circ-75^\circ=105^\circ$

また　$\angle BDA=\angle BAQ=75^\circ$

よって　$\beta=105^\circ-75^\circ=30^\circ$



38 右の図において，x，y，z を求めよ。ただし，ℓ は円 O の接線で，点 A は接点，また，(2) では $\angle ABD=\angle CBD$ である。



解答　(1)　$x=30^\circ$，$y=30^\circ$　(2)　$z=52^\circ$

解説

(1)　直線 ℓ 上に点 E を図のようにとると

$\angle ACB=\angle BAE=60^\circ$

線分 BC は円の直径であるから

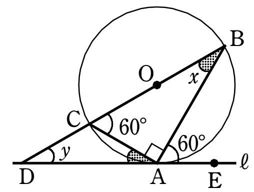
$\angle BAC=90^\circ$

よって，△BCA において

$x=180^\circ-(60^\circ+90^\circ)=30^\circ$

また，△ABD において　$x+y=60^\circ$

よって　$y=60^\circ-x=60^\circ-30^\circ=30^\circ$



(2)　四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle BAD=180^\circ-94^\circ=86^\circ$

直線 ℓ 上に点 E，F を図のようにとると

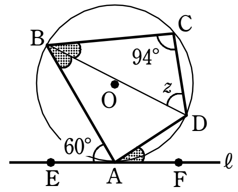
$\angle BDA=\angle BAE=60^\circ$

よって　$\angle ABD=\angle DAF=180^\circ-(60^\circ+86^\circ)=34^\circ$

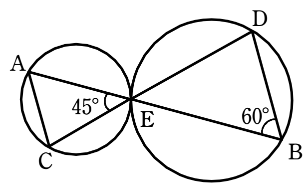
$\angle CBD=\angle ABD=34^\circ$ であるから

$z+34^\circ+94^\circ=180^\circ$

したがって　$z=180^\circ-128^\circ=52^\circ$



39 図のように，点 E で外接する 2 つの円がある。点 E を通る 2 直線が 2 つの円と A，B および C，D で交わっている。$\angle AEC=45^\circ$，$\angle DBE=60^\circ$ のとき，$\angle ACE$ の大きさを求めよ。



解答　75°

解説

右の図のように，点 E における共通接線 FG を引く。

接線と弦の作る角により

$\angle DBE=\angle DEF$

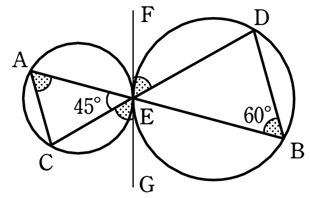
対頂角は等しいから　$\angle DEF=\angle CEG$

接線と弦の作る角により

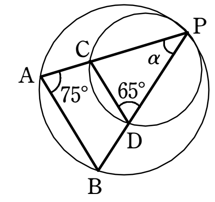
$\angle CAE=\angle CEG$

以上から　$\angle CAE=\angle DBE=60^\circ$

したがって，△ACE において　$\angle ACE=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$



40 右の図において，2 つの円は点 P で内接している。$\angle PAB=75^\circ$，$\angle PDC=65^\circ$ のとき，α を求めよ。



解答　$\alpha=40^\circ$

解説

右の図のように，2 つの円の共通接線 EF を引く。

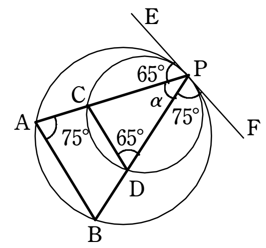
接線と弦の作る角により

$\angle BPF=\angle PAB=75^\circ$

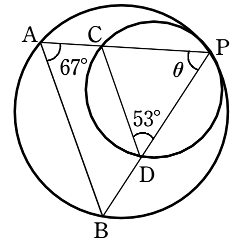
$\angle CPE=\angle PDC=65^\circ$

よって　$\alpha=180^\circ-(\angle BPF+\angle CPE)$

$=180^\circ-(75^\circ+65^\circ)=40^\circ$



41 右の図において，2 つの円は点 P で内接している。$\angle PAB=67^\circ$，$\angle PDC=53^\circ$ のとき，角 θ を求めよ。



解答　60°

解説

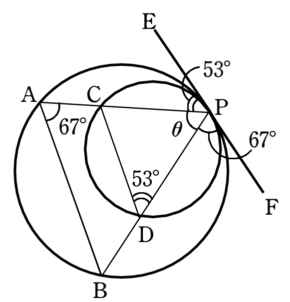
右の図のように，点 P における 2 つの円の共通接線 EF を引くと，接線と弦の作る角の関係から

$\angle CPE=\angle CDP=53^\circ$

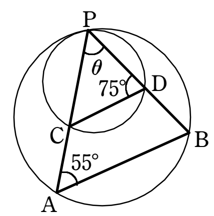
$\angle BPF=\angle BAP=67^\circ$

よって　$\theta=180^\circ-(\angle CPE+\angle BPF)$

$=180^\circ-(53^\circ+67^\circ)=60^\circ$



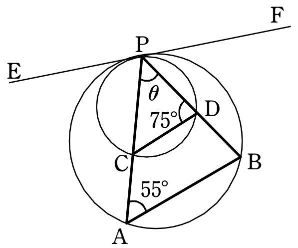
42 右の図において，2 つの円は点 P で内接している。$\angle PAB=55^\circ$，$\angle PDC=75^\circ$ のとき，角 θ を求めよ。



解答　$\theta=50^\circ$

解説

右の図のように，点 P における共通接線 EF を引く。



接線と弦の作る角の関係により

$\angle\mathrm{BPF}=\angle\mathrm{PAB}=55^\circ$

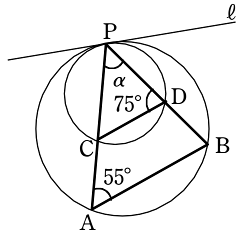
$\angle\mathrm{CPE}=\angle\mathrm{PDC}=75^\circ$

よって　$\theta=180^\circ-\angle\mathrm{BPF}-\angle\mathrm{CPE}$

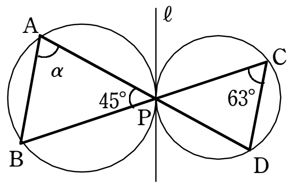
$=180^\circ-55^\circ-75^\circ=50^\circ$

43　下の図で，α を求めよ。ただし，直線 ℓ は 2 つの円の共通接線で，点 P は接点である。

(1)



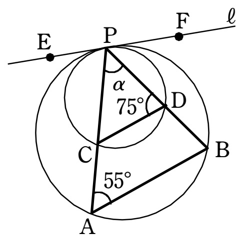
(2)



解答　(1)　$\alpha=50^\circ$　　(2)　$\alpha=72^\circ$

解説

(1)　直線 ℓ 上に右の図のように 2 点 E，F をとる。



円の接線と弦の作る角の性質から

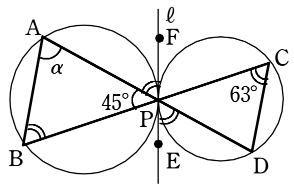
$\angle\mathrm{BPF}=\angle\mathrm{PAB}=55^\circ$

$\angle\mathrm{CPE}=\angle\mathrm{PDC}=75^\circ$

よって　$\alpha=180^\circ-\angle\mathrm{BPF}-\angle\mathrm{CPE}$

$=180^\circ-55^\circ-75^\circ=50^\circ$

(2)　直線 ℓ 上に右の図のように 2 点 E，Fをとる。



右側の円において，接線と弦の作る角の性質から

$\angle\mathrm{DPE}=\angle\mathrm{PCD}=63^\circ$

対頂角は等しいから

$\angle\mathrm{APF}=\angle\mathrm{DPE}=63^\circ$

左側の円において，接線と弦の作る角の性質から

$\angle\mathrm{PBA}=\angle\mathrm{APF}=63^\circ$

よって，△ABP において　$\alpha+63^\circ+45^\circ=180^\circ$

したがって　$\alpha=72^\circ$