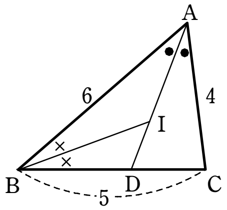
線分比・面積比クイズ

1 AB＝6，BC＝5，CA＝4 である △ABC の内心を I とする。直線 AI と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。

(1) 線分 BD の長さ　　(2) AI : ID

解答 (1) BD＝3　(2) AI : ID＝2 : 1

解説



(1) △ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

$BD : DC = AB : AC$

$= 6 : 4 = 3 : 2$

よって　$BD = \frac{3}{3+2}BC = \frac{3}{5} \times 5 = 3$

(2) △ABD において，BI は ∠B の二等分線であるから

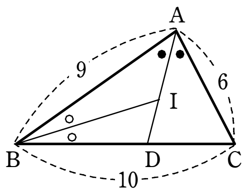
$AI : ID = BA : BD = 6 : 3 = 2 : 1$

2 AB＝9，BC＝10，CA＝6 である △ABC の内心を I とする。直線 AI と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。

(1) 線分 BD の長さ　　(2) AI : ID

解答 (1) 6　(2) 3 : 2

解説



(1) △ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

$BD : DC = AB : AC = 9 : 6 = 3 : 2$

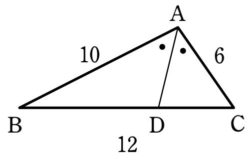
よって　$BD = \frac{3}{3+2}BC = \frac{3}{5} \times 10 = 6$

(2) △ABD において，BI は ∠B の二等分線であるから

$AI : ID = BA : BD = 9 : 6 = 3 : 2$

3 AB＝10，BC＝12，AC＝6 である △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点をD とする。次のものを求めよ。

(1) BD : DC　　(2) 線分 BD の長さ



解答 (1) 5 : 3　(2) $\frac{15}{2}$

解説

(1) AD は ∠A の二等分線であるから

$BD : DC = AB : AC = 10 : 6 = 5 : 3$

(2) $BD = \frac{5}{5+3}BC = \frac{5}{8} \times 12 = \frac{15}{2}$

4 AB＝8，BC＝9，CA＝2 の △ABC において，∠A およびその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点をそれぞれ P，Q とする。

(1) ∠PAQ＝90° であることを証明せよ。

(2) △ABC と △APQ の面積の比を求めよ。

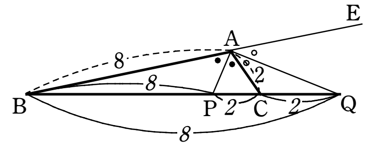
解答 (1) 略　(2) 15 : 8

解説

(1) AP は ∠A の二等分線であるから　$\angle PAC = \frac{1}{2}\angle BAC$

辺 BA の延長上に点 E をとる。

AQ は ∠A の外角の二等分線であるから



$\angle CAQ = \frac{1}{2}\angle CAE$

よって　$\angle PAQ = \angle PAC + \angle CAQ$

$= \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle CAE = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CAE) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

ゆえに　$\angle PAQ = 90^\circ$

(2) AP は ∠A の二等分線であるから

$BP : PC = AB : AC = 8 : 2 = 4 : 1$

よって　$PC = \frac{1}{4+1}BC = \frac{1}{5} \times 9 = \frac{9}{5}$

AQ は ∠A の外角の二等分線であるから

$BQ : QC = AB : AC = 4 : 1$

よって　$BC : CQ = (4-1) : 1 = 3 : 1$

ゆえに　$CQ = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3} \times 9 = 3$

よって　$PQ = PC + CQ = \frac{9}{5} + 3 = \frac{24}{5}$

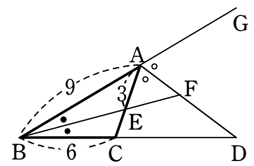
頂点 A から直線 BC に垂線 AH を引くと，△ABC と △APQ は，底辺を線分 BC，PQ としたとき高さが線分 AH で共通となるから

$\triangle ABC : \triangle APQ = BC : PQ = 9 : \frac{24}{5} = 15 : 8$

5 右の図において，

∠ABF＝∠FBD，∠CAD＝∠DAG

のとき，EC，CD，AF : FD，BF : FE を求めよ。



解答 EC＝2，CD＝$\frac{15}{2}$，AF : FD＝2 : 3，BF : FE＝3 : 1

解説

△ABC において，∠B の二等分線と辺 AC の交点が E であるから

$AE : EC = BA : BC$

すなわち　$3 : EC = 9 : 6$

よって　$3 \cdot 6 = EC \cdot 9$　　ゆえに　$EC = 2$

また，△ABC の頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点が D であるから　$BD : DC = AB : AC$

$AC = AE + EC = 3 + 2 = 5$ であるから　$(6 + CD) : CD = 9 : 5$

よって　$(6 + CD) \cdot 5 = CD \cdot 9$　　ゆえに　$CD = \frac{15}{2}$

更に，△ABD において，∠B の二等分線と辺 AD の交点が F であるから

$AF : FD = BA : BD$

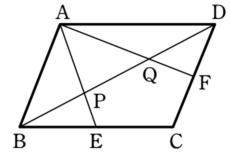
また　$BD = BC + CD = 6 + \frac{15}{2} = \frac{27}{2}$

ゆえに　$AF : FD = 9 : \frac{27}{2} = 2 : 3$

また，△ABE の頂点 A における外角の二等分線と辺 BE の延長との交点が F であるから　$BF : FE = AB : AE$

したがって　$BF : FE = 9 : 3 = 3 : 1$

6 平行四辺形 ABCD の 2 辺 BC，CD の中点をそれぞれ E，F とし，線分 AE，AF と対角線 BD との交点をそれぞれ P，Q とする。

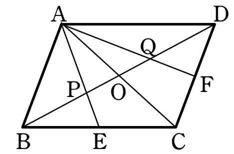


(1) BP＝PQ＝QD が成り立つことを証明せよ。

(2) 面積の比 △APQ : △PBE を求めよ。

解答 (1) 略　(2) 2 : 1

解説



(1) 対角線 AC と BD の交点を O とする。

平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるから，O は線分 AC の中点である。

よって，P は △ABC の重心である。

したがって　$BP : PO = 2 : 1$

同様に，Q は △ACD の重心であるから

$OQ : QD = 1 : 2$

BO＝OD であるから

$BP : PQ : QD = 2 : (1+1) : 2 = 1 : 1 : 1$

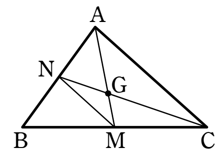
すなわち　$BP = PQ = QD$

(2) BP＝PQ から　$\triangle ABP = \triangle APQ$ …… ①

$AP : PE = 2 : 1$ から　$\triangle ABP : \triangle PBE = 2 : 1$ …… ②

①，② から　$\triangle APQ : \triangle PBE = 2 : 1$

7 右の図の △ABC において，点 M，N をそれぞれ辺 BC，AB の中点とする。このとき，△GNM と △ABC の面積比を求めよ。



解答 1 : 12

解説

点 G は △ABC の重心であるから　$AG : GM = 2 : 1$

よって　$\triangle GNM = \frac{1}{3}\triangle ANM$ …… ①

また，点 N は辺 AB の中点であるから

$\triangle ANM = \frac{1}{2}\triangle ABM$ …… ②

更に，点 M は辺 BC の中点であるから

$\triangle ABM = \frac{1}{2}\triangle ABC$ …… ③

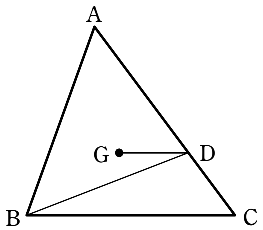
①，②，③ から

$\triangle GNM = \frac{1}{3}\triangle ANM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\triangle ABM$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{1}{12}\triangle ABC$

よって　$\triangle GNM : \triangle ABC = 1 : 12$

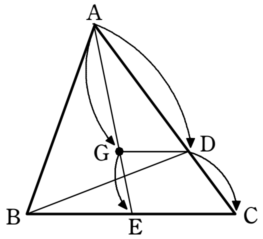
$\boxed{8}$ 右の図の △ABC において，G は △ABC の重心で線分 GD は辺 BC と平行である。
このとき，△DBC と △ABC の面積比を求めよ。



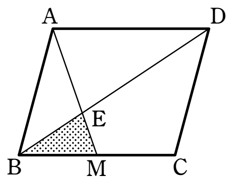
解答　1 : 3

解説

直線 AG と辺 BC の交点を E とする。
GD∥EC であり，G は △ABC の重心であるから
　　AD : DC＝AG : GE＝2 : 1
このとき
　　△DBC : △ABC＝DC : AC
　　　　　　　　　＝1 : 3



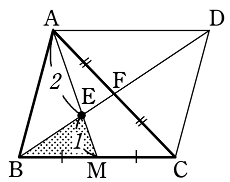
$\boxed{9}$ 平行四辺形 ABCD において，辺 BC の中点を M とし，AM と BD の交点を E とする。
このとき，△BME の面積と平行四辺形 ABCD の面積の比を求めよ。



解答　1 : 12

解説

線分 AC，BD の交点を F とする。
△ABC において，点 E は中線 AM，BF の交点であるから，重心である。
よって　　AE : EM＝2 : 1



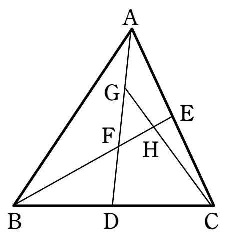
したがって　$\triangle BME=\dfrac{1}{3}\triangle BMA$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\triangle ABC$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}▱ABCD=\dfrac{1}{12}▱ABCD$

ゆえに　　△BME : ▱ABCD＝1 : 12

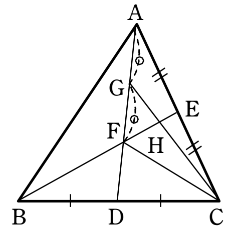
$\boxed{10}$ 右の図の △ABC で，点 D，E はそれぞれ辺 BC，AC の中点である。また，AD と BE の交点を F，線分 AF の中点を G，CG と BE の交点を H とする。
(1)　BE＝6 のとき，線分 FE，FH の長さを求めよ。
(2)　面積比 △EHC : △ABC を求めよ。



解答　(1)　FE＝2，FH＝$\dfrac{4}{3}$　　(2)　1 : 18

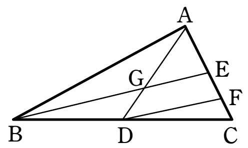
解説

(1)　AD，BE は △ABC の中線であるから，その交点 F は △ABC の重心である。
よって　　BF : FE＝2 : 1
したがって　$FE=\dfrac{1}{2+1}BE=\dfrac{1}{3}\times6=2$
また，点 C と F を結ぶと，CG，FE は △AFC の中線であるから，その交点 H は △AFC の重心である。
よって　　FH : HE＝2 : 1
したがって　$FH=\dfrac{2}{2+1}FE=\dfrac{2}{3}\times2=\dfrac{4}{3}$



(2)　点 E は辺 AC の中点であるから　　△ABC＝2△EBC
また，BF : FE＝2 : 1 より，BE : FE＝3 : 1 であるから
　　△EBC＝3△EFC
さらに，FH : HE＝2 : 1 より，FE : HE＝3 : 1 であるから
　　△EFC＝3△EHC
よって　△ABC＝2△EBC＝2·3△EFC
　　　　　　＝6△EFC＝6·3△EHC
　　　　　　＝18△EHC
したがって　　△EHC : △ABC＝1 : 18

$\boxed{11}$ △ABC において，点 D，E はそれぞれ辺 BC，CA の中点で，BE∥DF である。また，G は AD と BE の交点である。
このとき，GE : DF を求めよ。



解答　2 : 3

解説

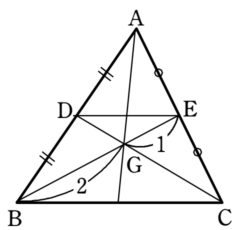
AD，BE は △ABC の中線で，その交点 G は △ABC の重心である。
よって　　AG : AD＝2 : (2＋1)＝2 : 3
GE∥DF であるから　　GE : DF＝AG : AD＝2 : 3

$\boxed{12}$ △ABC の辺 AB の中点を D，辺 CA の中点を E とし，重心を G とする。次の面積比を求めよ。
(1)　△GED : △GDB　　　　(2)　四角形 ADGE : △ABC

解答　(1)　1 : 2　　(2)　1 : 3

解説

(1)　G は △ABC の重心であるから　　GE : GB＝1 : 2
△GED と △GDB は底辺をそれぞれ GE，GB とすると，高さが等しいから
　　△GED : △GDB＝GE : GB＝1 : 2



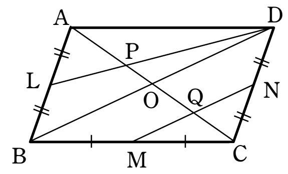
(2)　△GED の面積を S とする。
AD＝DB であるから　　△ADE＝△BED
(1) より △BED＝3△GED＝3S であるから
　　△ADE＝3S
よって　　(四角形 ADGE)＝△ADE＋△GED
　　　　　　　　　　＝3S＋S＝4S　……①
また　　△ABE＝2△ADE＝2×3S＝6S
△ABC＝2△ABE であるから　　△ABC＝2×6S＝12S　……②
①，② から　　四角形 ADGE : △ABC＝4S : 12S＝1 : 3

$\boxed{13}$ 平行四辺形 ABCD の辺 AB，BC，CD の中点をそれぞれ L，M，N とし，対角線 AC と LD，MN との交点をそれぞれ P，Q とする。このとき，PQ : AC を求めよ。

解答　5 : 12

解説

対角線 AC と BD の交点を O とすると
　　AO＝CO，BO＝DO
AO，DL は △ABD の中線であるから，P は △ABD の重心である。
よって　　AP : PO＝2 : 1
したがって



$$PO=\frac{1}{3}AO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AC=\frac{1}{6}AC\quad\cdots\cdots①$$

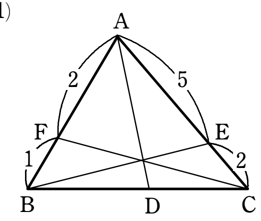
また，M，N はそれぞれ BC，CD の中点であるから，中点連結定理により
　　MN∥BD
よって　　CQ : QO＝CM : MB＝1 : 1
ゆえに　　$OQ=\dfrac{1}{2}CO=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{4}AC$ ……②

①，② から　　$PQ=PO+OQ=\dfrac{1}{6}AC+\dfrac{1}{4}AC=\dfrac{5}{12}AC$

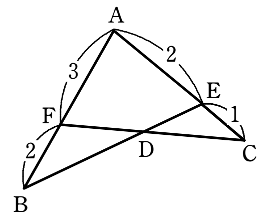
よって　　$PQ : AC=\dfrac{5}{12}AC : AC=5 : 12$

$\boxed{14}$ 右の図において，次の比を求めよ。
(1)　BD : DC
(2)　BD : DE

(1)



(2)



解答　(1)　5 : 4　　(2)　2 : 1

解説

(1)　△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1\qquad すなわち\qquad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{1}=1$$

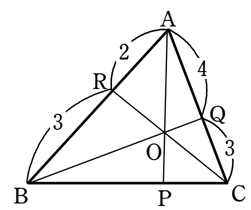
$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{5}{4}$ より　　BD : DC＝5 : 4

(2)　△ABE と直線 FC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BD}{DE}\cdot\frac{EC}{CA}\cdot\frac{AF}{FB}=1\qquad すなわち\qquad \frac{BD}{DE}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$\dfrac{BD}{DE}=2$ より　　BD : DE＝2 : 1

$\boxed{15}$ 右の図において，次の比を求めよ。
(1)　BP : PC
(2)　PO : OA



解答　(1)　2 : 1　　(2)　1 : 2

解説

(1)　△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1\quad すなわち\quad \frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=1$$

$\dfrac{BP}{PC}=2$ より　　BP : PC＝2 : 1

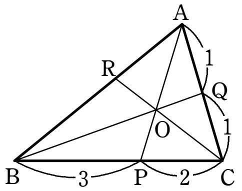
(2) △ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると　$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

(1) より，BC : CP＝3 : 1 であるから　$\frac{3}{1}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{2}{3}=1$

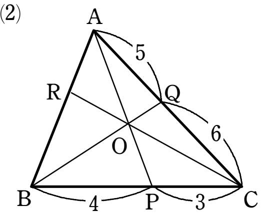
$\frac{PO}{OA}=\frac{1}{2}$ より　　PO : OA＝1 : 2

16 △ABC において，点 P，Q が辺 BC，CA を図のような比に内分するとき，図中の点 R に対して，AR : RB を求めよ。

(1)



(2)



解答　(1)　2 : 3　　(2)　5 : 8

解説

(1) △ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

$\frac{AR}{RB}=\frac{2}{3}$ より　　AR : RB＝2 : 3

(2) △ABC にチェバの定理を用いると

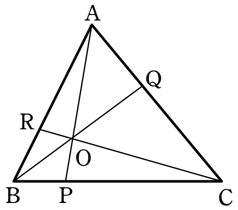
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

$\frac{AR}{RB}=\frac{5}{8}$ より　　AR : RB＝5 : 8

17 △ABC の辺 AB を 2 : 1 に内分する点を R，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を Q とする。線分 BQ と線分 CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1) BP : PC を求めよ。

(2) PO : OA を求めよ。



解答　(1)　BP : PC＝1 : 3　　(2)　PO : OA＝3 : 8

解説

(1) △ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$\frac{BP}{PC}=\frac{1}{3}$ より　　BP : PC＝1 : 3

(2) (1) より　　BC : CP＝4 : 3

よって，△ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{4}{3}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$\frac{PO}{OA}=\frac{3}{8}$ より　　PO : OA＝3 : 8

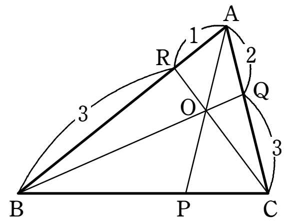
18 △ABC の辺 AB を 1 : 3 に内分する点を R，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を Q とする。線分 BQ と線分 CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1) BP : PC を求めよ。　　(2) 面積比 △OBC : △ABC を求めよ。

解答　(1)　2 : 1　　(2)　1 : 2

解説

(1) △ABC にチェバの定理を用いると



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$

$\frac{BP}{PC}=2$ より　　BP : PC＝2 : 1

(2) (1) より　　BC : CP＝3 : 1

よって，△ABP と直線 CR にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち　$\frac{3}{1}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{1}{3}=1$

$\frac{PO}{OA}=1$ より　　PO : OA＝1 : 1

よって　　PO : PA＝1 : 2

△OBC と △ABC において，辺 BC を共通の底辺とみると，高さの比は PO : PA に等しい。

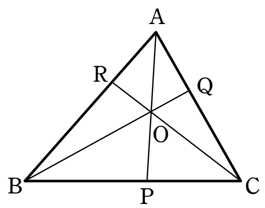
したがって，面積比 △OBC : △ABC は，PO : PA に等しく

△OBC : △ABC＝1 : 2

19 右の図の △ABC において，

AR : RB＝1 : 2，BP : PC＝4 : 3 である。

CQ : QA を求めよ。



解答　CQ : QA＝3 : 2

解説

△ABC にチェバの定理を用いると

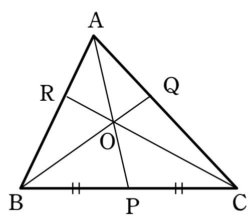
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{4}{3}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{2}$ より　　CQ : QA＝3 : 2

20 右の図の △ABC において，

AQ : QC＝2 : 3，BP＝PC である。

AR : RB を求めよ。



解答　AR : RB＝2 : 3

解説

△ABC にチェバの定理を用いると

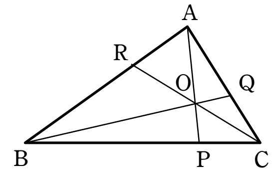
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

$\frac{AR}{RB}=\frac{2}{3}$ より　　AR : RB＝2 : 3

21 △ABC の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を R，辺 AC を 3 : 2 に内分する点を Q とする。線分 BQ と CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1) BP : PC を求めよ。

(2) PO : OA を求めよ。



解答　(1)　BP : PC＝3 : 1　　(2)　PO : OA＝1 : 2

解説

(1) △ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{BP}{PC}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\frac{BP}{PC}=3$ より　　BP : PC＝3 : 1

(2) △ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

(1) より，BC : CP＝4 : 1 であるから

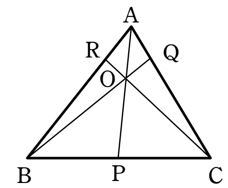
$$\frac{4}{1}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\frac{PO}{OA}=\frac{1}{2}$ より　　PO : OA＝1 : 2

22 △ABC の辺 AB，AC を 1 : 3 に内分する点を，それぞれ R，Q とする。線分 BQ と CR の交点を O とし，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1) BP : PC を求めよ。

(2) △OBC : △ABC を求めよ。



解答　(1)　BP : PC＝1 : 1　　(2)　△OBC : △ABC＝3 : 5

解説

(1) △ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$\frac{BP}{PC}=1$ より　　BP : PC＝1 : 1

(2) △ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

(1) より，BC : CP＝2 : 1 であるから

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$\frac{PO}{OA}=\frac{3}{2}$ より　　PO : OA＝3 : 2

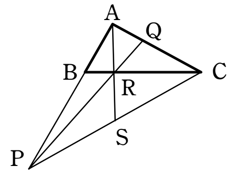
よって　　PO : PA＝3 : 5

△OBC と △ABC は底辺 BC が共通で，高さの比は PO : PA に等しい。

したがって，面積比 △OBC : △ABC は PO : PA に等しく

△OBC : △ABC＝3 : 5

23 △ABCにおいて，辺ABを3 : 2に外分する点をP，辺ACを1 : 2に内分する点をQ，PQとBCの交点をR，ARとPCの交点をSとする。次の比を求めよ。



(1)　PS : SC　[10点]

(2)　PR : RQ　[10点]

(3)　△QRS : △ABC　[15点]

解答　(1)　△APCにチェバの定理を用いると　$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PS}{SC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{PS}{SC}\cdot\frac{2}{1}=1$ より　$\frac{PS}{SC}=1$　　よって　PS : SC$=1:1$

(2)　△APQと直線BCにメネラウスの定理を用いると　$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PR}{RQ}\cdot\frac{QC}{CA}=1$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{PR}{RQ}\cdot\frac{2}{3}=1$ より　$\frac{PR}{RQ}=3$　　よって　PR : RQ$=3:1$

(3)　△ABCと直線PQにメネラウスの定理を用いると　$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{2}{1}=1$ より　$\frac{BR}{RC}=\frac{1}{3}$　　よって　BR : RC$=1:3$

$△QRS=\frac{1}{3}△PRS=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}△PRC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}△PBC$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times2△ABC=\frac{1}{4}△ABC$

したがって　△QRS : △ABC$=1:4$

解説

(1)　△APCにチェバの定理を用いると　$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PS}{SC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{PS}{SC}\cdot\frac{2}{1}=1$ より　$\frac{PS}{SC}=1$　　よって　PS : SC$=1:1$

(2)　△APQと直線BCにメネラウスの定理を用いると　$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PR}{RQ}\cdot\frac{QC}{CA}=1$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{PR}{RQ}\cdot\frac{2}{3}=1$ より　$\frac{PR}{RQ}=3$　　よって　PR : RQ$=3:1$

(3)　△ABCと直線PQにメネラウスの定理を用いると　$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{2}{1}=1$ より　$\frac{BR}{RC}=\frac{1}{3}$　　よって　BR : RC$=1:3$

$△QRS=\frac{1}{3}△PRS=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}△PRC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}△PBC$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times2△ABC=\frac{1}{4}△ABC$

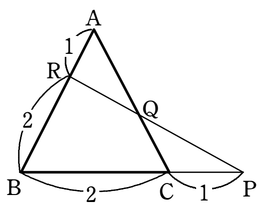
したがって　△QRS : △ABC$=1:4$

24 △ABCにおいて，辺BCを3 : 1に外分する点をP，辺ABを1 : 2に内分する点をRとし，PRとACの交点をQとする。次の比を求めよ。

(1)　CQ : QA　　　(2)　PQ : QR

解答　(1)　2 : 3　　(2)　3 : 2

解説



(1)　△ABCと直線RPにメネラウスの定理を用いると

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

すなわち　$\frac{3}{1}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{1}{2}=1$

$\frac{CQ}{QA}=\frac{2}{3}$ より　　CQ : QA$=2:3$

(2)　△PBRと直線CAにメネラウスの定理を用いると

$\frac{RA}{AB}\cdot\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PQ}{QR}=1$

すなわち　$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{PQ}{QR}=1$

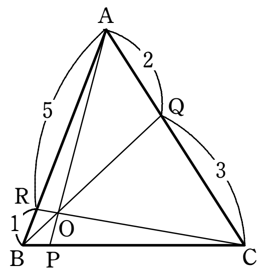
$\frac{PQ}{QR}=\frac{3}{2}$ より　　PQ : QR$=3:2$

25 △ABCの辺AB，AC上にそれぞれ点R，Qがあり，AR : RB$=5:1$，AQ : QC$=2:3$である。線分BQとCRの交点をO，直線AOと辺BCの交点をPとするとき，次の比を求めよ。

(1)　BP : PC　　　(2)　PO : OA　　　(3)　△OBC : △ABC

解答　(1)　2 : 15　　(2)　3 : 17　　(3)　3 : 20

解説



(1)　△ABCにチェバの定理を用いると

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

すなわち　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{1}=1$

$\frac{BP}{PC}=\frac{2}{15}$ より　　BP : PC$=2:15$

(2)　△ABPと直線RCにメネラウスの定理を用いると

$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

(1)より，BC : CP$=17:15$であるから　　$\frac{17}{15}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{5}{1}=1$

$\frac{PO}{OA}=\frac{3}{17}$ より　　PO : OA$=3:17$

(3)　△OBCと△ABCにおいて，辺BCを共通の底辺とみると，高さの比はPO : PAに等しい。

したがって，面積比△OBC : △ABCは，PO : PAに等しい。

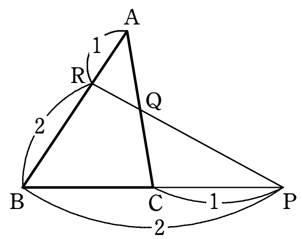
(2)より，PO : PA$=3:20$であるから　　△OBC : △ABC$=3:20$

26 △ABCの辺BCを2 : 1に外分する点をP，辺ABを1 : 2に内分する点をRとする。直線PRと辺CAの交点をQとする。

(1)　CQ : QAを求めよ。　　　(2)　PQ : QRを求めよ。

解答　(1)　1 : 1　　(2)　3 : 1

解説



(1)　△ABCと直線PRにメネラウスの定理を用いると

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

すなわち　$\frac{2}{1}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{1}{2}=1$

$\frac{CQ}{QA}=1$ より　　CQ : QA$=1:1$

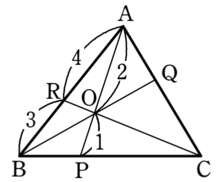
(2)　△PRBと直線ACにメネラウスの定理を用いると

$\frac{PQ}{QR}\cdot\frac{RA}{AB}\cdot\frac{BC}{CP}=1$

すなわち　$\frac{PQ}{QR}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=1$

$\frac{PQ}{QR}=3$ より　　PQ : QR$=3:1$

27 右の図の△ABCにおいて，AR : RB$=4:3$，AO : OP$=2:1$であり，3つの線分AP，BQ，CRは1点Oで交わっている。[(1) 10点　(2) 20点]



(1)　BP : PCを求めよ。

(2)　BO : OQを求めよ。

解答　(1)　△ABPと直線CRにメネラウスの定理を用いると

$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=1$

$\frac{BC}{CP}=\frac{3}{2}$ より　BC : CP$=3:2$　　よって　BP : PC$=1:2$

(2)　△ABCにチェバの定理を用いると

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\frac{1}{2}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{4}{3}=1$

$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{2}$ より　CQ : QA$=3:2$

△QBCと直線APにメネラウスの定理を用いると

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CA}{AQ}\cdot\frac{QO}{OB}=1$　すなわち　$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{QO}{OB}=1$

$\frac{QO}{OB}=\frac{4}{5}$ より　BO : OQ$=5:4$

解説

(1)　△ABPと直線CRにメネラウスの定理を用いると

$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=1$

$\frac{BC}{CP}=\frac{3}{2}$ より　BC : CP$=3:2$　　よって　BP : PC$=1:2$

(2)　△ABCにチェバの定理を用いると

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\frac{1}{2}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{4}{3}=1$

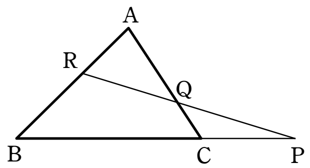
$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{2}$ より　CQ : QA$=3:2$

△QBCと直線APにメネラウスの定理を用いると

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CA}{AQ}\cdot\frac{QO}{OB}=1$　すなわち　$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{QO}{OB}=1$

$\frac{QO}{OB}=\frac{4}{5}$ より　BO : OQ$=5:4$

28 右の図の△ABCにおいて，AR : RB$=2:3$，BC : CP$=2:1$である。



(1)　CQ : QAを求めよ。

(2)　PQ : QRを求めよ。

解答　(1)　CQ : QA$=1:2$　　(2)　PQ : QR$=5:4$

解説

(1)　△ABCと直線RPにメネラウスの定理を用いると

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\frac{3}{1}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{2}{3}=1$

$\frac{CQ}{QA}=\frac{1}{2}$ より　　CQ : QA$=1:2$

(2)　△PRBと直線ACにメネラウスの定理を用いると

$\frac{PQ}{QR}\cdot\frac{RA}{AB}\cdot\frac{BC}{CP}=1$　すなわち　$\frac{PQ}{QR}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{1}=1$

$\dfrac{PQ}{QR}=\dfrac{5}{4}$ より　PQ : QR＝5 : 4

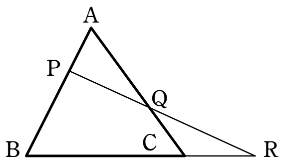
29 右の図において，AP : PB＝1 : 2，PQ : QR＝3 : 4 である。次の比を求めよ。

[10点×3＝30点]

(1) BC : CR

(2) AQ : AC

(3) △APQ : △ABC



解答 (1) △PBR と直線 AC にメネラウスの定理を用いると

$\dfrac{PA}{AB}\cdot\dfrac{BC}{CR}\cdot\dfrac{RQ}{QP}=1$　すなわち　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{BC}{CR}\cdot\dfrac{4}{3}=1$

$\dfrac{BC}{CR}=\dfrac{9}{4}$ より　BC : CR＝9 : 4

(2) △ABC と直線 PR にメネラウスの定理を用いると

$\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BR}{RC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$　すなわち　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{13}{4}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$

$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{8}{13}$ より　AQ : AC＝13 : 21

(3) AP : PB＝1 : 2 より　△APC＝$\dfrac{1}{3}$△ABC

AQ : AC＝13 : 21 より　△APQ＝$\dfrac{13}{21}$△APC

よって　△APQ＝$\dfrac{13}{21}\times\dfrac{1}{3}$△ABC＝$\dfrac{13}{63}$△ABC

したがって　△APQ : △ABC＝13 : 63

解説

(1) △PBR と直線 AC にメネラウスの定理を用いると

$\dfrac{PA}{AB}\cdot\dfrac{BC}{CR}\cdot\dfrac{RQ}{QP}=1$　すなわち　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{BC}{CR}\cdot\dfrac{4}{3}=1$

$\dfrac{BC}{CR}=\dfrac{9}{4}$ より　BC : CR＝9 : 4

(2) △ABC と直線 PR にメネラウスの定理を用いると

$\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BR}{RC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$　すなわち　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{13}{4}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$

$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{8}{13}$ より　AQ : AC＝13 : 21

(3) AP : PB＝1 : 2 より　△APC＝$\dfrac{1}{3}$△ABC

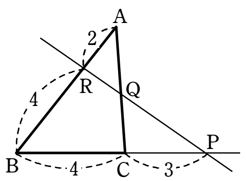
AQ : AC＝13 : 21 より　△APQ＝$\dfrac{13}{21}$△APC

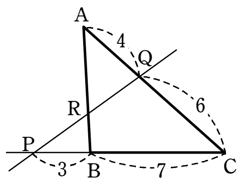
よって　△APQ＝$\dfrac{13}{21}\times\dfrac{1}{3}$△ABC＝$\dfrac{13}{63}$△ABC

したがって　△APQ : △ABC＝13 : 63

30 下の図において，次の比を求めよ。

(1) CQ : QA　　(2) AR : RB





解答 (1) 6 : 7　(2) 20 : 9

解説

(1) メネラウスの定理により

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\dfrac{4+3}{3}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{2}{4}=1$

よって　$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{6}{7}$　したがって　CQ : QA＝6 : 7

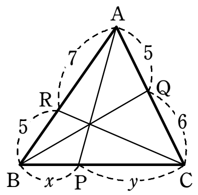
(2) メネラウスの定理により

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\dfrac{3}{3+7}\cdot\dfrac{6}{4}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

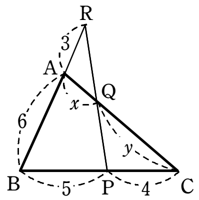
よって　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{20}{9}$　したがって　AR : RB＝20 : 9

31 下の図において，$x : y$ を求めよ。

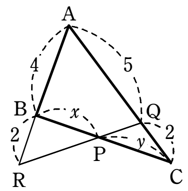
(1)



(2)



(3)



解答 (1) 25 : 42　(2) 5 : 12　(3) 5 : 6

解説

(1) チェバの定理により

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{7}{5}=1$

よって　$\dfrac{x}{y}=\dfrac{25}{42}$　したがって　$x : y=25 : 42$

(2) メネラウスの定理により

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{3}{3+6}=1$

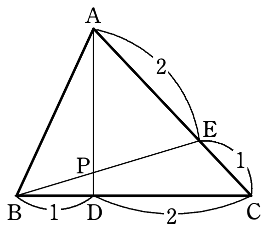
よって　$\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{12}$　したがって　$x : y=5 : 12$

(3) メネラウスの定理により

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4+2}{2}=1$

よって　$\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{6}$　したがって　$x : y=5 : 6$

32 △ABC の辺 BC，CA を 1 : 2 に内分する点をそれぞれ D，E とし，AD と BE の交点を P とするとき，面積の比 △ABP : △ABC を求めよ。　[20点]



解答 △ADC と直線 BE にメネラウスの定理を用いると

$\dfrac{CB}{BD}\cdot\dfrac{DP}{PA}\cdot\dfrac{AE}{EC}=1$

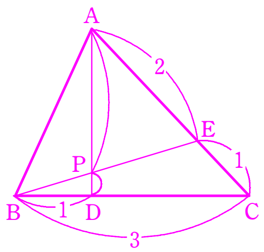
すなわち　$\dfrac{2+1}{1}\cdot\dfrac{DP}{PA}\cdot\dfrac{2}{1}=1$　よって　$\dfrac{DP}{PA}=\dfrac{1}{6}$

ゆえに　△ABP＝$\dfrac{6}{7}$△ABD　……①

また　△ABD＝$\dfrac{1}{3}$△ABC　……②

①，② から　△ABP＝$\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{1}{3}$△ABC＝$\dfrac{2}{7}$△ABC

したがって　△ABP : △ABC＝2 : 7



解説

△ADC と直線 BE にメネラウスの定理を用いると

$\dfrac{CB}{BD}\cdot\dfrac{DP}{PA}\cdot\dfrac{AE}{EC}=1$

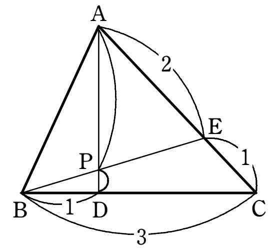
すなわち　$\dfrac{2+1}{1}\cdot\dfrac{DP}{PA}\cdot\dfrac{2}{1}=1$　よって　$\dfrac{DP}{PA}=\dfrac{1}{6}$

ゆえに　△ABP＝$\dfrac{6}{7}$△ABD　……①

また　△ABD＝$\dfrac{1}{3}$△ABC　……②

①，② から　△ABP＝$\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{1}{3}$△ABC＝$\dfrac{2}{7}$△ABC

したがって　△ABP : △ABC＝2 : 7



33 (1) △ABC の辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D，辺 AC を 4 : 3 に内分する点を E とし，BE と CD の交点を O とする。AO と BC の交点を F とするとき，BF : FC を求めよ。

(2) △ABC の辺 AB を 3 : 1 に内分する点を P，辺 BC の中点を Q とし，線分 CP と AQ の交点を R とする。このとき，CR : RP を求めよ。

解答 (1) 8 : 9　(2) 4 : 3

解説

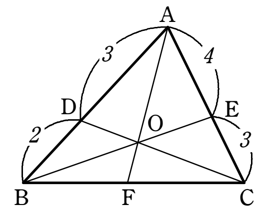
(1) チェバの定理により

$\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

よって　$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{3}{4}=1$

ゆえに　$\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{8}{9}$　すなわち　9BF＝8FC

したがって　BF : FC＝8 : 9



(2) △PBC と直線 AQ について，メネラウスの定理により

$\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RP}\cdot\dfrac{PA}{AB}=1$

よって　$\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{CR}{RP}\cdot\dfrac{3}{4}=1$

ゆえに　$\dfrac{CR}{RP}=\dfrac{4}{3}$　すなわち　3CR＝4RP

したがって　CR : RP＝4 : 3