図形と計量クイズ

1 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $a=3$，$A=150^\circ$ のとき　外接円の半径 R

(2) $b=4\sqrt{3}$，外接円の半径 $R=4$ のとき　B

(3) $a=\sqrt{2}$，$A=45^\circ$，$B=120^\circ$ のとき　b

(4) $b=15$，$c=15\sqrt{3}$，$B=30^\circ$ のとき　C

解答　(1) $R=3$　(2) $B=60^\circ,\ 120^\circ$　(3) $b=\sqrt{3}$　(4) $C=60^\circ,\ 120^\circ$

(1) 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ であるから　$\dfrac{3}{\sin 150^\circ}=2R$

よって　$R=\dfrac{3}{2\sin 150^\circ}=3$

(2) 正弦定理により $\dfrac{b}{\sin B}=2R$ であるから　$\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin B}=2\cdot 4$

よって　$\sin B=\dfrac{4\sqrt{3}}{2\cdot 4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$B=60^\circ,\ 120^\circ$

(3) 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 120^\circ}$

よって　$b=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 120^\circ=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

(4) 正弦定理により $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ であるから　$\dfrac{15}{\sin 30^\circ}=\dfrac{15\sqrt{3}}{\sin C}$

よって　$\sin C=15\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sin 30^\circ}{15}=15\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{15}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$B=30^\circ$ より $0^\circ<C<150^\circ$ であるから　$C=60^\circ,\ 120^\circ$

2 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $a=6$，$c=4$，$B=60^\circ$ のとき　b

(2) $A=120^\circ$，$b=2\sqrt{2}-1$，$c=2\sqrt{2}+1$ のとき　a

(3) $a=7$，$b=5$，$c=3$ のとき　A

(4) $a=1+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$ のとき　C

解答　(1) $b=2\sqrt{7}$　(2) $a=5$　(3) $A=120^\circ$　(4) $C=45^\circ$

(1) 余弦定理により

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cos 60^\circ$

$=16+36-2\cdot 4\cdot 6\cdot\dfrac{1}{2}=28$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

(2) 余弦定理により

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=(2\sqrt{2}-1)^2+(2\sqrt{2}+1)^2-2\cdot(2\sqrt{2}-1)\cdot(2\sqrt{2}+1)\cos 120^\circ$

$=(9-4\sqrt{2})+(9+4\sqrt{2})-2(8-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=25$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{25}=5$

(3) 余弦定理により

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3}=\dfrac{-15}{2\cdot 5\cdot 3}=-\dfrac{1}{2}$

よって　$A=120^\circ$

(4) 余弦定理により

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$C=45^\circ$

3 川の向こう岸の地点 A を，川のこちら岸の 15 m 離れた 2 地点 B，C から見ると，∠ABC＝45°，∠ACB＝75° であった。A，C 間の距離を求めよ。

解答　$5\sqrt{6}$ m

$A=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

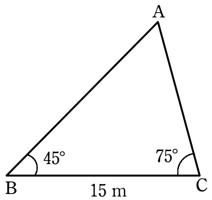
正弦定理により $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}$ であるから

$\dfrac{15}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin 45^\circ}$

よって　$\mathrm{AC}=15\cdot\dfrac{1}{\sin 60^\circ}\cdot\sin 45^\circ=15\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{30}{\sqrt{6}}=5\sqrt{6}$

ゆえに，A，C 間の距離は　$5\sqrt{6}$ m



4 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $a=8$，$b=7$，$B=60^\circ$ のとき　c

(2) $a=\sqrt{7}$，$c=\sqrt{3}$，$A=30^\circ$ のとき　b

解答　(1) $c=3,\ 5$　(2) $b=4$

(1) 余弦定理により　$7^2=c^2+8^2-2\cdot c\cdot 8\cos 60^\circ$

よって　$c^2-8c+15=0$

すなわち　$(c-3)(c-5)=0$

ゆえに　$c=3,\ 5$（これは $c>0$ を満たす）

(2) 余弦定理により　$(\sqrt{7})^2=b^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\,b\cos 30^\circ$

よって　$b^2-3b-4=0$

すなわち　$(b+1)(b-4)=0$

$b>0$ であるから　$b=4$

5 平行四辺形 ABCD において，AB＝3，AD＝5，∠B＝60° のとき，対角線 AC，BD の長さを求めよ。

解答　$\mathrm{AC}=\sqrt{19}$，$\mathrm{BD}=7$

平行四辺形 ABCD において

$\mathrm{BC}=\mathrm{AD}=5$

△ABC に余弦定理を使うと

$\mathrm{AC}^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos 60^\circ=19$

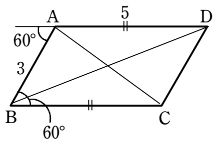
$\mathrm{AC}>0$ であるから　$\mathrm{AC}=\sqrt{19}$

また，AD∥BC であるから

$\angle\mathrm{BAD}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

△ABD に余弦定理を使うと　$\mathrm{BD}^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ=49$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{49}=7$



6 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $b=3a$，$B=30^\circ$ のとき　$\sin A$ の値

(2) $a:b=1:2$，$B=45^\circ$，$c=\sqrt{2}$ のとき　a

解答　(1) $\sin A=\dfrac{1}{6}$　(2) $a=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

(1) 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{3a}{\sin 30^\circ}$

よって　$\sin A=a\cdot\dfrac{\sin 30^\circ}{3a}=\dfrac{1}{6}$

(2) $a:b=1:2$ であるから　$b=2a$

余弦定理により　$(2a)^2=(\sqrt{2})^2+a^2-2\sqrt{2}\,a\cos 45^\circ$

よって　$3a^2+2a-2=0$

これを解くと　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-3\cdot(-2)}}{3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

$a>0$ であるから　$a=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

7 △ABC において，$a=4$，$A=45^\circ$，$C=30^\circ$ のとき，b を求めよ。

解答　$b=2+2\sqrt{3}$

正弦定理により　$\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$

したがって　$c=4\cdot\dfrac{1}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 30^\circ=4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{1}\cdot\dfrac{1}{2}=2\sqrt{2}$

余弦定理により　$4^2=b^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot b\cdot 2\sqrt{2}\cos 45^\circ$

よって　$b^2-4b-8=0$

これを解くと　$b=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-8)}}{1}=2\pm 2\sqrt{3}$

$b>0$ であるから　$b=2+2\sqrt{3}$

8 △ABC において，$a=8$，$b=7$，$c=9$ とする。線分 BC の中点を M，線分 BM の中点を D とするとき，AM，AD の長さを求めよ。

解答　$\mathrm{AM}=7$，$\mathrm{AD}=\sqrt{61}$

△ABC に余弦定理を使うと

$\cos B=\dfrac{9^2+8^2-7^2}{2\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{2}{3}$

△ABM に余弦定理を使うと

$\mathrm{AM}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}\cos B$

$=9^2+4^2-2\cdot 9\cdot 4\cdot\dfrac{2}{3}=49$

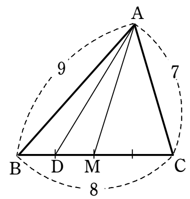
$\mathrm{AM}>0$ であるから　$\mathrm{AM}=7$

また，△ABD に余弦定理を使うと

$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos B$

$=9^2+2^2-2\cdot 9\cdot 2\cdot\dfrac{2}{3}=61$

$\mathrm{AD}>0$ であるから　$\mathrm{AD}=\sqrt{61}$



9 次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1) $b=3$，$c=8$，$A=45^\circ$　(2) $a=2$，$c=3$，$B=150^\circ$

(3) $a=b=\sqrt{6}$，$A=30^\circ$　(4) $b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$B=45^\circ$，$C=105^\circ$

(5) 1 辺の長さが 6 の正三角形 ABC

解答　(1) $6\sqrt{2}$　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(4) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　(5) $9\sqrt{3}$

(1) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

(2) $S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 150^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

(3) $a=b$ であるから　$B=A=30^\circ$

よって　$C=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(4)　$A=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$

よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(1+\sqrt{3})\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(5)　$S=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

10 次のような△ABCの面積 S を求めよ。

(1)　$a=\sqrt{7}$，$b=4$，$c=3$　　(2)　$a=11$，$b=6$，$c=7$

解答　(1)　$\frac{3\sqrt{7}}{2}$　　(2)　$6\sqrt{10}$

(1)　余弦定理により　$\cos A=\frac{4^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot4\cdot3}=\frac{3}{4}$

$\sin A>0$ であるから

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

したがって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$

(2)　余弦定理により　$\cos A=\frac{6^2+7^2-11^2}{2\cdot6\cdot7}=-\frac{3}{7}$

$\sin A>0$ であるから

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{40}{49}}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

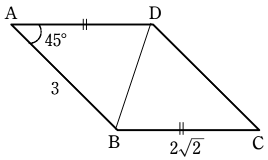
したがって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\frac{2\sqrt{10}}{7}=6\sqrt{10}$

11 次のような平行四辺形ABCDの面積 S を求めよ。

(1)　∠A＝45°，AB＝3，BC＝$2\sqrt{2}$　　(2)　AB＝4，BC＝5，BD＝7

解答　(1)　6　　(2)　$8\sqrt{6}$

(1)　AD＝BC であるから　AD＝$2\sqrt{2}$

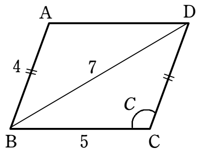


したがって

$S=2\times\triangle ABD=2\times\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\sqrt{2}\sin 45^\circ$

$=6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=6$

(2)　DC＝AB＝4



△BCDに余弦定理を使うと

$\cos C=\frac{5^2+4^2-7^2}{2\cdot5\cdot4}=-\frac{1}{5}$

$\sin C>0$ であるから

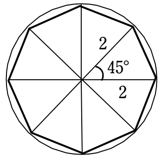
$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

したがって　$S=2\times\triangle BCD=2\times\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=8\sqrt{6}$

12 半径2の円に内接する正八角形の面積 S を求めよ。

解答　$8\sqrt{2}$

正八角形は，右の図のように，8個の二等辺三角形に分けることができる。

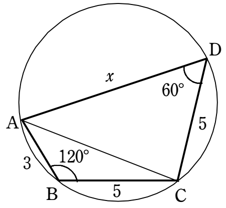


したがって

$S=8\times\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin 45^\circ=8\times\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$

13 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝3，BC＝5，CD＝5，∠B＝120° のとき，四角形ABCDの面積を求めよ。

解答　$\frac{55\sqrt{3}}{4}$



△ABCに余弦定理を使うと

$AC^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos 120^\circ$

$=9+25+15=49$

AC＞0 であるから　AC＝$\sqrt{49}=7$

四角形ABCDは円に内接するから

∠D＝180°－∠B＝180°－120°＝60°

AD＝x として，△ACDに余弦定理を使うと

$AC^2=CD^2+AD^2-2\cdot CD\cdot AD\cos\angle D$

よって　$49=5^2+x^2-2\cdot5\cdot x\cos 60^\circ$

整理すると　$x^2-5x-24=0$

これを解くと　$x=-3,\ 8$

$x>0$ であるから　$x=8$　すなわち　AD＝8

したがって，四角形ABCDの面積 S は

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

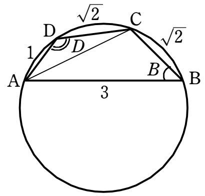
$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin 60^\circ=\frac{55\sqrt{3}}{4}$

14 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝3，BC＝$\sqrt{2}$，CD＝$\sqrt{2}$，DA＝1 のとき，次のものを求めよ。

(1)　B　　(2)　ACの長さ　　(3)　四角形ABCDの面積 S

解答　(1)　45°　　(2)　$\sqrt{5}$　　(3)　2

(1)　△ABCに余弦定理を使うと



$AC^2=3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cos B$

$=11-6\sqrt{2}\cos B$　…… ①

四角形ABCDは円に内接するから　$D=180^\circ-B$

△ACDに余弦定理を使うと

$AC^2=1^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot1\cdot\sqrt{2}\cos(180^\circ-B)$

$=3+2\sqrt{2}\cos B$　…… ②

①，②から　$11-6\sqrt{2}\cos B=3+2\sqrt{2}\cos B$

整理して　$8\sqrt{2}\cos B=8$

ゆえに　$\cos B=\frac{1}{\sqrt{2}}$　…… ③

したがって　$B=45^\circ$

(2)　①，③から　$AC^2=11-6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5$

AC＞0 であるから　AC＝$\sqrt{5}$

(3)　$D=180^\circ-B=180^\circ-45^\circ=135^\circ$ であるから

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{2}\sin 45^\circ+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{2}\sin 135^\circ=2$

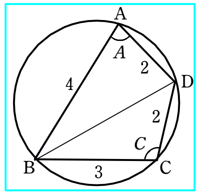
15 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝4，BC＝3，CD＝2，DA＝2 のとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$ の値　　(2)　BDの長さ

(3)　円の半径 R　　(4)　四角形ABCDの面積 S

解答　(1)　$\frac{1}{4}$　　(2)　4　　(3)　$\frac{8\sqrt{15}}{15}$　　(4)　$\frac{7\sqrt{15}}{4}$

(1)　△ABDに余弦定理を使うと



$BD^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cos A$

$=20-16\cos A$　…… ①

四角形ABCDは円に内接するから　$C=180^\circ-A$

△BCDに余弦定理を使うと

$BD^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos(180^\circ-A)$

$=13+12\cos A$　…… ②

①，②から　$20-16\cos A=13+12\cos A$

整理して　$28\cos A=7$

ゆえに　$\cos A=\frac{1}{4}$　…… ③

(2)　①，③から　$BD^2=20-16\cdot\frac{1}{4}=16$

BD＞0 であるから　BD＝$\sqrt{16}=4$

(3)　△ABDに正弦定理を使うと　$\frac{BD}{\sin A}=2R$

ゆえに　$R=\frac{BD}{2\sin A}=\frac{4}{2\sin A}=\frac{2}{\sin A}$

$\sin A>0$ であるから，③より

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

よって　$R=2\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}=\frac{8\sqrt{15}}{15}$

(4)　$S=\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin A+\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin C$

$=4\sin A+3\sin C$

$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$ であるから

$S=4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$

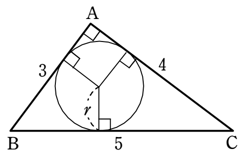
16 次のような△ABCにおいて，内接円の半径 r を求めよ。

(1)　$a=5$，$b=4$，$c=3$　　(2)　$a=4$，$b=5$，$c=6$

(3)　$a=8$，$b=5$，$C=60^\circ$

解答　(1)　1　　(2)　$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　(3)　$\sqrt{3}$

(1)　この三角形は $A=90^\circ$ の直角三角形であるから，



その面積 S は　$S=\frac{1}{2}\times3\times4=6$

また　$S=\frac{1}{2}r(5+4+3)=6r$

よって，$6r=6$ から　$r=1$

参考　$\cos A$ を計算すると

$\cos A=\frac{4^2+3^2-5^2}{2\cdot4\cdot3}=0$

よって，$A=90^\circ$ であることがわかる。

(2)　余弦定理により　$\cos A=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{3}{4}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

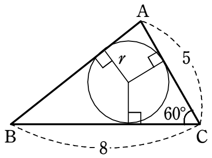
△ABC の面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

また　$S=\dfrac{1}{2}r(4+5+6)=\dfrac{15}{2}r$

よって，$\dfrac{15}{2}r=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ から　$r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(3)　△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin60^\circ=10\sqrt{3}$$



余弦定理により　$c^2=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cos60^\circ=49$

$c>0$ であるから　$c=7$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}r(8+5+7)=10r$

よって，$10r=10\sqrt{3}$ から　$r=\sqrt{3}$

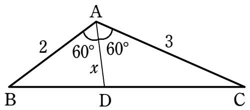
17 △ABC において，$b=3$，$c=2$，$A=120^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，AD の長さを求めよ。

解答　$\dfrac{6}{5}$

AD$=x$ とおく。

△ABC$=$△ABD$+$△ACD であるから

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot2\cdot x\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot3\cdot x\sin60^\circ$$



整理すると　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}x$

よって　$x=\dfrac{6}{5}$　　したがって　AD$=\dfrac{6}{5}$

18 次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$a=3$，$b=6$，$c=7$　　(2)　$a=7$，$b=5$，$c=9$

解答　(1)　$4\sqrt{5}$　(2)　$\dfrac{21\sqrt{11}}{4}$

(1)　$2s=3+6+7$ から　$s=8$

よって　$S=\sqrt{8(8-3)(8-6)(8-7)}=\sqrt{8\cdot5\cdot2\cdot1}=4\sqrt{5}$

(2)　$2s=7+5+9$ から　$s=\dfrac{21}{2}$

よって　$S=\sqrt{\dfrac{21}{2}\left(\dfrac{21}{2}-7\right)\left(\dfrac{21}{2}-5\right)\left(\dfrac{21}{2}-9\right)}=\sqrt{\dfrac{21\cdot7\cdot11\cdot3}{2\cdot2\cdot2\cdot2}}=\dfrac{21\sqrt{11}}{4}$

19 △ABC において，$a=6$，$b=7$，$c=8$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

解答　$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

余弦定理により　$\cos C=\dfrac{6^2+7^2-8^2}{2\cdot6\cdot7}=\dfrac{21}{2\cdot6\cdot7}=\dfrac{1}{4}$

$\sin C>0$ であるから　$\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{21\sqrt{15}}{4}$$

また　$S=\dfrac{1}{2}r(6+7+8)=\dfrac{21}{2}r$

よって，$\dfrac{21}{2}r=\dfrac{21\sqrt{15}}{4}$ から　$r=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

参考　$\cos A$ を求めて，△ABC の面積を求めてもよいが，計算が大変になる。
そのため，上の解答では，計算が楽になる $\cos C$ を求めた。

別解　ヘロンの公式を用いて，△ABC の面積 S を求めてもよい。

$2s=6+7+8$ から　$s=\dfrac{21}{2}$

よって　$S=\sqrt{\dfrac{21}{2}\left(\dfrac{21}{2}-6\right)\left(\dfrac{21}{2}-7\right)\left(\dfrac{21}{2}-8\right)}=\sqrt{\dfrac{21\cdot9\cdot7\cdot5}{2\cdot2\cdot2\cdot2}}=\dfrac{21\sqrt{15}}{4}$

20 1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD に内接する球の中心を O とする。

(1)　四面体 OBCD の体積を求めよ。　　(2)　球の半径を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$　(2)　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(1)　正四面体 ABCD は，合同な 4 つの四面体 OABC，OABD，OACD，OBCD に分割できる。

よって，正四面体 ABCD の体積を V とすると，求める体積は　$\dfrac{1}{4}V$

正四面体 ABCD の体積 V を求める。

頂点 A から底面 BCD に下ろした垂線を AH とする。

H は正三角形 BCD の外接円の中心となる。

△BCD において，正弦定理により　$\dfrac{6}{\sin60^\circ}=2\text{BH}$

よって　BH$=\dfrac{6}{2\sin60^\circ}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

また，△ABH において，三平方の定理より

$$\text{AH}=\sqrt{\text{AB}^2-\text{BH}^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$$

△BCD は 1 辺の長さが 6 の正三角形であるから，その面積は

$$\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin60^\circ=9\sqrt{3}$$

したがって　$V=\dfrac{1}{3}\triangle\text{BCD}\cdot\text{AH}=\dfrac{1}{3}\cdot9\sqrt{3}\cdot2\sqrt{6}=18\sqrt{2}$

ゆえに，四面体 OBCD の体積は　$\dfrac{1}{4}\cdot18\sqrt{2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

(2)　球の半径を r とすると，四面体 OBCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\text{BCD}\cdot r=\frac{1}{3}\cdot9\sqrt{3}\cdot r=3\sqrt{3}\,r$$

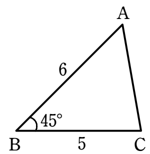
よって，(1) から　$3\sqrt{3}\,r=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

したがって　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

21 $a=5$，$c=6$，$B=45^\circ$ である △ABC の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\sin45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{15}{\sqrt{2}}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$$



22 △ABC において，$a=6$，$A=45^\circ$ であるとき，外接円の半径 R を求めよ。

解答　$3\sqrt{2}$

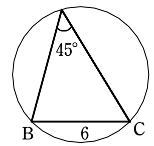
正弦定理から

A

$$\frac{6}{\sin45^\circ}=2R$$

よって

$$R=\frac{6}{2\sin45^\circ}=\frac{3}{\sin45^\circ}=3\div\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=3\times\frac{\sqrt{2}}{1}=3\sqrt{2}$$



23 △ABC において，$b=8$，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$ であるとき，辺 BC の長さ a を求めよ。

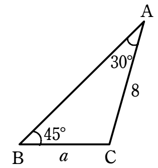
解答　$4\sqrt{2}$

正弦定理から　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

よって　$\dfrac{a}{\sin30^\circ}=\dfrac{8}{\sin45^\circ}$

したがって　$a=\dfrac{8\sin30^\circ}{\sin45^\circ}$

$$=8\times\frac{1}{2}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=8\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{1}=4\sqrt{2}$$

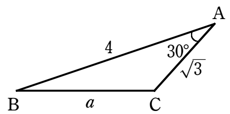


24 △ABC において，$b=\sqrt{3}$，$c=4$，$A=30^\circ$ であるとき，辺 BC の長さ a を求めよ。

解答　$\sqrt{7}$

余弦定理から

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=(\sqrt{3})^2+4^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot4\cos30^\circ$$
$$=3+16-8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=7$$



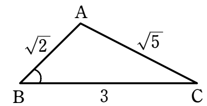
$a>0$ であるから　$a=\sqrt{7}$

25 △ABC において，$a=3$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{2}$ であるとき，$\cos B$ の値と B を求めよ。

解答　$\cos B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$B=45^\circ$

余弦定理により

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$=\frac{(\sqrt{2})^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot3}$$
$$=\frac{6}{2\cdot\sqrt{2}\cdot3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



したがって　$B=45^\circ$

26 △ABC において，3 辺の長さが $a=3$，$b=5$，$c=7$ であるとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$ の値　　(2)　$\sin A$ の値　　(3)　面積 S

解答　(1)　$\dfrac{13}{14}$　(2)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$　(3)　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

(1) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+7^2-3^2}{2\cdot5\cdot7}$

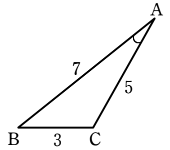
$=\dfrac{65}{2\cdot5\cdot7}=\dfrac{13}{14}$

(2) $\sin^2 A=1-\cos^2 A$

$=1-\left(\dfrac{13}{14}\right)^2=\dfrac{27}{196}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{\dfrac{27}{196}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

(3) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot7\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$



$\boxed{27}$ 次のような△ABCの外接円の半径 R を求めよ。

(1) $a=4$，$A=30°$　　(2) $b=5$，$B=135°$　　(3) $c=\sqrt{3}$，$C=120°$

解答　(1) 4　(2) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$　(3) 1

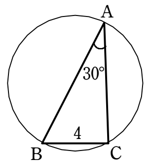
(1) 正弦定理から

$\dfrac{4}{\sin30°}=2R$

よって

$R=\dfrac{4}{2\sin30°}=\dfrac{2}{\sin30°}$

$=2\div\dfrac{1}{2}=2\times\dfrac{2}{1}=4$



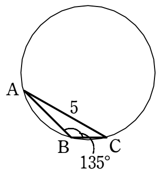
(2) 正弦定理から

$\dfrac{5}{\sin135°}=2R$

よって

$R=\dfrac{5}{2\sin135°}=\dfrac{5}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$



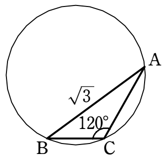
(3) 正弦定理から

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin120°}=2R$

よって

$R=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin120°}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=1$



$\boxed{28}$ △ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1) $b=6$，$A=45°$，$B=60°$ であるとき，辺BCの長さ a

(2) $a=\sqrt{2}$，$A=30°$，$C=135°$ であるとき，辺ABの長さ c

(3) $c=5$，$B=120°$，$C=45°$ であるとき，辺CAの長さ b

解答　(1) $2\sqrt{6}$　(2) 2　(3) $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

(1) 正弦定理から

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

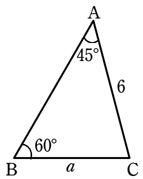
よって

$\dfrac{a}{\sin45°}=\dfrac{6}{\sin60°}$

したがって

$a=\dfrac{6\sin45°}{\sin60°}=6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$



(2) 正弦定理から

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

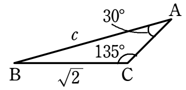
よって

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin30°}=\dfrac{c}{\sin135°}$

したがって

$c=\dfrac{\sqrt{2}\sin135°}{\sin30°}=\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{1}{2}$

$=\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{2}{1}=2$



(3) 正弦定理から

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

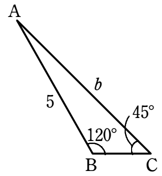
よって

$\dfrac{b}{\sin120°}=\dfrac{5}{\sin45°}$

したがって

$b=\dfrac{5\sin120°}{\sin45°}=5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$



$\boxed{29}$ △ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1) $b=5$，$c=2\sqrt{2}$，$A=45°$ であるとき，辺BCの長さ a

(2) $a=2$，$c=3$，$B=120°$ であるとき，辺ACの長さ b

(3) $a=\sqrt{3}$，$b=6$，$C=30°$ であるとき，辺ABの長さ c

解答　(1) $\sqrt{13}$　(2) $\sqrt{19}$　(3) $\sqrt{21}$

(1) 余弦定理から

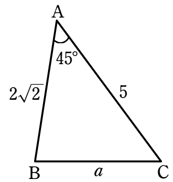
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=5^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot5\cdot2\sqrt{2}\cos45°$

$=25+8-20\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=13$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{13}$



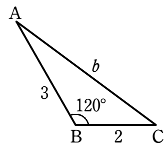
(2) 余弦定理から

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos120°$

$=9+4-12\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=19$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{19}$



(3) 余弦定理から

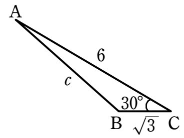
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=(\sqrt{3})^2+6^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot6\cos30°$

$=3+36-12\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=21$

$c>0$ であるから　$c=\sqrt{21}$



$\boxed{30}$ 次のような△ABCの面積 S を求めよ。

(1) $b=3$，$c=5$，$A=60°$　　(2) $a=3$，$c=2$，$B=30°$

(3) $a=2\sqrt{2}$，$b=3$，$C=135°$

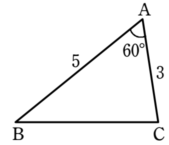
解答　(1) $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 3

(1) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin60°$

$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

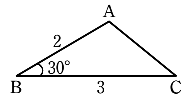
$=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$



(2) $S=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin30°$

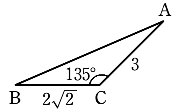
$=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$



(3) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot3\sin135°$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3$



$\boxed{31}$ △ABCにおいて，3辺の長さが $a=7$，$b=8$，$c=9$ であるとき，次のものを求めよ。

(1) $\cos A$　　(2) $\sin A$　　(3) 面積 S

解答　(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(3) $12\sqrt{5}$

(1) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot8\cdot9}$

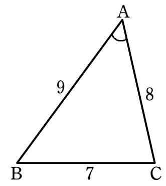
$=\dfrac{96}{2\cdot8\cdot9}=\dfrac{2}{3}$

(2) $\sin^2 A=1-\cos^2 A$

$=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(3) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot9\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=12\sqrt{5}$



$\boxed{32}$ △ABCにおいて，3辺の長さが $a=5$，$b=7$，$c=8$ であるとき，△ABCの面積 S を求めよ。

解答　$10\sqrt{3}$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot7\cdot8}$

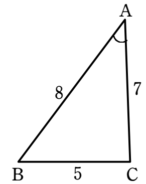
$=\dfrac{88}{2\cdot7\cdot8}=\dfrac{11}{14}$

$\sin^2 A=1-\cos^2 A$

$=1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2=\dfrac{75}{196}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{\dfrac{75}{196}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=10\sqrt{3}$



$\boxed{33}$ 次の△ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1) $a=5$，$A=30°$ であるとき，外接円の半径 R

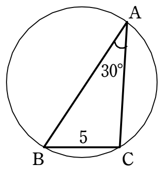
(2) $c=\sqrt{6}$，$B=45°$，$C=30°$ であるとき，辺CAの長さ b

(3)　$a=8$，$b=5$，$C=60^\circ$ であるとき，辺 AB の長さ c

(4)　$a=\sqrt{10}$，$b=3\sqrt{2}$，$c=4$ であるとき，$\cos A$ の値と A

解答　(1)　5　　(2)　$2\sqrt{3}$　　(3)　7　　(4)　$\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$A=45^\circ$

(1)　正弦定理から



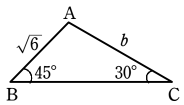
$$\frac{5}{\sin 30^\circ}=2R$$

よって　$R=\dfrac{5}{2\sin 30^\circ}$

$$=\frac{5}{2}\div\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\times\frac{2}{1}$$

$$=5$$

(2)　正弦定理から



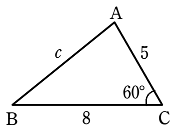
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

よって　$\dfrac{b}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 30^\circ}$

したがって　$b=\dfrac{\sqrt{6}\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{1}{2}$

$$=\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{1}=2\sqrt{3}$$

(3)　余弦定理から



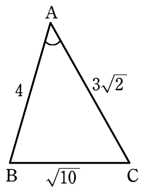
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$=8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cos 60^\circ$$

$$=64+25-80\cdot\frac{1}{2}=49$$

$c>0$ であるから　$c=\sqrt{49}=7$

(4)　余弦定理により



$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

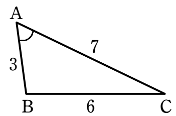
$$=\frac{(3\sqrt{2})^2+4^2-(\sqrt{10})^2}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4}$$

$$=\frac{24}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$A=45^\circ$

34 △ABC において，3 辺の長さが $a=6$，$b=7$，$c=3$ であるとき，△ABC の面積 S を求めよ。

解答　$4\sqrt{5}$



$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{7^2+3^2-6^2}{2\cdot 7\cdot 3}$$

$$=\frac{22}{2\cdot 7\cdot 3}=\frac{11}{21}$$

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{11}{21}\right)^2=\frac{320}{441}$$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{\dfrac{320}{441}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{21}$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 3\cdot\frac{8\sqrt{5}}{21}=4\sqrt{5}$$

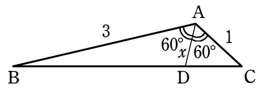
35 $\angle A=120^\circ$，AB$=3$，AC$=1$ である △ABC の ∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

解答　$\mathrm{AD}=\dfrac{3}{4}$

AD$=x$ とする。

△ABD＋△ADC＝△ABC から

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot 1\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot\sin 120^\circ$$



よって　$3x+x=3$

これを解いて　$x=\dfrac{3}{4}$

すなわち　$\mathrm{AD}=\dfrac{3}{4}$

別解　△ABC において，余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2=3^2+1^2-2\cdot 3\cdot 1\cdot\cos 120^\circ=9+1-2\cdot 3\left(-\frac{1}{2}\right)=13$$

BC>0 であるから　$\mathrm{BC}=\sqrt{13}$

BD : DC$=3:1$ であるから　$\mathrm{BD}=\dfrac{3}{4}\mathrm{BC}=\dfrac{3\sqrt{13}}{4}$

△ABC において，余弦定理により

$$\cos B=\frac{3^2+(\sqrt{13})^2-1^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{13}}=\frac{7}{2\sqrt{13}}$$

ゆえに，△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{AD}^2=3^2+\left(\frac{3\sqrt{13}}{4}\right)^2-2\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{7}{2\sqrt{13}}=\frac{9}{16}$$

AD>0 であるから　$\mathrm{AD}=\dfrac{3}{4}$

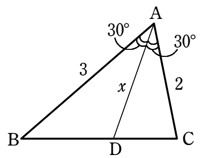
36 AB$=3$，AC$=2$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ の △ABC において，∠A の二等分線と BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

解答　$\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

AD$=x$ とする。

△ABD＋△ADC＝△ABC から

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60^\circ$$



よって　$3x+2x=6\sqrt{3}$

ゆえに　$x=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$　　すなわち　$\mathrm{AD}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$