図形と計量(角度)クイズ

1 (1) △ABCにおいて，$b=3$，$c=\sqrt{2}$，$A=45^\circ$ のとき，a を求めよ。

(2) △ABCにおいて，$a=5$，$b=7$，$c=8$ のとき，B を求めよ。

解答 (1) $a=\sqrt{5}$ (2) $B=60^\circ$

解説

(1) 余弦定理から

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= 3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ \\ &= 9+2-6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから $a=\sqrt{5}$

(2) 余弦定理から $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5}=\dfrac{40}{2\cdot 8\cdot 5}=\dfrac{1}{2}$

よって $B=60^\circ$

2 △ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1) $b=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{3}$，$A=45^\circ$ のとき a と C

(2) $a=2$，$b=\sqrt{6}$，$B=60^\circ$ のとき c

解答 (1) $a=2\sqrt{2}$，$C=120^\circ$ (2) $c=1+\sqrt{3}$

解説

(1) 余弦定理により

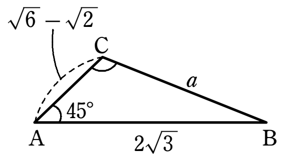
$$\begin{aligned} a^2 &= (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{3}\cos 45^\circ \\ &= 8-4\sqrt{3}+12-12+4\sqrt{3}=8 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから $a=2\sqrt{2}$

また

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{8+8-4\sqrt{3}-12}{8\sqrt{3}-8} \\ &= \frac{-4(\sqrt{3}-1)}{8(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって $C=120^\circ$



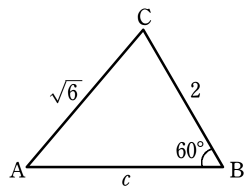
(2) 余弦定理により $(\sqrt{6})^2=c^2+2^2-2c\cdot 2\cos 60^\circ$

よって $6=c^2+4-4c\cdot\dfrac{1}{2}$

整理して $c^2-2c-2=0$

これを解いて $c=1\pm\sqrt{3}$

$c>0$ であるから $c=1+\sqrt{3}$



3 △ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1) $c=3$，$a=4$，$B=120^\circ$ のとき b

(2) $a=\sqrt{21}$，$b=4$，$c=5$ のとき A

(3) $b=\sqrt{2}$，$c=3$，$C=45^\circ$ のとき a

解答 (1) $b=\sqrt{37}$ (2) $A=60^\circ$ (3) $a=1+2\sqrt{2}$

解説

(1) 余弦定理により $b^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos 120^\circ=9+16-24\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=37$

$b>0$ であるから $b=\sqrt{37}$

(2) 余弦定理により $\cos A=\dfrac{4^2+5^2-(\sqrt{21})^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{20}{2\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{1}{2}$

よって $A=60^\circ$

(3) 余弦定理により $3^2=a^2+(\sqrt{2})^2-2a\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ$

すなわち $9=a^2+2-2\sqrt{2}\,a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 整理して $a^2-2a-7=0$

これを解いて $a=1\pm 2\sqrt{2}$ $a>0$ であるから $a=1+2\sqrt{2}$

4 △ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1) $b=4$，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$ のとき a

(2) $a=2$，$c=2\sqrt{2}$，$C=135^\circ$ のとき A

(3) $a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$A=30^\circ$ のとき B

解答 (1) $a=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ (2) $A=30^\circ$ (3) $B=45^\circ$，135°

解説

(1) 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{4}{\sin 60^\circ}$

よって $a=\dfrac{4\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

(2) 正弦定理により $\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$

よって $\sin A=\dfrac{2\sin 135^\circ}{2\sqrt{2}}=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$C=135^\circ$ より $0^\circ<A<45^\circ$ であるから $A=30^\circ$

(3) 正弦定理により $\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin B}$

よって $\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}\sin 30^\circ}{2}=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$A=30^\circ$ より $0^\circ<B<150^\circ$ であるから $B=45^\circ$，135°

5 △ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1) $B=70^\circ$，$C=50^\circ$，$a=10$ のとき，外接円の半径 R

(2) $A=120^\circ$，外接円の半径 $R=8$ のとき a

(3) $a=5\sqrt{3}$，外接円の半径 $R=5$ のとき A

解答 (1) $R=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ (2) $a=8\sqrt{3}$ (3) $A=60^\circ$，120°

解説

(1) $A=180^\circ-(70^\circ+50^\circ)=60^\circ$

正弦定理により $\dfrac{10}{\sin 60^\circ}=2R$

よって $R=\dfrac{10}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

(2) 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin 120^\circ}=2\cdot 8$

よって $a=2\cdot 8\sin 120^\circ=2\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$

(3) 正弦定理により $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin A}=2\cdot 5$

よって $\sin A=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\cdot 5}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに $A=60^\circ$，120°

6 △ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1) $a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{2}$，$c=1$ のとき A (2) $a=1+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$ のとき B

解答 (1) $A=135^\circ$ (2) $B=60^\circ$

解説

(1) 余弦定理により $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(\sqrt{2})^2+1^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 1}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって $A=135^\circ$

(2) 余弦定理により $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{2^2+(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{2}$

よって $B=60^\circ$

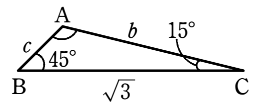
7 次の各場合について，△ABCの残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1) $a=\sqrt{3}$，$B=45^\circ$，$C=15^\circ$ (2) $b=2$，$c=\sqrt{3}+1$，$A=30^\circ$

解答 (1) $A=120^\circ$，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (2) $a=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，$C=105^\circ$

解説

(1) $A=180^\circ-(B+C)=120^\circ$



正弦定理により $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$

よって $b=\dfrac{\sqrt{3}\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}=\sqrt{2}$

余弦定理により $(\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+c^2-2\sqrt{2}\,c\cos 120^\circ$

$c^2+\sqrt{2}c-1=0$ を解いて $c=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

$c>0$ であるから $c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

別解 (後半) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ を用いると $c^2-\sqrt{6}c+1=0$ から

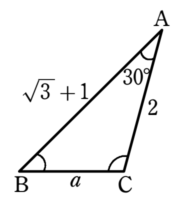
$c=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$ $B>C$ であるから $b>c$

よって $c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= 2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot 2(\sqrt{3}+1)\cos 30^\circ \\ &= 4+(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=2 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから $a=\sqrt{2}$



余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ゆえに $B=45^\circ$

よって $C=180^\circ-(A+B)=105^\circ$

別解 (後半) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ を用いると $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに $B=45^\circ$，135°

$a<b<c$ であるから，∠Cが最大角。

よって $B=45^\circ$

8 次の各場合について，△ABCの残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1) $A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$b=\sqrt{2}$ (2) $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-1$，$C=135^\circ$

解答 (1) $C=75^\circ$，$a=\sqrt{3}$，$c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ (2) $c=2$，$A=30^\circ$，$B=15^\circ$

解説

(1) $C=180°-(A+B)=75°$

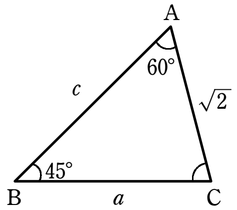
正弦定理により $\dfrac{a}{\sin 60°}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45°}$

よって $a=\dfrac{\sqrt{2}\sin 60°}{\sin 45°}=\sqrt{3}$

余弦定理により $(\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+c^2-2\sqrt{2}\,c\cos 60°$

$c^2-\sqrt{2}c-1=0$ を解いて $c=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

$c>0$ であるから $c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$



別解 (後半) $c=b\cos 60°+a\cos 45°=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

(2) 余弦定理により $c^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\cos 135°$

$=2+(4-2\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-1)=4$

$c>0$ であるから $c=2$

更に，余弦定理により $\cos A=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot 2}=\dfrac{(4-2\sqrt{3})+4-2}{4(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに $A=30°$

よって $B=180°-(C+A)=180°-(135°+30°)=15°$

9 次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1) $b=2\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$A=120°$ (2) $a=8$，$A=45°$，$C=30°$

(3) $a=2$，$b=2\sqrt{3}$，$c=4$ (4) $a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}-1$

解答 (1) $a=3\sqrt{2}$，$B=45°$，$C=15°$ (2) $b=4+4\sqrt{3}$，$c=4\sqrt{2}$，$B=105°$

(3) $A=30°$，$B=60°$，$C=90°$ (4) $A=30°$，$B=135°$，$C=15°$

解説

(1) 余弦定理により $a^2=(2\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\cos 120°=18$

$a>0$ であるから $a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

余弦定理により $\cos B=\dfrac{(3-\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに $B=45°$

よって $C=180°-(120°+45°)=15°$

参考 a を求めた後で B を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

正弦定理により $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 120°}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}$

よって $\sin B=\dfrac{2\sqrt{3}\sin 120°}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$A=120°$ より $0°<B<60°$ であるから $B=45°$

以下同様。

(2) $B=180°-(45°+30°)=105°$

正弦定理により $\dfrac{8}{\sin 45°}=\dfrac{c}{\sin 30°}$

よって $c=\dfrac{8\sin 30°}{\sin 45°}=8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

余弦定理により $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ であるから

$8^2=b^2+(4\sqrt{2})^2-2b\cdot 4\sqrt{2}\cos 45°$

よって $b^2-8b-32=0$

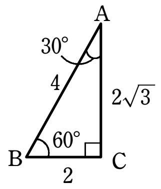
これを解くと $b=4\pm 4\sqrt{3}$

$b>0$ であるから $b=4+4\sqrt{3}$

(3) 余弦定理により $\cos A=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+4^2-2^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって $A=30°$

$\cos B=\dfrac{4^2+2^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 4\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$



よって $B=60°$

ゆえに $C=180°-(30°+60°)=90°$

別解 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$ から $A=30°$，$B=60°$，$C=90°$

(4) 余弦定理により $\cos A=\dfrac{2^2+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{2\cdot 2(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\cdot 2(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって $A=30°$

$\cos B=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって $B=135°$

ゆえに $C=180°-(30°+135°)=15°$

10 次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1) $b=3$，$c=\sqrt{3}$，$B=60°$ (2) $b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30°$

解答 (1) $a=2\sqrt{3}$，$A=90°$，$C=30°$

(2) $a=2$，$A=30°$，$B=120°$ または $a=4$，$A=90°$，$B=60°$

解説

(1) 余弦定理により $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ であるから

$3^2=(\sqrt{3})^2+a^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot a\cos 60°$

よって $a^2-\sqrt{3}a-6=0$

これを解いて $a=\dfrac{\sqrt{3}\pm 3\sqrt{3}}{2}$

ゆえに $a=2\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$

$a>0$ であるから $a=2\sqrt{3}$

余弦定理により $\cos A=\dfrac{3^2+(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}=0$

よって $A=90°$

ゆえに $C=180°-(90°+60°)=30°$

(2) 余弦定理により $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ であるから

$2^2=a^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot a\cdot 2\sqrt{3}\cos 30°$

よって $a^2-6a+8=0$

すなわち $(a-2)(a-4)=0$

ゆえに $a=2$，4

[1] $a=2$ のとき

余弦定理により $\cos A=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+2^2-2^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって $A=30°$

ゆえに $B=180°-(30°+30°)=120°$

[2] $a=4$ のとき

余弦定理により $\cos A=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+2^2-4^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2}=0$

よって $A=90°$

ゆえに $B=180°-(90°+30°)=60°$

以上から $a=2$，$A=30°$，$B=120°$ または $a=4$，$A=90°$，$B=60°$

参考 正弦定理により，先に角の大きさを求めてもよい。

(1) 正弦定理により $\dfrac{3}{\sin 60°}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}$

よって $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}\sin 60°}{3}=\dfrac{1}{2}$

$B=60°$ より $0°<C<120°$ であるから $C=30°$

ゆえに $A=180°-(60°+30°)=90°$

よって，△ABC は $A=90°$ の直角三角形であるから，三平方の定理により

$a=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

(2) 正弦定理により $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin 30°}$

よって $\sin B=\dfrac{2\sqrt{3}\sin 30°}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに $B=60°$，$120°$

[1] $B=60°$ のとき

$A=180°-(60°+30°)=90°$

よって，△ABC は $A=90°$ の直角三角形であるから，三平方の定理により

$a=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

[2] $B=120°$ のとき

$A=180°-(120°+30°)=30°$

よって，$A=C$ であるから，△ABC は $a=c$ の二等辺三角形である。

ゆえに $a=2$

以上から $a=4$，$A=90°$，$B=60°$ または $a=2$，$A=30°$，$B=120°$

11 △ABC において，$B=30°$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$ のとき，A，C，a を求めよ。

解答 $A=105°$，$C=45°$，$a=\sqrt{3}+1$；$A=15°$，$C=135°$，$a=\sqrt{3}-1$

解説

余弦定理により $(\sqrt{2})^2=2^2+a^2-2\cdot 2a\cos 30°$

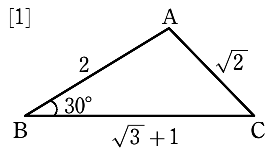
よって $a^2-2\sqrt{3}a+2=0$ ゆえに $a=\sqrt{3}\pm 1$

[1] $a=\sqrt{3}+1$ のとき

$\cos C=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[1]



よって $C=45°$

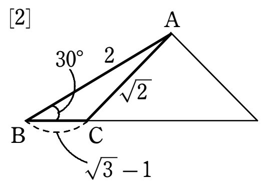
ゆえに $A=180°-(B+C)=180°-(30°+45°)=105°$

[2] $a=\sqrt{3}-1$ のとき

$\cos C=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}$

$=\dfrac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[2]



よって $C=135°$

ゆえに $A=180°-(B+C)=180°-(30°+135°)=15°$

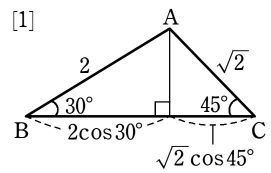
別解 正弦定理により $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30°}=\dfrac{2}{\sin C}$

よって $\sin C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°<C<180°-B=150°$ から

$C=45°$ または $135°$

[1]



[1]　$C=45°$ のとき　$A=180°-(30°+45°)=105°$

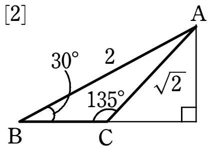
$a=2\cos30°+\sqrt{2}\cos45°=\sqrt{3}+1$

[2]　$C=135°$ のとき　$A=180°-(30°+135°)=15°$

$a=2\cos30°-\sqrt{2}\cos(180°-135°)$

$=2\cos30°+\sqrt{2}\cos135°=\sqrt{3}-1$

[2]



12　△ABCにおいて，$C=45°$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{2}$ のとき，A，B，a を求めよ。

解答　$A=75°$，$B=60°$，$a=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{2}$ または $A=15°$，$B=120°$，$a=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}$

解説

余弦定理により　$(\sqrt2)^2=a^2+(\sqrt3)^2-2a\cdot\sqrt3\cos45°$

よって　$2=a^2+3-2\sqrt3 a\cdot\frac{1}{\sqrt2}$

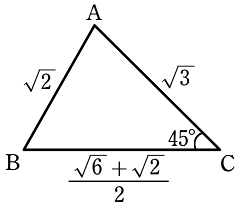
整理して　$a^2-\sqrt6 a+1=0$

これを解いて　$a=\frac{\sqrt6\pm\sqrt2}{2}$

[1]　$a=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{2}$ のとき

$$\cos B=\frac{(\sqrt2)^2+\left(\frac{\sqrt6+\sqrt2}{2}\right)^2-(\sqrt3)^2}{2\cdot\sqrt2\cdot\frac{\sqrt6+\sqrt2}{2}}$$

$$=\frac{2+\frac{8+4\sqrt3}{4}-3}{\sqrt2(\sqrt6+\sqrt2)}=\frac{1+\sqrt3}{2(\sqrt3+1)}=\frac12$$



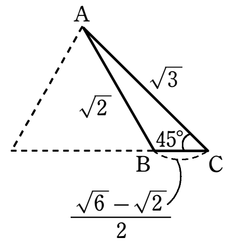
よって　$B=60°$

ゆえに　$A=180°-(B+C)=180°-(60°+45°)=75°$

[2]　$a=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}$ のとき

$$\cos B=\frac{(\sqrt2)^2+\left(\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}\right)^2-(\sqrt3)^2}{2\cdot\sqrt2\cdot\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}}$$

$$=\frac{2+\frac{8-4\sqrt3}{4}-3}{\sqrt2(\sqrt6-\sqrt2)}=\frac{1-\sqrt3}{2(\sqrt3-1)}=-\frac12$$



よって　$B=120°$

ゆえに　$A=180°-(B+C)$

$=180°-(120°+45°)=15°$

[1]，[2]から　$A=75°$，$B=60°$，$a=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{2}$　または

$A=15°$，$B=120°$，$a=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}$

別解　正弦定理により　$\frac{\sqrt3}{\sin B}=\frac{\sqrt2}{\sin45°}$

よって　$\sin B=\frac{\sqrt3\sin45°}{\sqrt2}=\frac{\sqrt3}{2}$

$0°<B<180°-C$ より，$0°<B<135°$ であるから

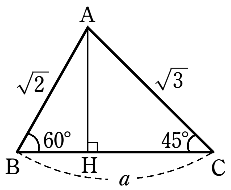
$B=60°$ または $120°$

[1]　$B=60°$ のとき

$A=180°-(B+C)=180°-(60°+45°)=75°$

また　$a=\sqrt2\cos60°+\sqrt3\cos45°$

$=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt3}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2+\sqrt6}{2}$

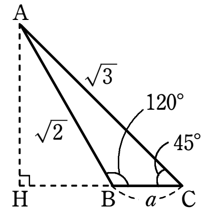


[2]　$B=120°$ のとき

$A=180°-(B+C)=180°-(120°+45°)=15°$

また　$a=\sqrt2\cos120°+\sqrt3\cos45°$

$=-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt3}{\sqrt2}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}$



[1]，[2]から　$A=75°$，$B=60°$，$a=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{2}$

または　$A=15°$，$B=120°$，$a=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}$

13　円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝BC＝1，BD＝$\sqrt7$，DA＝2であるとき，次の各問いに答えよ。

(1)　C を求めよ。　(2)　辺CDの長さを求めよ。

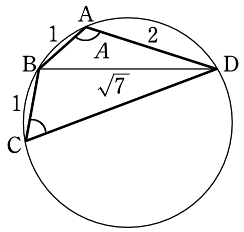
(3)　四角形ABCDの面積 S を求めよ。

解答　(1)　$C=60°$　(2)　CD＝3　(3)　$\frac{5\sqrt3}{4}$

解説

(1)　△ABDにおいて，余弦定理により

$\cos A=\frac{1^2+2^2-(\sqrt7)^2}{2\cdot1\cdot2}=-\frac12$



よって　$A=120°$

四角形ABCDは円に内接するから

$A+C=180°$

よって　$C=180°-120°=60°$

(2)　△BCDにおいて，CD＝x とおくと，余弦定理により

$(\sqrt7)^2=1^2+x^2-2\cdot1\cdot x\cos60°$

ゆえに　$x^2-x-6=0$

よって　$(x+2)(x-3)=0$

$x>0$ であるから　$x=3$　すなわち　CD＝3

(3)　四角形ABCDの面積 S は

$S=\triangle ABD+\triangle BCD=\frac12\cdot1\cdot2\sin120°+\frac12\cdot1\cdot3\sin60°$

$=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{3\sqrt3}{4}=\frac{5\sqrt3}{4}$

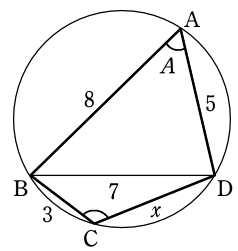
14　円に内接する四角形ABCDがある。AB＝8，BC＝3，BD＝7，AD＝5であるとき，C と辺CDの長さを求めよ。また，四角形ABCDの面積 S を求めよ。

解答　$C=120°$，CD＝5，$S=\frac{55\sqrt3}{4}$

解説

△ABDにおいて，余弦定理により

$\cos A=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot8\cdot5}=\frac12$



よって　$A=60°$

四角形ABCDは円に内接するから

$A+C=180°$

よって　$C=180°-60°=120°$

△BCDにおいて，CD＝x とおくと

余弦定理により　$7^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cos120°$

ゆえに　$x^2+3x-40=0$　よって　$(x-5)(x+8)=0$

$x>0$ であるから　$x=5$　すなわち　CD＝5

四角形ABCDの面積 S は

$S=\triangle ABD+\triangle BCD=\frac12\cdot8\cdot5\sin60°+\frac12\cdot3\cdot5\sin120°$

$=10\sqrt3+\frac{15\sqrt3}{4}=\frac{55\sqrt3}{4}$

15　△ABCにおいて，次が成り立つとき，この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ。

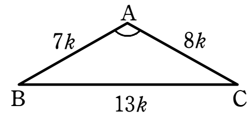
(1)　$\frac{a}{13}=\frac{b}{8}=\frac{c}{7}$　(2)　$\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt2:\sqrt5$

解答　(1)　$A=120°$　(2)　$C=135°$

解説

(1)　$\frac{a}{13}=\frac{b}{8}=\frac{c}{7}$ の値を $k\ (k>0)$ とおくと

$a=13k$，$b=8k$，$c=7k$



辺BCが最大の辺であるから，その対角の∠Aが最大の角である。余弦定理により

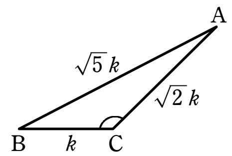
$\cos A=\frac{(8k)^2+(7k)^2-(13k)^2}{2\cdot8k\cdot7k}=\frac{-56k^2}{2\cdot8\cdot7k^2}=-\frac12$

よって，最大の角の大きさは　$A=120°$

(2)　正弦定理により　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

よって　$a:b:c=1:\sqrt2:\sqrt5$

ゆえに，$a=k$，$b=\sqrt2k$，$c=\sqrt5k\ (k>0)$ とおける。



よって，辺ABが最大辺で，その対角の∠Cが最大の角である。余弦定理により

$\cos C=\frac{k^2+(\sqrt2k)^2-(\sqrt5k)^2}{2\cdot k\cdot\sqrt2k}=\frac{-2k^2}{2\sqrt2k^2}=-\frac{1}{\sqrt2}$

したがって，最大の角の大きさは　$C=135°$

16　△ABCにおいて，$\frac{\sin A}{13}=\frac{\sin B}{8}=\frac{\sin C}{7}$ が成り立つとき，次のものを求めよ。

(1)　最も大きい角の大きさ　(2)　最も小さい角の正接

解答　(1)　$A=120°$　(2)　$\tan C=\frac{7\sqrt3}{23}$

解説

与えられた等式から　$\sin A:\sin B:\sin C=13:8:7$

正弦定理により　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

ゆえに　$a:b:c=13:8:7$

よって，ある正の数 k を用いて $a=13k$，$b=8k$，$c=7k$ と表される。

(1)　a が最大の辺であるから，A が最大の角である。

$\cos A=\frac{(8k)^2+(7k)^2-(13k)^2}{2\cdot8k\cdot7k}=-\frac12$

よって，最大の角の大きさは　$A=120°$

(2)　c が最小の辺であるから，C が最小の角である。

$\cos C=\frac{(13k)^2+(8k)^2-(7k)^2}{2\cdot13k\cdot8k}=\frac{23}{26}$

よって　$\tan^2C=\frac{1}{\cos^2C}-1=\left(\frac{26}{23}\right)^2-1=\frac{147}{529}$

$\cos C>0$ より C は鋭角であるから　$\tan C>0$

よって　$\tan C=\sqrt{\frac{147}{529}}=\frac{7\sqrt3}{23}$

参考　$\tan C$ の値は以下のように求めてもよい。

$\tan^2C=\left(\frac{26}{23}\right)^2-1$ までは同様。

$\tan C>0$ であるから　　$\tan C=\sqrt{\left(\dfrac{26}{23}\right)^2-1}=\sqrt{\dfrac{26^2-23^2}{23^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{(26+23)(26-23)}{23^2}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{23}$

$\boxed{17}$ △ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C=5:16:19$ のとき，この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ。

解答　$C=120°$

解説

正弦定理により　　$a:b:c=\sin A : \sin B : \sin C$

よって　　$a:b:c=5:16:19$

ゆえに，$a=5k$，$b=16k$，$c=19k$ $(k>0)$ とおける。

よって，辺 AB が最大辺で，∠C が最大の角である。

余弦定理により　　$\cos C=\dfrac{(5k)^2+(16k)^2-(19k)^2}{2\cdot 5k\cdot 16k}=\dfrac{-80k^2}{2\cdot 5\cdot 16k^2}=-\dfrac{1}{2}$

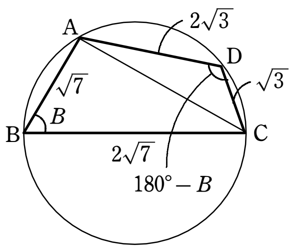
したがって，最大の角の大きさは　　$C=120°$

$\boxed{18}$ 円に内接する四角形 ABCD があり，辺の長さは $\mathrm{AB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{BC}=2\sqrt{7}$，$\mathrm{CD}=\sqrt{3}$，$\mathrm{DA}=2\sqrt{3}$ である。このとき，次のものを求めよ。

(1)　B　　　　(2)　対角線 AC の長さ　　　(3)　四角形 ABCD の面積 S

解答　(1)　$60°$　　(2)　$\mathrm{AC}=\sqrt{21}$　　(3)　$S=5\sqrt{3}$

解説



四角形 ABCD は円に内接するから

$D=180°-B$

(1)　△ABC において，余弦定理により

$\mathrm{AC}^2=(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{7})^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cos B$

$=35-28\cos B$　……①

△ACD において，余弦定理により

$\mathrm{AC}^2=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cos(180°-B)$

$=15+12\cos B$　……②

①，② から　　$35-28\cos B=15+12\cos B$

整理すると　　$40\cos B=20$　　　よって　　$\cos B=\dfrac{1}{2}$　　よって $\mathrm{B}=60°$

(2)　$\cos B=\dfrac{1}{2}$ を ② に代入して　　$\mathrm{AC}^2=15+12\cdot\dfrac{1}{2}=21$

$\mathrm{AC}>0$ であるから　　$\mathrm{AC}=\sqrt{21}$

(3)　$D=180°-60°=120°$

ゆえに　　$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\sin 60°+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\sin 120°$

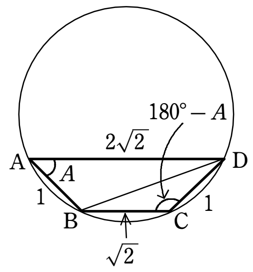
$=7\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

$\boxed{19}$ 四角形 ABCD が円に内接し，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{CD}=1$，$\mathrm{DA}=2\sqrt{2}$ であるとき，次のものを求めよ。

(1)　A　　　　　　　(2)　四角形 ABCD の面積

解答　(1)　$45°$　　(2)　$\dfrac{3}{2}$

解説



(1)　四角形 ABCD は円に内接するから

$C=180°-A$

△ABD において，余弦定理により

$\mathrm{BD}^2=1^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\cos A$

$=9-4\sqrt{2}\cos A$　……①

△BCD において，余弦定理により

$\mathrm{BD}^2=(\sqrt{2})^2+1^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cos(180°-A)$

$=3+2\sqrt{2}\cos A$　……②

①，② から　　$9-4\sqrt{2}\cos A=3+2\sqrt{2}\cos A$

整理して　　$6\sqrt{2}\cos A=6$　　　　よって　　$\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　……③

ゆえに　　$A=45°$

(2)　　$C=180°-A=135°$

したがって，四角形 ABCD の面積を S とすると

$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\sin 45°+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1\sin 135°$

$=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}$