

共分散・相関係数クイズ

- 1 下の表は、ある野球チームの選手 30 人について、身長を x (cm)、体重を y (kg)として、 x , y を調べた結果である。

番号	x	y	番号	x	y	番号	x	y
1	179	91	11	184	96	21	178	80
2	183	84	12	184	89	22	180	78
3	177	74	13	174	77	23	180	87
4	173	75	14	177	76	24	171	73
5	178	83	15	173	70	25	178	81
6	184	78	16	188	90	26	175	78
7	189	95	17	182	79	27	170	66
8	176	74	18	181	84	28	179	83
9	183	85	19	180	86	29	174	73
10	181	75	20	173	77	30	172	70

この 30 人の身長 x (cm)、体重 y (kg) のデータについて、次の数値が計算で得られる。ただし、数値は小数第 3 位を四捨五入している。

x の標準偏差 4.79, y の標準偏差 7.32, x と y の共分散 28.41

これらの数値を用いて、 x と y の相関係数を計算せよ。ただし、計算結果は小数第 3 位を四捨五入せよ。

解答 0.81

解説

$$\text{相関係数は } \frac{28.41}{4.79 \times 7.32} = \frac{28.41}{35.0628} = 0.810 \cdots \approx 0.81$$

- 2 ある野球チームの選手 20 人の身長 x (cm)、体重 y (kg) のデータをとったところ、 x の標準偏差が 5.05, y の標準偏差が 4.26, x と y の共分散が 13.77 であった。 x と y の相関係数を求めよ。ただし、小数第 3 位を四捨五入せよ。

解答 0.64

解説

$$\text{求める相関係数は } \frac{13.77}{5.05 \times 4.26} = \frac{13.77}{21.513} = 0.640 \cdots \approx 0.64$$

- 3 下の表は、10 人の生徒に 10 点満点の 2 種類のテスト A, B を行った得点の結果である。A の得点と B の得点の相関係数を求めよ。

生徒の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A の得点	8	10	6	4	9	7	8	4	5	9
B の得点	4	5	6	7	5	5	3	9	10	6

解答 -0.71

解説

テスト A の得点を x 、テスト B の得点を y とする。

$$x, y \text{ のデータの平均値は } \bar{x} = \frac{70}{10} = 7, \bar{y} = \frac{60}{10} = 6 \text{ である。}$$

番号	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	8	4	1	-2	1	4	-2
2	10	5	3	-1	9	1	-3
3	6	6	-1	0	1	0	0
4	4	7	-3	1	9	1	-3
5	9	5	2	-1	4	1	-2
6	7	5	0	-1	0	1	0
7	8	3	1	-3	1	9	-3
8	4	9	-3	3	9	9	-9
9	5	10	-2	4	4	16	-8
10	9	6	2	0	4	0	0
計	70	60			42	42	-30

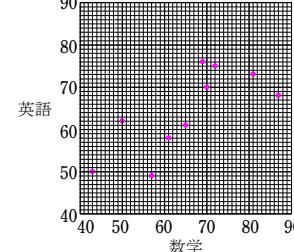
上の表から、相関係数は $\frac{-30}{\sqrt{42 \times 42}} = \frac{-30}{42} \approx -0.71$

- 4 下の表は、10 人の生徒の数学と英語のテストの得点である。[各 25 点]

生徒の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学	57	43	69	87	61	72	50	81	65	70
英語	49	50	76	68	58	75	62	73	61	70

- (1) 下の図に点を書き込んで、このデータの散布図を作れ。
(2) 数学の得点の標準偏差は 12.71、英語の得点の標準偏差は 9.31、数学の得点と英語の得点の共分散は 86.80 である。数学の得点と英語の得点の相関係数を求めよ。ただし、計算結果は小数第 3 位を四捨五入せよ。

解答



(1) 上図

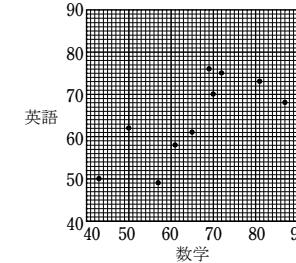
$$(2) \text{ 相関係数は } \frac{86.80}{12.71 \times 9.31} = 0.733 \cdots \approx 0.73$$

解説

- 下の表は、10 人の生徒の数学と英語のテストの得点である。[各 25 点]

生徒の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学	57	43	69	87	61	72	50	81	65	70
英語	49	50	76	68	58	75	62	73	61	70

- (1) 下の図に点を書き込んで、このデータの散布図を作れ。
(2) 数学の得点の標準偏差は 12.71、英語の得点の標準偏差は 9.31、数学の得点と英語の得点の共分散は 86.80 である。数学の得点と英語の得点の相関係数を求めよ。ただし、計算結果は小数第 3 位を四捨五入せよ。



(1) 上図

$$(2) \text{ 相関係数は } \frac{86.80}{12.71 \times 9.31} = 0.733 \cdots \approx 0.73$$

- 5 下の表は、8 人の生徒に 10 点満点の数学と英語のテストを行った得点の結果である。

生徒	1	2	3	4	5	6	7	8
x (数学)	7	8	5	6	10	8	9	3
y (英語)	4	8	3	4	9	7	7	6

数学の得点 x と英語の得点 y の相関係数を求めよ。[20 点]

解答

生徒	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	7	4	0	-2	0	4	0
2	8	8	1	2	1	4	2
3	5	3	-2	-3	4	9	6
4	6	4	-1	-1	1	4	2
5	10	9	3	3	9	9	9
6	8	7	1	1	1	1	1
7	9	7	2	1	4	1	2
8	3	6	-4	0	16	0	0
計	56	48			36	32	22

$$\bar{x} = \frac{56}{8} = 7, \bar{y} = \frac{48}{8} = 6 \quad \text{相関係数は } \frac{22}{\sqrt{36 \times 32}} \approx 0.65$$

解説

生徒	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	7	4	0	-2	0	4	0
2	8	8	1	2	1	4	2
3	5	3	-2	-3	4	9	6
4	6	4	-1	-1	1	4	2
5	10	9	3	3	9	9	9
6	8	7	1	1	1	1	1
7	9	7	2	1	4	1	2
8	3	6	-4	0	16	0	0
計	56	48			36	32	22

$$\bar{x} = \frac{56}{8} = 7, \bar{y} = \frac{48}{8} = 6 \quad \text{相関係数は } \frac{22}{\sqrt{36 \times 32}} \approx 0.65$$

[6] 下の表は、6人の生徒に10点満点の2種類のテストA, Bを行った結果である。A, Bの得点の相関係数を求めよ。また、これらの間にはどのような相関があると考えられるか。

	①	②	③	④	⑤	⑥
テストA	5	7	5	4	3	6
テストB	4	1	3	5	9	2

(単位は点)

解説) 相関係数 -0.95、強い負の相関があると考えられる。

解説)

Aの得点を x 、Bの得点を y とすると

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \times 30 = 5, \bar{y} = \frac{1}{6} \times 24 = 4$$

	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
①	5	4	0	0	0	0	0
②	7	1	2	-3	-6	4	9
③	5	3	0	-1	0	0	1
④	4	5	-1	1	-1	1	1
⑤	3	9	-2	5	-10	4	25
⑥	6	2	1	-2	-2	1	4
計	30	24			-19	10	40

$$\text{上の表から、 } x \text{ と } y \text{ の相関係数は } r = \frac{-19}{\sqrt{10} \sqrt{40}} = -\frac{19}{20} = -0.95$$

よって、Aの得点とBの得点には強い負の相関があると考えられる。

[7] ある2つの変量 x, y のデータについて、 x の分散は108、 y の分散は192、 x と y の共分散は90であった。 x と y の相関係数を求めよ。 [15点]

解説) 相関係数を r とすると

$$r = \frac{90}{\sqrt{108} \sqrt{192}} = \frac{90}{144} = 0.625$$

解説)

相関係数を r とすると

$$r = \frac{90}{\sqrt{108} \sqrt{192}} = \frac{90}{144} = 0.625$$

[8] 下の表は、10人の生徒に10点満点の数学と国語のテストを行った結果である。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
数学	8	6	5	9	4	3	6	7	8	4
国語	3	9	6	5	8	5	1	2	4	7

(1) 数学、国語の得点の相関係数 r を求めよ。ただし、 $\sqrt{15} = 3.9$ とし、必要があれば小数第3位を四捨五入して求めよ。 [20点]

(2) 数学の得点と国語の得点の間には、どのような相関関係があると考えられるか。

[15点]

解説) (1) 数学の得点を x (点)、国語の得点を y (点) とする。

$$x \text{ のデータの平均値は } \bar{x} = \frac{60}{10} = 6$$

y のデータの平均値は $\bar{y} = \frac{50}{10} = 5$

番号	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	8	3	2	-2	4	4	-4
2	6	9	0	4	0	16	0
3	5	6	-1	1	1	1	-1
4	9	5	3	0	9	0	0
5	4	8	-2	3	4	9	-6
6	3	5	-3	0	9	0	0
7	6	1	0	-4	0	16	0
8	7	2	1	-3	1	9	-3
9	8	4	2	-1	4	1	-2
10	4	7	-2	2	4	4	-4
計	60	50			36	60	-20

上の表から、相関係数 r は

$$r = \frac{-20}{\sqrt{36} \sqrt{60}} = \frac{-20\sqrt{15}}{6 \times 30} = \frac{-3.9}{9} \approx -0.43$$

(2) (1) から、数学の得点と国語の得点の間には、弱い負の相関があると考えられる。

解説)

(1) 数学の得点を x (点)、国語の得点を y (点) とする。

$$x \text{ のデータの平均値は } \bar{x} = \frac{60}{10} = 6$$

$$y \text{ のデータの平均値は } \bar{y} = \frac{50}{10} = 5$$

番号	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	8	3	2	-2	4	4	-4
2	6	9	0	4	0	16	0
3	5	6	-1	1	1	1	-1
4	9	5	3	0	9	0	0
5	4	8	-2	3	4	9	-6
6	3	5	-3	0	9	0	0
7	6	1	0	-4	0	16	0
8	7	2	1	-3	1	9	-3
9	8	4	2	-1	4	1	-2
10	4	7	-2	2	4	4	-4
計	60	50			36	60	-20

上の表から、相関係数 r は

$$r = \frac{-20}{\sqrt{36} \sqrt{60}} = \frac{-20\sqrt{15}}{6 \times 30} = \frac{-3.9}{9} \approx -0.43$$

(2) (1) から、数学の得点と国語の得点の間には、弱い負の相関があると考えられる。

[9] 次の表は、同じ種類の5本の木の直径 x cm と高さ y m を測った結果である。この x と y に対する相関係数 r を求めよう。

木の番号	①	②	③	④	⑤
x	26	31	21	24	33
y	15	19	13	16	22

散布図は右の図のようになる。

$$x \text{ と } y \text{ の平均値は、それぞれ } \bar{x} = \frac{135}{5} = 27, \bar{y} = \frac{85}{5} = 17$$

番号	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
①	26	15	-1	-2	1	4	2
②	31	19	4	2	16	4	8
③	21	13	-6	-4	36	16	24
④	24	16	-3	-1	9	1	3
⑤	33	22	6	5	36	25	30
計	135	85			98	50	67

上の表から、相関係数 r は

$$r = \frac{67}{\sqrt{98} \sqrt{50}} = \frac{67}{70} \approx 0.96$$

解説)

[10] 5人の生徒が受けた次の小テストA, Bの得点の間には、正・負どちらの相関があると考えられるか。相関係数 r を計算して答えよ。

生徒の番号	①	②	③	④	⑤
A	6	9	5	1	4
B	8	3	5	9	10

解説) $r = -0.76$ 、負の相関があると考えられる。

解説) 小テストA, Bの得点をそれぞれ x, y とする。

x と y の散布図は右の図のようになる。

x と y の平均値は、それぞれ

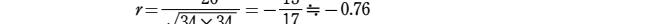
$$\bar{x} = \frac{25}{5} = 5,$$

$$\bar{y} = \frac{35}{5} = 7$$

番号	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
①	6	8	1	1	1	1	1
②	9	3	4	-4	16	16	-16
③	5	5	0	-2	0	4	0
④	1	9	-4	2	16	4	-8
⑤	4	10	-1	3	1	9	-3
計	25	35			34	34	-26

上の表から、相関係数 r は

$$r = \frac{-26}{\sqrt{34} \sqrt{34}} = -\frac{13}{17} \approx -0.76$$



よって、小テスト A, B の得点の間には、負の相関があると考えられる。

- [11] 右の表は、5人の生徒の身長 x (cm)と体重 y (kg)を測定した結果である。
 x と y の共分散 s_{xy} と相関係数 r を求めよ。
 ただし、小数第3位を四捨五入せよ。

生徒の番号	1	2	3	4	5
x (cm)	152	154	164	160	155
y (kg)	44	46	50	48	47

解答 $s_{xy}=8.4$, $r=0.96$

解説

x , y の平均値をそれぞれ \bar{x} , \bar{y} とすると

$$\bar{x}=\frac{1}{5}(152+154+164+160+155)=157 \text{ (cm)}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{5}(44+46+50+48+47)=47 \text{ (kg)}$$

したがって、次の表が得られる。

番号	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	152	44	-5	-3	25	9	15
2	154	46	-3	-1	9	1	3
3	164	50	7	3	49	9	21
4	160	48	3	1	9	1	3
5	155	47	-2	0	4	0	0
計					96	20	42

$$\text{よって } s_{xy}=\frac{42}{5}=8.4, \quad r=\frac{42}{\sqrt{96 \cdot 20}}=\frac{42}{8\sqrt{30}}=\frac{7\sqrt{30}}{40} \approx 0.96$$

注意 平方根の表から $\sqrt{30} \approx 5.4772$

- [12] 次の表は、学生 5 名の身長 x (cm)と体重 y (kg)を測定した結果である。 x と y の相関係数 r を求めよ。

	A	B	C	D	E
身長 x (cm)	181	167	173	169	165
体重 y (kg)	75	59	63	67	61

解答 $r=0.875$

解説

x , y のデータの平均をそれぞれ \bar{x} , \bar{y} , 標準偏差をそれぞれ s_x , s_y , 共分散を s_{xy} とする

$$\bar{x}=170+\frac{1}{5}(11-3+3-1-5)=171$$

$$\bar{y}=65+\frac{1}{5}(10-6-2+2-4)=65$$

よって、次の表が得られる。

	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
A	10	10	100	100	100
B	-4	-6	16	36	24
C	2	-2	4	4	-4
D	-2	2	4	4	-4
E	-6	-4	36	16	24
計	0	0	160	160	140

ゆえに、相関係数 r は

$$r=\frac{140}{\sqrt{160 \times 160}}=\frac{140}{160}=0.875$$

- [13] 下の表は、10人の生徒に30点満点の2種類のテスト A, Bを行った得点の結果である。テスト A, B の得点をそれぞれ x , y とするとき、 x と y の相関係数 r を求めよ。
 ただし、小数第3位を四捨五入せよ。

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	29	25	22	28	18	23	26	30	30	29
y	23	23	18	26	17	20	21	20	26	26

解答 0.77

解説

x , y のデータの平均をそれぞれ \bar{x} , \bar{y} とすると

$$\bar{x}=\frac{1}{10}(29+25+22+28+18+23+26+30+30+29)=26$$

$$\bar{y}=\frac{1}{10}(23+23+18+26+17+20+21+20+26+26)=22$$

よって、次の表が得られる。

番号	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	3	1	9	1	3
2	-1	1	1	1	-1
3	-4	-4	16	16	16
4	2	4	4	16	8
5	-8	-5	64	25	40
6	-3	-2	9	4	6
7	0	-1	0	1	0
8	4	-2	16	4	-8
9	4	4	16	16	16
10	3	4	9	16	12
計			144	100	92

$$\text{ゆえに } r=\frac{92}{\sqrt{144 \times 100}}=\frac{92}{12 \times 10} \approx 0.77$$

- [14] 下の表は、10人の生徒に10点満点の2種類のテスト A, Bを行った結果である。次の値を求めよ。ただし、得られた値が無限小数の場合は、小数第2位を四捨五入せよ。

生徒の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
テスト A の得点	2	9	4	7	1	5	8	3	6	5
テスト B の得点	1	5	3	8	2	6	7	4	5	9

- (1) テスト A の得点の平均値
 (2) テスト B の得点の分散
 (3) テスト A とテスト B の得点の共分散
 (4) テスト A とテスト B の得点の相関係数

解答 (1) 5 (2) 6 (3) 4 (4) 0.77

解説

(1) 求める得点の平均値は $\frac{1}{10}(2+9+4+7+1+5+8+3+6+5)=5$

(2) テスト B について、得点の平均値は

$$\frac{1}{10}(1+5+3+8+2+6+7+4+5+9)=5$$

よって、求める得点の分散は

$$\frac{1}{10}[(1-5)^2+(5-5)^2+(3-5)^2+(8-5)^2+(2-5)^2$$

$$+(6-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(9-5)^2]$$

$$=\frac{1}{10}(16+0+4+9+9+1+4+1+0+16)=6$$

- (3) (1), (2) の結果から、テスト A とテスト B の得点の共分散は

$$\frac{1}{10}((-3)\cdot(-4)+4\cdot0+(-1)\cdot(-2)+2\cdot3+(-4)\cdot(-3)+0\cdot1+3\cdot2$$

$$+(-2)\cdot(-1)+1\cdot0+0\cdot4)$$

- (4) テスト A の得点の分散は

$$\frac{1}{10}((-3)^2+4^2+(-1)^2+2^2+(-4)^2+0^2+3^2+(-2)^2+1^2+0^2=6$$

したがって、(2), (3) の結果から、テスト A とテスト B の得点の相関係数は

$$\frac{4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}=\frac{2}{3}=0.666 \dots \approx 0.7$$

- [15] 2つの変量 x と y のデータが、 x , y の値の組として、次のように 4 組得られた。

x	2	1	2	3
y	-1	-1	2	4

このとき、 x と y の共分散は、 $\frac{1}{4}(-1+(-1)+2+4)=\frac{4}{4}=1$ である。また、 x と y の相関係数は、 $\frac{4}{\sqrt{2} \times \sqrt{18}}=0.833 \dots$ であるから ≈ 0.83

- ある。なお、 $\frac{1}{4}(-1+(-1)+2+4)=\frac{4}{4}=1$ の解答は必要ならば、小数第3位を四捨五入して、小数第2位まで求めよ。

解答 (ア) 1.25 (イ) 0.83

解説

x の平均値を \bar{x} , y の平均値を \bar{y} とすると

$$\bar{x}=\frac{1}{4}(2+1+2+3)=\frac{8}{4}=2$$

$$\bar{y}=\frac{1}{4}((-1)+(-1)+2+4)=\frac{4}{4}=1$$

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
2	-1	0	-2	0	4	0
1	-1	-1	-2	1	4	2
2	2	0	1	0	1	0
3	4	1	3	1	9	3
計	8	4			2	18

上の表から、 x と y の共分散は $\frac{1}{4}(0+2+0+3)=\frac{5}{4}=1.25$

また、 x と y の相関係数は、 $\frac{5}{\sqrt{2} \times \sqrt{18}}=0.833 \dots$ であるから ≈ 0.83

- [16] 次のような変量 x , y のデータがある。

x	7	8	10	14	13	15	10	13	11	9
y	7	15	13	14	17	11	9	15	11	8

このデータの x の平均値は 11, 分散は 6.4, y の平均値は 12, 分散は 10 である。

- (1) x , y の共分散を求めよ。

(2) x , y の相関係数を求めよ。ただし、小数第3位を四捨五入して小数第2位まで答えよ。

解説 (1) 3.9 (2) 0.49

解説

(1) x , y の共分散は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} \{(7-11)(7-12)+(8-11)(15-12) \\ & + (10-11)(13-12)+(14-11)(14-12) \\ & +(13-11)(17-12)+(15-11)(11-12) \\ & +(10-11)(9-12)+(13-11)(15-12) \\ & +(11-11)(11-12)+(9-11)(8-12)\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} (20 - 9 - 1 + 6 + 10 - 4 + 3 + 6 + 0 + 8)$$

$$= 3.9$$

(2) x , y の相関係数は

$$\frac{3.9}{\sqrt{6.4} \times \sqrt{10}} = \frac{3.9}{\sqrt{64}} = \frac{3.9}{8} = 0.487 \cdots \approx 0.49$$