

共分散・相関係数クイズ

1 下の表は、ある野球チームの選手 30 人について、身長を  $x(\text{cm})$ 、体重を  $y(\text{kg})$  として、 $x$ 、 $y$  を調べた結果である。

番号	$x$	$y$	番号	$x$	$y$	番号	$x$	$y$
1	179	91	11	184	96	21	178	80
2	183	84	12	184	89	22	180	78
3	177	74	13	174	77	23	180	87
4	173	75	14	177	76	24	171	73
5	178	83	15	173	70	25	178	81
6	184	78	16	188	90	26	175	78
7	189	95	17	182	79	27	170	66
8	176	74	18	181	84	28	179	83
9	183	85	19	180	86	29	174	73
10	181	75	20	173	77	30	172	70

この 30 人の身長  $x(\text{cm})$ 、体重  $y(\text{kg})$  のデータについて、次の数値が計算で得られる。ただし、数値は小数第 3 位を四捨五入している。

$x$  の標準偏差 4.79、 $y$  の標準偏差 7.32、 $x$  と  $y$  の共分散 28.41

これらの数値を用いて、 $x$  と  $y$  の相関係数を計算せよ。ただし、計算結果は小数第 3 位を四捨五入せよ。

【解答】 0.81

【解説】

相関係数は  $\frac{28.41}{4.79 \times 7.32} = \frac{28.41}{35.0628} = 0.810 \cdots \approx 0.81$

2 ある野球チームの選手 20 人の身長  $x(\text{cm})$ 、体重  $y(\text{kg})$  のデータをとったところ、 $x$  の標準偏差が 5.05、 $y$  の標準偏差が 4.26、 $x$  と  $y$  の共分散が 13.77 であった。 $x$  と  $y$  の相関係数を求めよ。ただし、小数第 3 位を四捨五入せよ。

【解答】 0.64

【解説】

求める相関係数は  $\frac{13.77}{5.05 \times 4.26} = \frac{13.77}{21.513} = 0.640 \cdots \approx 0.64$

3 下の表は、10 人の生徒に 10 点満点の 2 種類のテスト A、B を行った得点の結果である。A の得点と B の得点の相関係数を求めよ。

生徒の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A の得点	8	10	6	4	9	7	8	4	5	9
B の得点	4	5	6	7	5	5	3	9	10	6

【解答】 -0.71

【解説】

テスト A の得点を  $x$ 、テスト B の得点を  $y$  とする。

$x$ 、 $y$  のデータの平均値は  $\overline{x} = \frac{70}{10} = 7$ 、 $\overline{y} = \frac{60}{10} = 6$  である。

番号	$x$	$y$	$x - \overline{x}$	$y - \overline{y}$	$(x - \overline{x})^2$	$(y - \overline{y})^2$	$(x - \overline{x})(y - \overline{y})$
1	8	4	1	-2	1	4	-2
2	10	5	3	-1	9	1	-3
3	6	6	-1	0	1	0	0
4	4	7	-3	1	9	1	-3
5	9	5	2	-1	4	1	-2
6	7	5	0	-1	0	1	0
7	8	3	1	-3	1	9	-3
8	4	9	-3	3	9	9	-9
9	5	10	-2	4	4	16	-8
10	9	6	2	0	4	0	0
計	70	60			42	42	-30

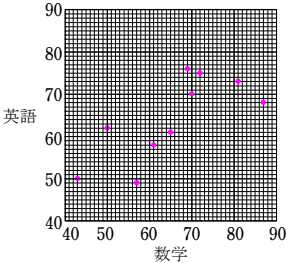
上の表から、相関係数は  $\frac{-30}{\sqrt{42 \times 42}} = -\frac{30}{42} \approx -0.71$

4 下の表は、10 人の生徒の数学と英語のテストの得点である。【各 25 点】

生徒の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学	57	43	69	87	61	72	50	81	65	70
英語	49	50	76	68	58	75	62	73	61	70

- (1) 下の図に点を書き込んで、このデータの散布図を作れ。
- (2) 数学の得点の標準偏差は 12.71、英語の得点の標準偏差は 9.31、数学の得点と英語の得点の共分散は 86.80 である。数学の得点と英語の得点の相関係数を求めよ。ただし、計算結果は小数第 3 位を四捨五入せよ。

【解答】



(1) 上図

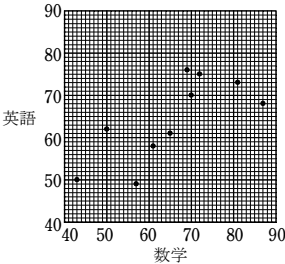
(2) 相関係数は  $\frac{86.80}{12.71 \times 9.31} = 0.733 \cdots \approx 0.73$

【解説】

下の表は、10 人の生徒の数学と英語のテストの得点である。【各 25 点】

生徒の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学	57	43	69	87	61	72	50	81	65	70
英語	49	50	76	68	58	75	62	73	61	70

- (1) 下の図に点を書き込んで、このデータの散布図を作れ。
- (2) 数学の得点の標準偏差は 12.71、英語の得点の標準偏差は 9.31、数学の得点と英語の得点の共分散は 86.80 である。数学の得点と英語の得点の相関係数を求めよ。ただし、計算結果は小数第 3 位を四捨五入せよ。



- (1) 上図
- (2) 相関係数は  $\frac{86.80}{12.71 \times 9.31} = 0.733 \cdots \approx 0.73$

5 下の表は、8 人の生徒に 10 点満点の数学と英語のテストを行った得点の結果である。

生徒	1	2	3	4	5	6	7	8
$x$ (数学)	7	8	5	6	10	8	9	3
$y$ (英語)	4	8	3	4	9	7	7	6

数学の得点  $x$  と英語の得点  $y$  の相関係数を求めよ。【20 点】

【解答】

生徒	$x$	$y$	$x - \overline{x}$	$y - \overline{y}$	$(x - \overline{x})^2$	$(y - \overline{y})^2$	$(x - \overline{x})(y - \overline{y})$
1	7	4	0	-2	0	4	0
2	8	8	1	2	1	4	2
3	5	3	-2	-3	4	9	6
4	6	4	-1	-2	1	4	2
5	10	9	3	3	9	9	9
6	8	7	1	1	1	1	1
7	9	7	2	1	4	1	2
8	3	6	-4	0	16	0	0
計	56	48			36	32	22

$\overline{x} = \frac{56}{8} = 7$ 、 $\overline{y} = \frac{48}{8} = 6$       相関係数は  $\frac{22}{\sqrt{36 \times 32}} \approx 0.65$

【解説】

生徒	$x$	$y$	$x - \overline{x}$	$y - \overline{y}$	$(x - \overline{x})^2$	$(y - \overline{y})^2$	$(x - \overline{x})(y - \overline{y})$
1	7	4	0	-2	0	4	0
2	8	8	1	2	1	4	2
3	5	3	-2	-3	4	9	6
4	6	4	-1	-2	1	4	2
5	10	9	3	3	9	9	9
6	8	7	1	1	1	1	1
7	9	7	2	1	4	1	2
8	3	6	-4	0	16	0	0
計	56	48			36	32	22

$\overline{x} = \frac{56}{8} = 7$ 、 $\overline{y} = \frac{48}{8} = 6$       相関係数は  $\frac{22}{\sqrt{36 \times 32}} \approx 0.65$

- 6 下の表は、6 人の生徒に 10 点満点の 2 種類のテスト A、B を行った結果である。A、B の得点の相関係数を求めよ。また、これらの間にはどのような相関があると考えられるか。

	①	②	③	④	⑤	⑥
テスト A	5	7	5	4	3	6
テスト B	4	1	3	5	9	2

(単位は点)

【解答】 相関係数  $-0.95$ 、強い負の相関があると考えられる。

【解説】

A の得点を  $x$ 、B の得点を  $y$  とすると

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \times 30 = 5, \quad \bar{y} = \frac{1}{6} \times 24 = 4$$

	$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
①	5	4	0	0	0	0	0
②	7	1	2	-3	-6	4	9
③	5	3	0	-1	0	0	1
④	4	5	-1	1	-1	1	1
⑤	3	9	-2	5	-10	4	25
⑥	6	2	1	-2	-2	1	4
計	30	24			-19	10	40

上の表から、 $x$  と  $y$  の相関係数は  $\frac{-19}{\sqrt{10} \sqrt{40}} = -\frac{19}{20} = -0.95$

よって、A の得点と B の得点には強い負の相関があると考えられる。

- 7 ある 2 つの変量  $x$ 、 $y$  のデータについて、 $x$  の分散は 108、 $y$  の分散は 192、 $x$  と  $y$  の共分散は 90 であった。 $x$  と  $y$  の相関係数を求めよ。 [15点]

【解答】 相関係数を  $r$  とすると

$$r = \frac{90}{\sqrt{108 \times 192}} = \frac{90}{144} = 0.625$$

【解説】

相関係数を  $r$  とすると

$$r = \frac{90}{\sqrt{108 \times 192}} = \frac{90}{144} = 0.625$$

- 8 下の表は、10 人の生徒に 10 点満点の数学と国語のテストを行った結果である。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
数学	8	6	5	9	4	3	6	7	8	4
国語	3	9	6	5	8	5	1	2	4	7

- (1) 数学、国語の得点の相関係数  $r$  を求めよ。ただし、 $\sqrt{15} = 3.9$  とし、必要があれば小数第 3 位を四捨五入して求めよ。 [20点]  
 (2) 数学の得点と国語の得点の間には、どのような相関関係があると考えられるか。 [15点]

【解答】 (1) 数学の得点を  $x$ (点)、国語の得点を  $y$ (点) とする。

$$x \text{ のデータの平均値は } \bar{x} = \frac{60}{10} = 6$$

$$y \text{ のデータの平均値は } \bar{y} = \frac{50}{10} = 5$$

番号	$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	8	3	2	-2	4	4	-4
2	6	9	0	4	0	16	0
3	5	6	-1	1	1	1	-1
4	9	5	3	0	9	0	0
5	4	8	-2	3	4	9	-6
6	3	5	-3	0	9	0	0
7	6	1	0	-4	0	16	0
8	7	2	1	-3	1	9	-3
9	8	4	2	-1	4	1	-2
10	4	7	-2	2	4	4	-4
計	60	50			36	60	-20

上の表から、相関係数  $r$  は

$$r = \frac{-20}{\sqrt{36 \times 60}} = \frac{-20\sqrt{15}}{6 \times 30} = \frac{-3.9}{9} \approx -0.43$$

- (2) (1) から、数学の得点と国語の得点の間には、弱い負の相関があると考えられる。

【解説】

- (1) 数学の得点を  $x$ (点)、国語の得点を  $y$ (点) とする。

$$x \text{ のデータの平均値は } \bar{x} = \frac{60}{10} = 6$$

$$y \text{ のデータの平均値は } \bar{y} = \frac{50}{10} = 5$$

番号	$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	8	3	2	-2	4	4	-4
2	6	9	0	4	0	16	0
3	5	6	-1	1	1	1	-1
4	9	5	3	0	9	0	0
5	4	8	-2	3	4	9	-6
6	3	5	-3	0	9	0	0
7	6	1	0	-4	0	16	0
8	7	2	1	-3	1	9	-3
9	8	4	2	-1	4	1	-2
10	4	7	-2	2	4	4	-4
計	60	50			36	60	-20

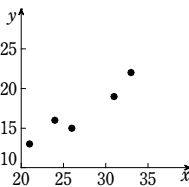
上の表から、相関係数  $r$  は

$$r = \frac{-20}{\sqrt{36 \times 60}} = \frac{-20\sqrt{15}}{6 \times 30} = \frac{-3.9}{9} \approx -0.43$$

- (2) (1) から、数学の得点と国語の得点の間には、弱い負の相関があると考えられる。

- 9 次の表は、同じ種類の 5 本の木の直径  $x$  cm と高さ  $y$  m を測った結果である。この  $x$  と  $y$  に対する相関係数  $r$  を求めよう。

木の番号	①	②	③	④	⑤
$x$	26	31	21	24	33
$y$	15	19	13	16	22



散布図は右の図のようになる。

$$x \text{ と } y \text{ の平均値は、それぞれ } \bar{x} = \frac{135}{5} = 27, \quad \bar{y} = \frac{85}{5} = 17$$

番号	$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
①	26	15	-1	-2	1	4	2
②	31	19	4	2	16	4	8
③	21	13	-6	-4	36	16	24
④	24	16	-3	-1	9	1	3
⑤	33	22	6	5	36	25	30
計	135	85			98	50	67

上の表から、相関係数  $r$  は

$$r = \frac{67}{\sqrt{98 \times 50}} = \frac{67}{70} \approx 0.96$$

【解説】

- 10 5 人の生徒が受けた次の小テスト A、B の得点の間には、正・負どちらの相関があると考えられるか。相関係数  $r$  を計算して答えよ。

生徒の番号	①	②	③	④	⑤
A	6	9	5	1	4
B	8	3	5	9	10

【解答】  $r = -0.76$ 、負の相関があると考えられる。

【解説】

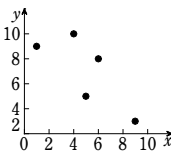
小テスト A、B の得点をそれぞれ  $x$ 、 $y$  とする。

$x$  と  $y$  の散布図は右の図のようになる。

$x$  と  $y$  の平均値は、それぞれ

$$\bar{x} = \frac{25}{5} = 5,$$

$$\bar{y} = \frac{35}{5} = 7$$



番号	$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
①	6	8	1	1	1	1	1
②	9	3	4	-4	16	16	-16
③	5	5	0	-2	0	4	0
④	1	9	-4	2	16	4	-8
⑤	4	10	-1	3	1	9	-3
計	25	35			34	34	-26

上の表から、相関係数  $r$  は

$$r = \frac{-26}{\sqrt{34 \times 34}} = -\frac{13}{17} \approx -0.76$$

よって、小テスト A、B の得点の間には、負の相関があると考えられる。

- 11 右の表は、5 人の生徒の身長  $x$ (cm) と体重  $y$ (kg) を測定した結果である。  
 $x$  と  $y$  の共分散  $s_{xy}$  と相関係数  $r$  を求めよ。  
ただし、小数第 3 位を四捨五入せよ。

生徒の番号	1	2	3	4	5
$x$ (cm)	152	154	164	160	155
$y$ (kg)	44	46	50	48	47

【解答】  $s_{xy}=8.4$ 、 $r=0.96$

【解説】

$x$ 、 $y$  の平均値をそれぞれ  $\overline{x}$ 、 $\overline{y}$  とすると

$$\overline{x}=\frac{1}{5}(152+154+164+160+155)=157 \text{ (cm)}$$

$$\overline{y}=\frac{1}{5}(44+46+50+48+47)=47 \text{ (kg)}$$

したがって、次の表が得られる。

番号	$x$	$y$	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
1	152	44	-5	-3	25	9	15
2	154	46	-3	-1	9	1	3
3	164	50	7	3	49	9	21
4	160	48	3	1	9	1	3
5	155	47	-2	0	4	0	0
計					96	20	42

よって  $s_{xy}=\frac{42}{5}=8.4$ 、 $r=\frac{42}{\sqrt{96\cdot 20}}=\frac{42}{8\sqrt{30}}=\frac{7\sqrt{30}}{40}\approx 0.96$

【注意】平方根の表から  $\sqrt{30}\approx 5.4772$

- 12 次の表は、学生 5 名の身長  $x$ (cm) と体重  $y$ (kg) を測定した結果である。 $x$  と  $y$  の相関係数  $r$  を求めよ。

	A	B	C	D	E
身長 $x$ (cm)	181	167	173	169	165
体重 $y$ (kg)	75	59	63	67	61

【解答】  $r=0.875$

【解説】

$x$ 、 $y$  のデータの平均をそれぞれ  $\overline{x}$ 、 $\overline{y}$ 、標準偏差をそれぞれ  $s_x$ 、 $s_y$ 、共分散を  $s_{xy}$  とすると

$$\overline{x}=170+\frac{1}{5}(11-3+3-1-5)=171$$

$$\overline{y}=65+\frac{1}{5}(10-6-2+2-4)=65$$

よって、次の表が得られる。

	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
A	10	10	100	100	100
B	-4	-6	16	36	24
C	2	-2	4	4	-4
D	-2	2	4	4	-4
E	-6	-4	36	16	24
計	0	0	160	160	140

ゆえに、相関係数  $r$  は

$$r=\frac{140}{\sqrt{160\times 160}}=\frac{140}{160}=0.875$$

- 13 下の表は、10 人の生徒に 30 点満点の 2 種類のテスト A、B を行った得点の結果である。テスト A、B の得点をそれぞれ  $x$ 、 $y$  とするとき、 $x$  と  $y$  の相関係数  $r$  を求めよ。  
ただし、小数第 3 位を四捨五入せよ。

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x$	29	25	22	28	18	23	26	30	30	29
$y$	23	23	18	26	17	20	21	20	26	26

【解答】 0.77

【解説】

$x$ 、 $y$  のデータの平均をそれぞれ  $\overline{x}$ 、 $\overline{y}$  とすると

$$\overline{x}=\frac{1}{10}(29+25+22+28+18+23+26+30+30+29)=26$$

$$\overline{y}=\frac{1}{10}(23+23+18+26+17+20+21+20+26+26)=22$$

よって、次の表が得られる。

番号	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
1	3	1	9	1	3
2	-1	1	1	1	-1
3	-4	-4	16	16	16
4	2	4	4	16	8
5	-8	-5	64	25	40
6	-3	-2	9	4	6
7	0	-1	0	1	0
8	4	-2	16	4	-8
9	4	4	16	16	16
10	3	4	9	16	12
計			144	100	92

ゆえに  $r=\frac{92}{\sqrt{144\times 100}}=\frac{92}{12\times 10}\approx 0.77$

- 14 下の表は、10 人の生徒に 10 点満点の 2 種類のテスト A、B を行った結果である。次の値を求めよ。ただし、得られた値が無限小数の場合は、小数第 2 位を四捨五入せよ。

生徒の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
テスト A の得点	2	9	4	7	1	5	8	3	6	5
テスト B の得点	1	5	3	8	2	6	7	4	5	9

- (1) テスト A の得点の平均値  
(2) テスト B の得点の分散  
(3) テスト A とテスト B の得点の共分散  
(4) テスト A とテスト B の得点の相関係数

【解答】 (1) 5 (2) 6 (3) 4 (4) 0.7

【解説】

(1) 求める得点の平均値は  $\frac{1}{10}(2+9+4+7+1+5+8+3+6+5)=5$

(2) テスト B について、得点の平均値は

$$\frac{1}{10}(1+5+3+8+2+6+7+4+5+9)=5$$

よって、求める得点の分散は

$$\frac{1}{10}\{(1-5)^2+(5-5)^2+(3-5)^2+(8-5)^2+(2-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(9-5)^2\}$$

$$=\frac{1}{10}(16+0+4+9+9+1+4+1+0+16)=6$$

- (3) (1)、(2) の結果から、テスト A とテスト B の得点の共分散は

$$\frac{1}{10}\{(-3)\cdot(-4)+4\cdot 0+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 3+(-4)\cdot(-3)+0\cdot 1+3\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 4\}$$

$$=\frac{1}{10}(12+0+2+6+12+0+6+2+0+0)=4$$

- (4) テスト A の得点の分散は

$$\frac{1}{10}\{(-3)^2+4^2+(-1)^2+2^2+(-4)^2+0^2+3^2+(-2)^2+1^2+0^2=6$$

したがって、(2)、(3) の結果から、テスト A とテスト B の得点の相関係数は

$$\frac{4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2}{3}=0.666\cdots\approx 0.7$$

- 15 2 つの変量  $x$  と  $y$  のデータが、 $x$ 、 $y$  の値の組として、次のように 4 組得られた。

$x$	2	1	2	3
$y$	-1	-1	2	4

このとき、 $x$  と  $y$  の共分散は、 $\text{ア}$   である。また、 $x$  と  $y$  の相関係数は、 $\text{イ}$   である。なお、 $\text{ア}$  、 $\text{イ}$   の解答は必要ならば、小数第 3 位を四捨五入して、小数第 2 位まで求めよ。

【解答】 (ア) 1.25 (イ) 0.83

【解説】

$x$  の平均値を  $\overline{x}$ 、 $y$  の平均値を  $\overline{y}$  とすると

$$\overline{x}=\frac{1}{4}(2+1+2+3)=\frac{8}{4}=2$$

$$\overline{y}=\frac{1}{4}\{(-1)+(-1)+2+4\}=\frac{4}{4}=1$$

	$x$	$y$	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
	2	-1	0	-2	0	4	0
	1	-1	-1	-2	1	4	2
	2	2	0	1	0	1	0
	3	4	1	3	1	9	3
計	8	4			2	18	5

上の表から、 $x$  と  $y$  の共分散は  $\frac{1}{4}(0+2+0+3)=\frac{5}{4}=\text{ア}1.25$

また、 $x$  と  $y$  の相関係数は、 $\frac{5}{\sqrt{2\times 18}}=0.833\cdots$  であるから  $\text{イ}0.83$

- 16 次のような変量  $x$ 、 $y$  のデータがある。

$x$	7	8	10	14	13	15	10	13	11	9
$y$	7	15	13	14	17	11	9	15	11	8

このデータの  $x$  の平均値は 11、分散は 6.4、 $y$  の平均値は 12、分散は 10 である。

- (1)  $x$ 、 $y$  の共分散を求めよ。

(2)  $x, y$  の相関係数を求めよ。ただし、小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで答えよ。

**解答** (1) 3.9 (2) 0.49

**解説**

(1)  $x, y$  の共分散は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} \{ (7-11)(7-12) + (8-11)(15-12) \\ & \quad + (10-11)(13-12) + (14-11)(14-12) \\ & \quad + (13-11)(17-12) + (15-11)(11-12) \\ & \quad + (10-11)(9-12) + (13-11)(15-12) \\ & \quad + (11-11)(11-12) + (9-11)(8-12) \} \\ &= \frac{1}{10} (20-9-1+6+10-4+3+6+0+8) \\ &= 3.9 \end{aligned}$$

(2)  $x, y$  の相関係数は

$$\frac{3.9}{\sqrt{6.4} \times \sqrt{10}} = \frac{3.9}{\sqrt{64}} = \frac{3.9}{8} = 0.4875 \cdots \approx 0.49$$