1 AB＝6，BC＝5，CA＝4 である △ABC において，∠A および頂点 A における外角の二等分線が直線 BC と交わる点を，それぞれ D，E とする。線分 DE の長さを求めよ。

解答　12

解説

AB : AC＝6 : 4＝3 : 2

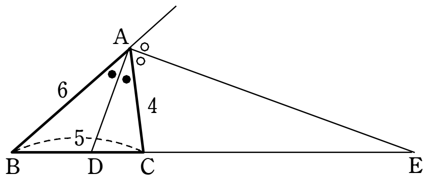
AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC

すなわち　(5－DC) : DC＝3 : 2

よって　　2(5－DC)＝3DC

これを解いて　　DC＝2



また，AE は頂点 A における外角の二等分線であるから

BE : EC＝AB : AC　すなわち　(5＋EC) : EC＝3 : 2

よって　　2(5＋EC)＝3EC

これを解いて　　EC＝10

ゆえに　　DE＝DC＋CE＝2＋10＝12

2 AB＝10，BC＝15，AC＝15 である △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とする。線分 BD の長さを求めよ。

解答　BD＝6

解説

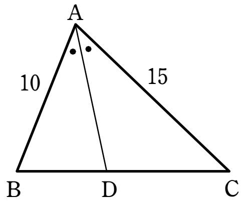
AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC

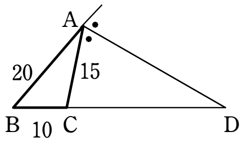
＝10 : 15＝2 : 3

よって，線分 BD の長さは

$$BD=\frac{2}{2+3}BC=\frac{2}{5}\times 15=6$$



3 AB＝20，BC＝10，AC＝15 である △ABC において，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする。線分 BD の長さを求めよ。



解答　40

解説

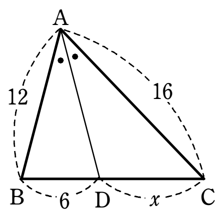
AD は ∠A の外角の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC＝20 : 15＝4 : 3

よって　　$BD=\frac{4}{4-3}BC=4\times 10=40$

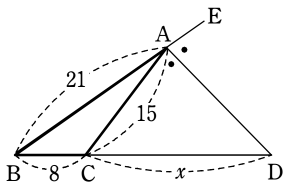
4 次の図において，x の値を求めよ。

(1)



∠BAD＝∠DAC

(2)



∠CAD＝∠DAE

解答　(1)　$x=8$　　(2)　$x=20$

解説

(1)　AD は ∠A の二等分線であるから　　BD : DC＝AB : AC

AB : AC＝12 : 16＝3 : 4 であるから　　6 : x＝3 : 4

よって　　$3x=24$　　　　ゆえに　　$x=8$

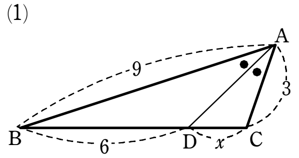
(2)　AD は △ABC の ∠A の外角の二等分線であるから　　BD : DC＝AB : AC

AB : AC＝21 : 15＝7 : 5 であるから　　$(x+8):x=7:5$

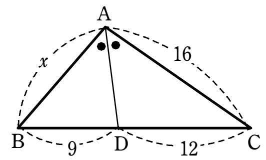
よって　　$7x=5(x+8)$　　　ゆえに　　$x=20$

5 次の図の △ABC において，AD が ∠A の二等分線であるとき，x の値を求めなさい。

(1)



(2)



解答　(1)　$x=2$　　(2)　$x=12$

解説

(1)　BD : DC＝AB : AC から　　6 : x＝9 : 3

よって　　$6\times 3=x\times 9$

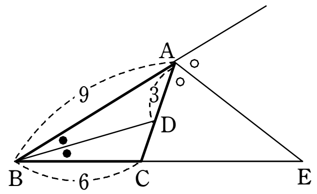
したがって　　$x=2$

(2)　BD : DC＝AB : AC から　　9 : 12＝x : 16

よって　　$9\times 16=12\times x$

したがって　　$x=12$

6 AB＝9，BC＝6 である △ABC の ∠B の二等分線と辺 CA の交点を D とし，頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。AD＝3 であるとき，線分 DC，BE の長さを求めよ。



解答　DC＝2，BE＝$\frac{27}{2}$

解説

BD は ∠B の二等分線であるから

BA : BC＝AD : DC　　すなわち　　9 : 6＝3 : DC

よって　　9DC＝6･3　　　　ゆえに　　DC＝2

AE は頂点 A における外角の二等分線であるから

AB : AC＝BE : EC　……①

ここで　　AB＝9，　AC＝AD＋DC＝3＋2＝5，　EC＝BE－BC＝BE－6

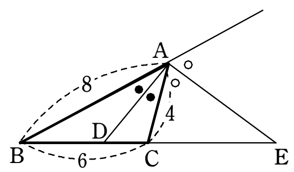
これらを ① に代入して　　9 : 5＝BE : (BE－6)

よって　　9(BE－6)＝5BE　　　　これを解いて　　BE＝$\frac{27}{2}$

7 AB＝8，BC＝6，AC＝4 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線と，辺 BC またはその延長との交点をそれぞれ D，E とする。次のものを求めよ。

(1)　線分 BD の長さ

(2)　線分 BE の長さ



解答　(1)　4　　(2)　12

解説

(1)　AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC＝8 : 4＝2 : 1

よって，線分 BD の長さは

$$BD=\frac{2}{2+1}BC=\frac{2}{3}\times 6=4$$

(2)　AE は ∠A の外角の二等分線であるから

BE : EC＝AB : AC＝8 : 4＝2 : 1　……①

BE＝x とすると，EC＝$x-6$ であるから，① より

$x:(x-6)=2:1$

よって　　　　$x\times 1=(x-6)\times 2$

これを解いて　　$x=12$

したがって　　BE＝12

8 △ABC において AB＝2，AC＝1 とする。∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする。AD＝BD となるとき，△ABC の面積を求めよ。

解答　$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解説

∠BAD＝∠CAD ……① であるから

BD : DC＝AB : AC＝2 : 1

よって，CD＝x とおくと　　AD＝BD＝$2x$

したがって　　BC＝$3x$

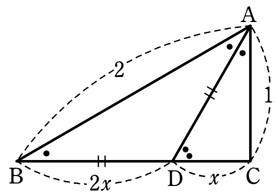
また，∠BAD＝∠ABD であるから，① より

∠CAD＝∠ABD　……②

更に　　∠ADC＝∠ABD＋∠BAD＝2∠BAD

ゆえに　∠ADC＝∠BAC　……③

②，③ から　　△ADC∽△BAC



よって，CD : CA＝CA : CB から　　$x:1=1:3x$

ゆえに　　$3x^2=1$　　　　$x>0$ であるから　　$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

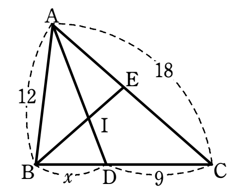
したがって，BC＝$\sqrt{3}$ となるから，∠ACB＝90° である。

ゆえに，△ABC の面積は　　$\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

9 右の図において，点 I は △ABC の内心である。

(1)　x の値を求めなさい。

(2)　AI : ID を求めなさい。



解答　(1)　$x=6$　　(2)　2 : 1

解説

(1)　△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC

よって　　　　$x:9=12:18$

したがって　　$x\times 18=9\times 12$

よって　　　　$x=6$

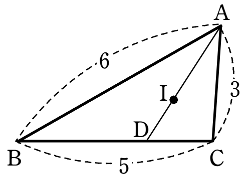
(2)　△BAD において，BI は ∠B の二等分線であるから

$AI : ID = BA : BD = 12 : 6 = 2 : 1$

10 AB＝6，BC＝5，CA＝3 である △ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする。このとき，次のものを求めよ。

(1)　線分 BD の長さ

(2)　AI : ID



解答　(1)　$\dfrac{10}{3}$　　(2)　9 : 5

解説

(1)　AD は ∠BAC の二等分線であるから

$BD : DC = AB : AC = 6 : 3 = 2 : 1$

よって，線分 BD の長さは

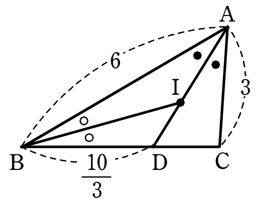
$BD = \dfrac{2}{2+1}BC = \dfrac{2}{3} \times 5 = \dfrac{10}{3}$

(2)　BI は ∠ABD の二等分線であるから

$AI : ID = BA : BD$

$= 6 : \dfrac{10}{3}$

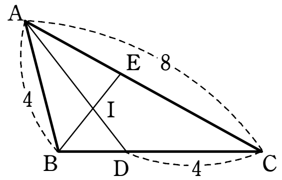
$= 9 : 5$



11 右の図において，点 I は △ABC の内心である。

(1)　線分 BD の長さを求めよ。

(2)　線分 AE の長さを求めよ。



解答　(1)　2　　(2)　$\dfrac{16}{5}$

解説

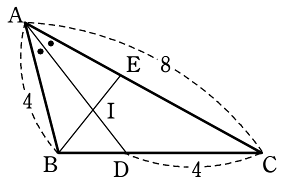
(1)　AD は ∠A の二等分線であるから

$BD : DC = AB : AC$

よって　$BD : 4 = 4 : 8$

ゆえに　$8BD = 16$

よって　$BD = 2$



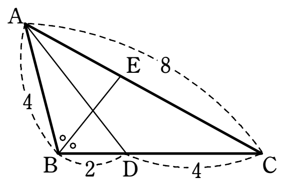
(2)　BE は ∠B の二等分線であるから

$AE : EC = BA : BC$

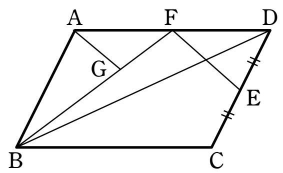
$= 4 : (2+4)$

$= 4 : 6 = 2 : 3$

よって　$AE = AC \times \dfrac{2}{2+3} = 8 \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{16}{5}$



12 平行四辺形 ABCD の辺 CD の中点を E とする。また，△ABD の重心を G とし，直線 BG と辺 AD の交点を F とする。FE＝12 のとき，線分 AG の長さを求めよ。



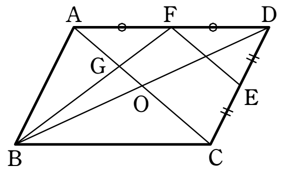
解答　8

解説

重心の性質より　　$AF = FD$

また，DE＝CE であるから，中点連結定理により

$AC = 2FE = 2 \times 12 = 24$



平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とすると，

AO＝CO より

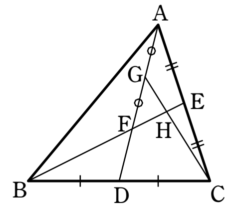
$AO = 24 \times \dfrac{1}{2} = 12$

また，BO＝DO であるから，重心の性質より，G は線分 AO 上にある。

$AG : GO = 2 : 1$ より　　$AG = 12 \times \dfrac{2}{2+1} = 8$

13 右の図の △ABC において，辺 BC，CA の中点を，それぞれ D，E とし，AD と BE の交点を F，線分 AF の中点を G，CG と BE の交点を H とする。BE＝9 のとき，次の線分の長さを求めよ。

(1)　FE　　　　　　　　(2)　FH



解答　(1)　3　　(2)　2

解説

(1)　AD，BE が △ABC の中線であるから，F は △ABC の重心であり

$BF : FE = 2 : 1$

よって　　$FE = \dfrac{1}{3}BE = \dfrac{1}{3} \cdot 9 = 3$

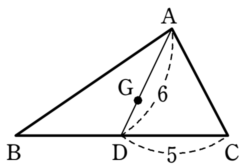
(2)　FE，CG が △AFC の中線であるから，H は △AFC の重心であり

$FH : HE = 2 : 1$

よって　　$FH = \dfrac{2}{3}FE = \dfrac{2}{3} \cdot 3 = 2$

14 右の図において，点 G は △ABC の重心である。次の線分の長さを求めよ。

(1)　BD　　　　　　　　(2)　AG



解答　(1)　5　　(2)　4

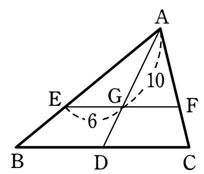
解説

(1)　$BD = DC = 5$

(2)　$AG = \dfrac{2}{2+1}AD = \dfrac{2}{3} \times 6 = 4$

15 右の図において，点 G は △ABC の重心であり，EF∥BC である。

AG＝10，EG＝6 のとき，線分 GD と線分 BC の長さを求めよ。



解答　GD＝5，BC＝18

解説

G は △ABC の重心であるから

$AG : GD = 2 : 1$　すなわち　$10 : GD = 2 : 1$

よって　　$10 \times 1 = GD \times 2$　　　したがって　　$GD = 5$

EF∥BC より　　$EG : BD = AG : AD = 2 : (2+1) = 2 : 3$

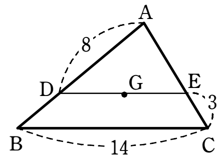
EG＝6 であるから　　$6 : BD = 2 : 3$

よって　　$6 \times 3 = BD \times 2$　　　したがって　　$BD = 9$

D は辺 BC の中点であるから　　$BC = 2BD = 2 \times 9 = 18$

16 右の図において，G は △ABC の重心で，DE∥BC である。このとき，次の線分の長さを求めよ。

(1)　BD　　　　　(2)　AE　　　　　(3)　DG



解答　(1)　BD＝4　　(2)　AE＝6　　(3)　DG＝$\dfrac{14}{3}$

解説

(1)　直線 AG と辺 BC の交点を M とする。

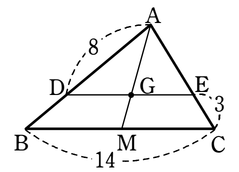
G は △ABC の重心であるから　　$AG : GM = 2 : 1$

DG∥BM から　　$AD : BD = AG : GM$

すなわち　　$8 : BD = 2 : 1$

よって　　$8 \times 1 = BD \times 2$

したがって　　$BD = 4$



(2)　GE∥MC から　　$AE : EC = AG : GM$

すなわち　　$AE : 3 = 2 : 1$

よって　　$AE \times 1 = 3 \times 2$

したがって　　$AE = 6$

(3)　M は辺 BC の中点であるから　　$BM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \times 14 = 7$

DG∥BM から　　$DG : BM = AG : AM$

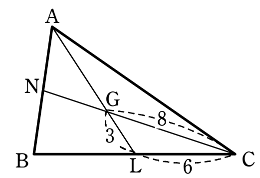
すなわち　　$DG : 7 = 2 : 3$

よって　　$DG \times 3 = 7 \times 2$

したがって　　$DG = \dfrac{14}{3}$

17 右の図において，点 G は △ABC の重心である。次の線分の長さを求めなさい。

(1)　BL　　　　(2)　AG　　　　(3)　GN



解答　(1)　6　　(2)　6　　(3)　4

解説

(1)　点 L は辺 BC の中点であるから

$BL = CL = 6$

(2)　$AG : GL = 2 : 1$ であるから　　$AG : 3 = 2 : 1$

よって　　$AG \times 1 = 3 \times 2$

したがって　　$AG = 6$

(3)　$CG : GN = 2 : 1$ であるから　　$8 : GN = 2 : 1$

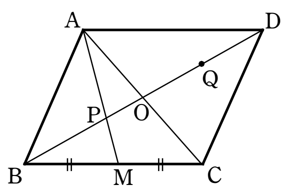
よって　　$8 \times 1 = GN \times 2$

したがって　　$GN = 4$

18 右の図のように，平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O，辺 BC の中点を M とし，AM と BD の交点を P，線分 OD の中点を Q とする。

(1)　線分 PQ の長さは，線分 BD の長さの何倍か。

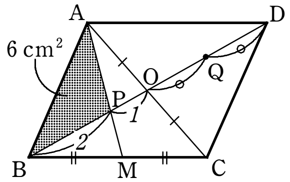
(2)　△ABP の面積が 6 cm^2 のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。



解答　(1)　$\dfrac{5}{12}$ 倍　　(2)　36 cm^2

解説

(1) AO＝CO，BM＝CM より，点 P は △ABC の重心であるから　BP : PO＝2 : 1



$PO=\frac{1}{3}BO$，$OQ=\frac{1}{2}OD$ であるから

$$PQ=PO+OQ=\frac{1}{3}BO+\frac{1}{2}OD$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}BD=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)BD$$
$$=\frac{5}{12}BD$$

したがって　$\frac{5}{12}$ 倍

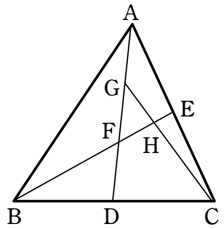
(2) PD＝PO＋OD＝PO＋3PO＝4PO

よって　BP : PD＝2PO : 4PO＝1 : 2

ゆえに　△ABD＝3△ABP＝3×6＝18 (cm^2)

したがって，四角形 ABCD の面積は　2×△ABD＝36 (cm^2)

19 右の図の △ABC で，点 D，E はそれぞれ辺 BC，CA の中点である。また，AD と BE の交点を F，線分 AF の中点を G，CG と BE の交点を H とする。BE＝9 のとき



(1) 線分 FH の長さを求めよ。

(2) 面積について，△EBC＝$\boxed{}$△FBD である。

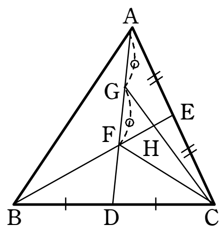
解答　(1) 2　(2) 3

解説

(1) AD，BE は △ABC の中線であるから，その交点 F は △ABC の重心である。

よって　BF : FE＝2 : 1

ゆえに　$FE=\frac{1}{2+1}\times BE=\frac{1}{3}\times 9=3$



また，C と F を結ぶと，CG，FE は △AFC の中線であるから，その交点 H は △AFC の重心である。

よって，FH : HE＝2 : 1 から

$$FH=\frac{2}{2+1}\times FE=\frac{2}{3}\times 3=2$$

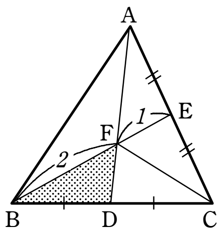
(2) △FBC : △FBD＝BC : BD＝2 : 1

よって　△FBC＝2△FBD

また　△EBC : △FBC＝EB : FB＝3 : 2

ゆえに　$△EBC=\frac{3}{2}△FBC=\frac{3}{2}\times 2△FBD$

$=3△FBD$



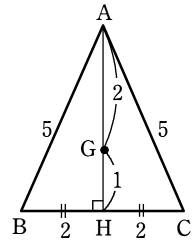
20 △ABC において，AB＝AC＝5，BC＝4 である。△ABC の重心を G，内心を I とするとき，GI の長さを求めよ。

解答　$\frac{\sqrt{21}}{21}$

解説

△ABC は AB＝AC＝5 の二等辺三角形である。

よって，点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと，H は BC の中点である。



△ABH において，三平方の定理により

$$AH=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$$

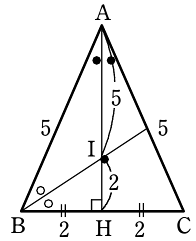
AG : GH＝2 : 1 であるから

$$AG=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\times\sqrt{21}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$$

AH は ∠A の二等分線であるから，内心 I は AH 上にある。

BI は ∠B の二等分線であるから

AI : IH＝AB : BH＝5 : 2

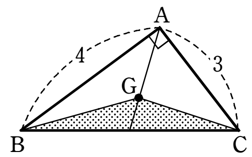


よって　$AI=\frac{5}{7}AH=\frac{5}{7}\times\sqrt{21}=\frac{5\sqrt{21}}{7}$

したがって　GI＝AI－AG

$$=\frac{5\sqrt{21}}{7}-\frac{2\sqrt{21}}{3}=\frac{\sqrt{21}}{21}$$

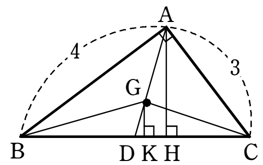
21 ∠A＝90°，AB＝4，AC＝3 である直角三角形 ABC について，その重心を G とするとき，△GBC の面積を求めよ。



解答　2

解説

△ABC の面積は　$\frac{1}{2}\times4\times3=6$

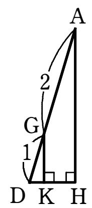


点 G は △ABC の重心であるから，辺 BC の中点を D とすると　AG : GD＝2 : 1

ここで，A から辺 BC に下ろした垂線を AH，G から辺 BC に下ろした垂線を GK とすると，AH∥GK より　AH : GK＝AD : GD＝3 : 1

よって，BC を底辺とするとき，△ABC と △GBC の高さの比は

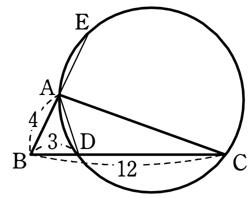
AH : GK＝3 : 1



したがって，△ABC と △GBC の面積の比は 3 : 1 であり

$$△GBC=\frac{1}{3}△ABC=\frac{1}{3}\times6=2$$

22 右の図のような AB＝4，BC＝12 である △ABC において，辺 BC 上に点 D を BD＝3 となるようにとり，辺 AB の A を越える延長と △ADC の外接円との交点を E とする。



(1) AE の長さを求めよ。

(2) AC と DE の交点を P とする。直線 BP と CE の交点を F とするとき，$\frac{CF}{FE}$ の値を求めよ。

解答　(1) 5　(2) $\frac{12}{5}$

解説

(1) 方べきの定理により　BD･BC＝BA･BE

すなわち　3･12＝4･(4＋AE)

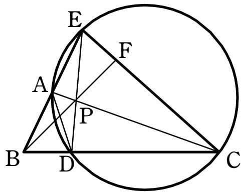
これを解くと　AE＝5

(2) △EBC にチェバの定理を用いると

$$\frac{EA}{AB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FE}=1$$

すなわち　$\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{CF}{FE}=1$

よって　$\frac{CF}{FE}=\frac{12}{5}$



23 (1) 1 辺の長さが 7 の正三角形 ABC がある。辺 AB，AC 上に AD＝3，AE＝6 となるように 2 点 D，E をとる。このとき，BE と CD の交点を F，直線 AF と BC の交点を G とする。線分 CG の長さを求めよ。

(2) △ABC において，辺 AB 上と辺 AC の延長上にそれぞれ点 E，F をとり，AE : EB＝1 : 2，AF : FC＝3 : 1 とする。直線 EF と直線 BC との交点を D とするとき，BD : DC，ED : DF をそれぞれ求めよ。

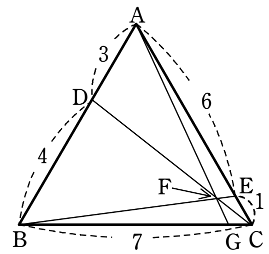
解答　(1) $\frac{7}{9}$　(2) BD : DC＝6 : 1，ED : DF＝4 : 3

解説

(1) AD＝3，DB＝7－3＝4，AE＝6，CE＝7－6＝1

チェバの定理により

$$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}=1$$



ゆえに　$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=1$

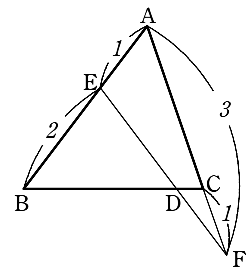
よって　BG＝8GC

ゆえに，BC＝9GC であるから

$$CG=\frac{1}{9}BC=\frac{1}{9}\cdot7=\frac{7}{9}$$

(2) △ABC と直線 EF について，メネラウスの定理により

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$$



よって　$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$

ゆえに　BD＝6DC

すなわち　BD : DC＝6 : 1

△AEF と直線 BC について，メネラウスの定理により

$\frac{ED}{DF}\cdot\frac{FC}{CA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$　　よって　$\frac{ED}{DF}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=1$

ゆえに　3ED＝4DF　すなわち　ED : DF＝4 : 3

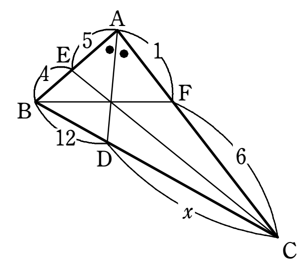
24 △ABC において，AB＝12，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D，辺 AB を 5 : 4 に内分する点を E，辺 AC を 1 : 6 に内分する点を F とする。線分 AD，CE，BF が 1 点で交わるとき，辺 AC の長さを求めよ。

解答　90

解説

△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1 \quad ……①$$



AE : EB＝5 : 4，AF : FC＝1 : 6 であるから

$$\frac{AE}{EB}=\frac{5}{4},\quad \frac{CF}{FA}=\frac{6}{1} \quad ……②$$

AC＝x とおく。

AD は ∠A の二等分線であるから

AB : AC＝BD : DC

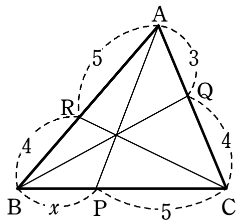
すなわち　12 : x＝BD : DC　　よって　$\frac{BD}{DC}=\frac{12}{x}$ ……③

②，③ を ① に代入して　$\dfrac{12}{x}\cdot\dfrac{6}{1}\cdot\dfrac{5}{4}=1$

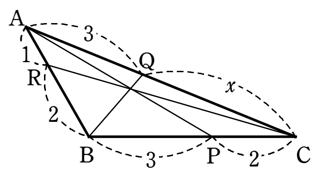
したがって　$x=90$　すなわち　$AC=90$

25 下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



解答　(1)　$x=3$　(2)　$x=4$

解説

(1)　△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち　$\dfrac{x}{5}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}=1$

よって　$x=3$

(2)　△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

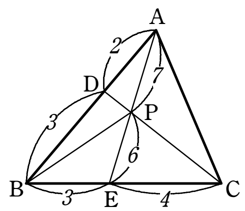
すなわち　$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=1$

よって　$x=4$

26 右の図において，次の値を求めよ。

(1)　$\dfrac{\triangle ABE}{\triangle ABC}$　(2)　$\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ABC}$

(3)　$\dfrac{\triangle PAB}{\triangle PAC}$　(4)　$\dfrac{\triangle PAC}{\triangle ABC}$



解答　(1)　$\dfrac{3}{7}$　(2)　$\dfrac{3}{13}$　(3)　$\dfrac{3}{4}$　(4)　$\dfrac{4}{13}$

解説

(1)　△ABE と △ABC は，A からの高さが等しいから

$$\frac{\triangle ABE}{\triangle ABC}=\frac{BE}{BC}=\frac{3}{3+4}=\frac{3}{7}$$

(2)　△ABP と △ABE は，B からの高さが等しいから

$$\frac{\triangle ABP}{\triangle ABE}=\frac{AP}{AE}=\frac{7}{6+7}=\frac{7}{13}$$

よって　$\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ABC}=\dfrac{\triangle ABE}{\triangle ABC}\cdot\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ABE}=\dfrac{BE}{BC}\cdot\dfrac{AP}{AE}=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{7}{13}=\dfrac{3}{13}$

(3)　△PAB と △PAC は，底辺 AP を共有し，AP と BC との交点が E であるから

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle PAC}=\frac{EB}{EC}=\frac{3}{4}$$

(4)　(3) から　$\triangle PAB=\dfrac{3}{4}\triangle PAC$

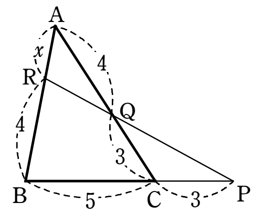
同様に　$\triangle PBC=\dfrac{3}{2}\triangle PAC$

よって　$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PAC=\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}+1\right)\triangle PAC=\dfrac{13}{4}\triangle PAC$

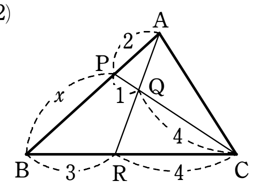
したがって　$\dfrac{\triangle PAC}{\triangle ABC}=\dfrac{4}{13}$

27 下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



解答　(1)　$x=2$　(2)　$x=4$

解説

(1)　△ABC と直線 PR にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち　$\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x}{4}=1$

よって　$x=2$

(2)　△PBC と直線 AR にメネラウスの定理を用いると

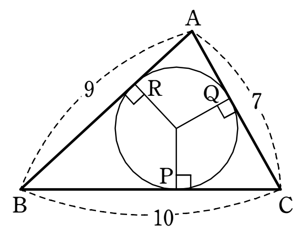
$$\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QP}\cdot\frac{PA}{AB}=1$$

すなわち　$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{2}{x+2}=1$

ゆえに　$x+2=6$

よって　$x=4$

28 AB$=9$，BC$=10$，CA$=7$ である △ABC の内接円と辺 BC，CA，AB の接点を，それぞれ P，Q，R とする。BP の長さを求めよ。



解答　6

解説

BP$=x$ とする。

BR$=$BP から　BR$=x$

よって　AR$=$AB$-$BR$=9-x$

AQ$=$AR から

AQ$=9-x$　…… ①

また　CP$=$BC$-$BP$=10-x$

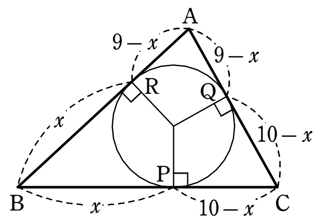
CQ$=$CP から

CQ$=10-x$　…… ②

ここで，AQ$+$CQ$=7$ であるから，①，② により

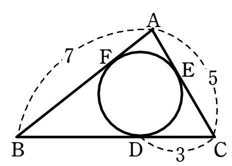
$(9-x)+(10-x)=7$

これを解いて　$x=6$　よって　BP$=6$



29 右の図のように，円が △ABC の各辺に接していて，D，E，F は接点である。

AB$=7$，AC$=5$，DC$=3$ のとき，BD の長さを求めよ。



解答　5

解説

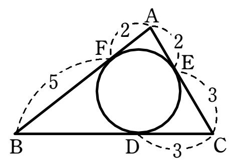
CE$=$CD であるから　CE$=3$

よって　AE$=5-3=2$

AF$=$AE であるから　AF$=2$

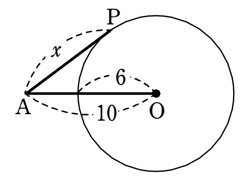
よって　BF$=7-2=5$

BD$=$BF であるから　BD$=5$



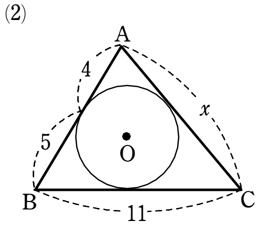
30 次の図において，x の値を求めよ。

(1)



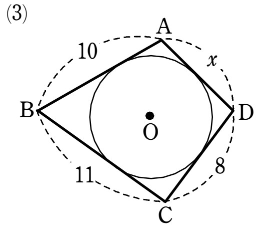
AP は円 O の接線

(2)



AB，BC，CA は円 O の接線

(3)



AB，BC，CD，DA は円 O の接線

解答　(1)　$x=8$　(2)　$x=10$　(3)　$x=7$

解説

(1)　AP は円 O の接線であるから　OP⊥AP

よって，$x^2+6^2=10^2$ から　$x=8$

(2)　AB，BC，CA と円との接点をそれぞれ D，E，F とすると，BE$=$BD$=5$ より

EC$=11-5=6$，CF$=$EC$=6$

また　AF$=$AD$=4$

よって　$x=$AF$+$FC$=4+6=10$

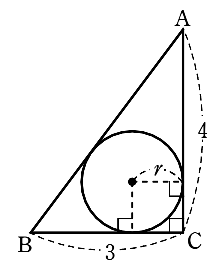
(3)　AB，BC，CD，DA と円との接点をそれぞれ E，F，G，H とすると

AH$=$AE，DH$=$DG，BF$=$BE，CF$=$CG

よって　AD$+$BC$=$AB$+$CD　すなわち　$x+11=10+8$

したがって　$x=7$

31 ∠C$=90°$，BC$=3$，AC$=4$ である直角三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ。



解答　$r=1$

解説

△ABC は直角三角形であるから　AB$^2=$BC$^2+$AC^2

よって　AB$=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

三角形の内接円と辺 AB，BC，CA との接点をそれぞれ P，Q，R とする。

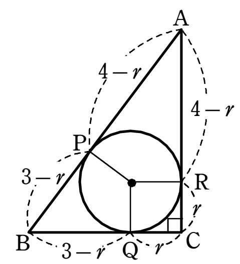
CR$=$CQ，CA$=4$ であるから　AR$=4-r$

AP$=$AR であるから　AP$=4-r$

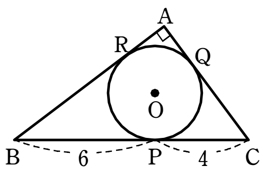
また，BP$=$BQ，BQ$=3-r$ であるから　BP$=3-r$

AB$=$AP$+$BP，AB$=5$ より　$5=(4-r)+(3-r)$

これを解いて　$r=1$



32 $\angle A=90°$ である $\triangle ABC$ の内接円 O と辺 BC，CA，AB の接点を，それぞれ P，Q，R とする。
BP$=6$，CP$=4$ のとき，円 O の半径を求めよ。



解答　2

解説

円 O の半径を r とする。

四角形 AROQ は 1 辺の長さ r の正方形であるから

$AR=r$，$AQ=r$

また，$BR=BP=6$，$CQ=CP=4$ であるから

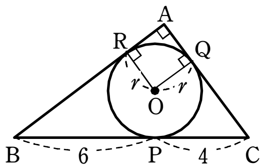
$AB=r+6$，$AC=r+4$

よって，直角三角形 ABC に三平方の定理を適用すると

$(r+6)^2+(r+4)^2=10^2$　すなわち　$r^2+10r-24=0$

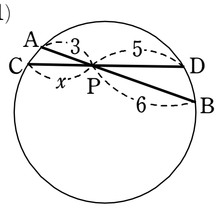
これを解いて　$r=-12,\ 2$

$r>0$ であるから　$r=2$　　答　2

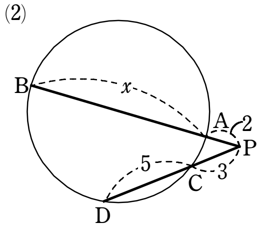


33 下の図において，x の値を求めよ。ただし，(3) において，PT は円の接線で，T はその接点である。[各 10 点]

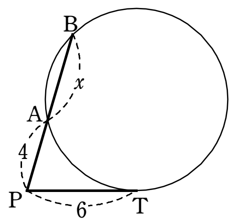
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

よって　$3\cdot 6=x\cdot 5$　　ゆえに　$x=\dfrac{18}{5}$

(2)　方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

よって　$2(2+x)=3(3+5)$　　ゆえに　$4+2x=24$

したがって　$x=10$

(3)　方べきの定理により　PA·PB$=$PT^2

よって　$4(4+x)=6^2$　　ゆえに　$4+x=9$

したがって　$x=5$

解説

(1)　方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

よって　$3\cdot 6=x\cdot 5$　　ゆえに　$x=\dfrac{18}{5}$

(2)　方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

よって　$2(2+x)=3(3+5)$　　ゆえに　$4+2x=24$

したがって　$x=10$

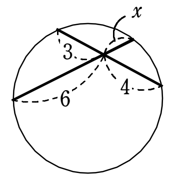
(3)　方べきの定理により　PA·PB$=$PT^2

よって　$4(4+x)=6^2$　　ゆえに　$4+x=9$

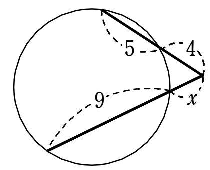
したがって　$x=5$

34 下の図の x の値を求めよ。

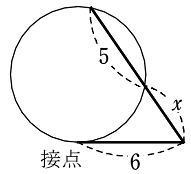
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$x=2$　　(2)　$x=3$　　(3)　$x=4$

解説

(1)　方べきの定理から　$x\cdot 6=3\cdot 4$　　よって　$x=2$

(2)　方べきの定理から　$x(x+9)=4\cdot(4+5)$　　よって　$x^2+9x-36=0$

ゆえに　$(x-3)(x+12)=0$　　$x>0$ であるから　$x=3$

(3)　方べきの定理により　$x(x+5)=6^2$　　よって　$x^2+5x-36=0$

ゆえに　$(x-4)(x+9)=0$　　$x>0$ であるから　$x=4$

35 $\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 D をとり，3 点 A，C，D を通る円 O をかく。円 O と辺 AB が A と異なる点 E で交わり，CD$=4$，BD$=8$，AE$=10$ であるとき，線分 BE の長さを求めよ。

解答　6

解説

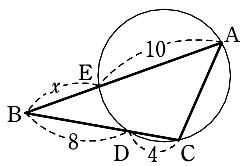
BE$=x$ とおくと，方べきの定理により

$x(x+10)=8\cdot(8+4)$

よって　$x^2+10x-96=0$

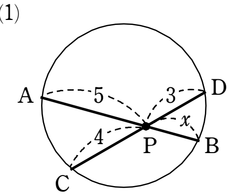
ゆえに　$(x-6)(x+16)=0$

$x>0$ であるから　$x=6$

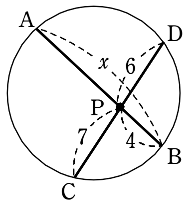


36 下の図において，x の値を求めよ。ただし，(3) の O は円の中心である。

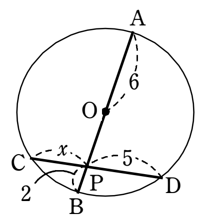
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$x=\dfrac{12}{5}$　　(2)　$x=\dfrac{29}{2}$　　(3)　$x=4$

解説

(1)　方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

よって　$5\cdot x=4\cdot 3$　　ゆえに　$x=\dfrac{12}{5}$

(2)　方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

よって　$(x-4)\cdot 4=7\cdot 6$　　ゆえに　$x=\dfrac{29}{2}$

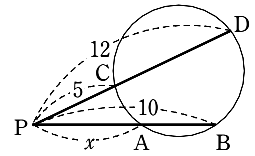
(3)　OP$=6-2=4$，PA$=6+4=10$

方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

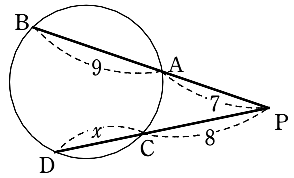
よって　$10\cdot 2=x\cdot 5$　　ゆえに　$x=4$

37 下の図において，x の値を求めよ。ただし，(3) では PC$=$CD とする。

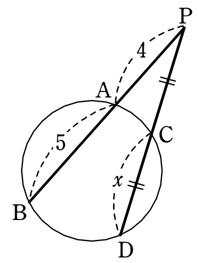
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$x=6$　　(2)　$x=6$　　(3)　$x=3\sqrt{2}$

解説

(1)　方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

よって　$x\cdot 10=5\cdot 12$　　ゆえに　$x=6$

(2)　方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

よって　$7\cdot(7+9)=8\cdot(8+x)$　　ゆえに　$x=6$

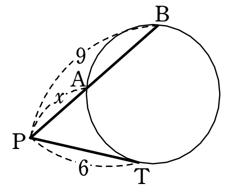
(3)　方べきの定理により　PA·PB$=$PC·PD

よって　$4\cdot(4+5)=x\cdot 2x$　　ゆえに　$x^2=18$

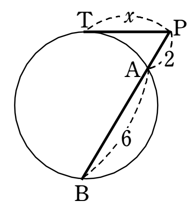
$x>0$ であるから　$x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

38 下の図において，x の値を求めよ。ただし，直線 PT は円の接線，T はその接点，(3) の O は円の中心である。

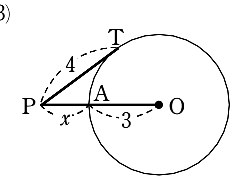
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$x=4$　　(2)　$x=4$　　(3)　$x=2$

解説

(1)　方べきの定理により　PA·PB$=$PT^2

よって　$x\cdot 9=6^2$　　ゆえに　$x=4$

(2)　方べきの定理により　PA·PB$=$PT^2

よって　$2\cdot(2+6)=x^2$　　ゆえに　$x^2=16$

$x>0$ であるから　$x=4$

(3)　PO の延長と円 O の交点を B とする。

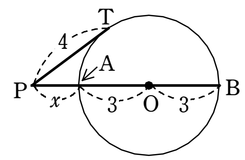
方べきの定理により　PA·PB$=$PT^2

よって　$x\cdot(x+6)=4^2$

ゆえに　$x^2+6x-16=0$

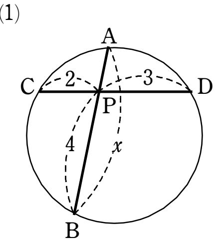
$(x-2)(x+8)=0$

$x>0$ であるから　$x=2$

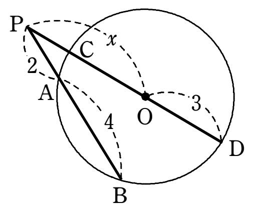


39 下の図において，x の値を求めよ。ただし，(2) の O は円の中心，(3) の直線 PT は円の接線とする。

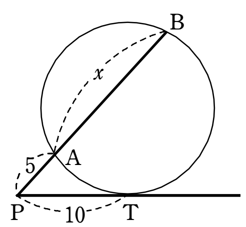
(1)



(2)



(3)



解答　(1)　$x=\dfrac{11}{2}$　　(2)　$x=\sqrt{21}$　　(3)　$x=15$

解説

(1)　方べきの定理から　　PA・PB＝PC・PD　　すなわち　　$(x-4)\cdot 4=2\cdot 3$

整理して　　$4x=22$　　　よって　　$x=\dfrac{11}{2}$

(2)　CO は円 O の半径であるから　　CO＝3　　　よって　　PC＝$x-3$

方べきの定理から　　PA・PB＝PC・PD　　すなわち　　$2\cdot(2+4)=(x-3)(x+3)$

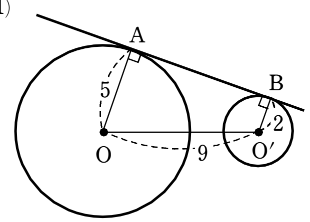
整理して　　$x^2=21$　　　$x>0$ であるから　　$x=\sqrt{21}$

(3)　方べきの定理から　　PA・PB＝PT^2　　すなわち　　$5(5+x)=10^2$

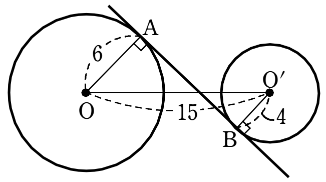
整理して　　$5x=75$　　　よって　　$x=15$

40 下の図において，直線 AB は円 O，O′ に，それぞれ点 A，B で接している。線分 AB の長さを求めよ。

(1)



(2)



解答　(1)　$6\sqrt{2}$　　(2)　$5\sqrt{5}$

解説

(1)　点 O′ から線分 OA に垂線 O′H を下ろすと，
四角形 ABO′H は長方形となり

AB＝HO′，HA＝O′B

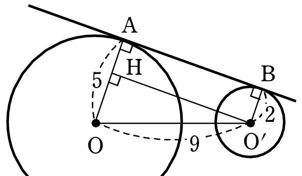
よって　　OH＝OA－HA＝5－2＝3

直角三角形 OO′H に三平方の定理を適用すると

$\mathrm{HO'}=\sqrt{\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2}$

$=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

したがって　　AB＝$6\sqrt{2}$



(2)　点 O′ から線分 OA の延長に垂線 O′H を
下ろすと，四角形 ABO′H は長方形となり

AB＝HO′，HA＝O′B

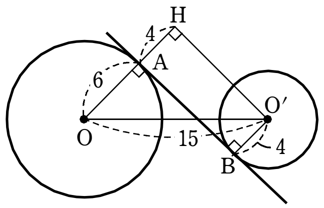
よって　　OH＝OA＋HA＝6＋4＝10

直角三角形 OO′H に三平方の定理を適用すると

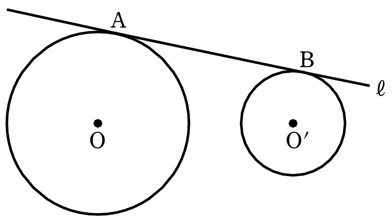
$\mathrm{HO'}=\sqrt{\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2}$

$=\sqrt{15^2-10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

したがって　　AB＝$5\sqrt{5}$



41 右の図において，直線 ℓ は 2 つの円 O，O′ にそれぞれ A，B で接している。円 O の半径は 7，円 O′ の半径は 4，OO′＝15 であるとき，線分 AB の長さを求めよ。[10 点]



解答　中心 O′ から線分 OA に垂線 O′H を下ろす。
四角形 ABO′H は長方形であるから

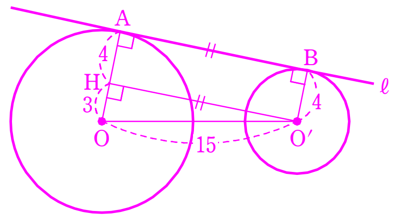
OH＝OA－HA＝OA－O′B

＝7－4＝3

直角三角形 OO′H において，三平方の定理により

$\mathrm{HO'}=\sqrt{15^2-3^2}=\sqrt{216}=6\sqrt{6}$

よって　AB＝HO′＝$6\sqrt{6}$



解説

中心 O′ から線分 OA に垂線 O′H を下ろす。
四角形 ABO′H は長方形であるから

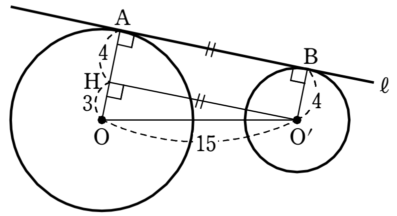
OH＝OA－HA＝OA－O′B

＝7－4＝3

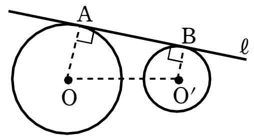
直角三角形 OO′H において，三平方の定理により

$\mathrm{HO'}=\sqrt{15^2-3^2}=\sqrt{216}=6\sqrt{6}$

よって　AB＝HO′＝$6\sqrt{6}$



42 右の図において，直線 ℓ は 2 つの円 O，O′ の共通接線で，A，B は接点である。円 O，O′の半径を，それぞれ 5，3 とし，O，O′ 間の距離を 10 とするとき，線分AB の長さを求めよ。



解答　AB＝$\sqrt{6}$

解説

右の図のように，O′ から線分 OAに垂線 O′H を下ろすと

OH＝OA－O′B

＝5－3＝2

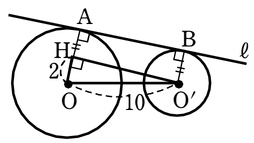
△OO′H は直角三角形であるから

$\mathrm{O'H}^2=\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2$

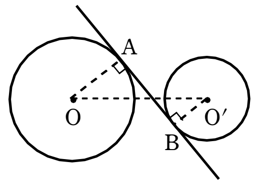
よって

AB＝O′H

$=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$



43 右の図において，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線で，A，B は接点である。円 O，O′ の半径はそれぞれ 5，3 であり，OO′＝10 である。線分 AB の長さを求めよ。



解答　AB＝6

解説

右の図のように，O′ から直線 OA に垂線 O′H を引くと

OH＝OA＋AH＝OA＋BO′＝5＋3＝8

△OO′H は直角三角形であるから

$\mathrm{O'H}^2=\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2$

よって　　AB＝O′H＝$\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$