1 200の正の約数は何個あるか。

解答　12個

解説

200を素因数分解すると

$$200=2^3\cdot 5^2$$

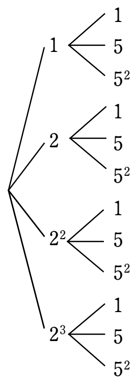
200の正の約数は，2^3の正の約数と，5^2の正の約数の積で表される。

2^3の正の約数は　1，2，2^2，2^3の4個

5^2の正の約数は　1，5，5^2　の3個

よって，200の正の約数の個数は，積の法則により

$4\times 3=12$　答　12個



2 次の数について，正の約数は何個あるか。また，正の約数の総和を求めよ。

(1)　72　　(2)　300

解答　(1)　12個，総和は195　　(2)　18個，総和は868

解説

(1)　72を素因数分解すると　$72=2^3\cdot 3^2$

72の正の約数は，2^3の正の約数と，3^2の正の約数の積で表される。

2^3の正の約数は　1，2，2^2，2^3の4個

3^2の正の約数は　1，3，3^2の3個

よって，72の正の約数の個数は，積の法則により　$4\times 3=12$（個）

また，72の正の約数の総和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=15\times 13=195$$

(2)　300を素因数分解すると　$300=2^2\cdot 3\cdot 5^2$

300の正の約数は，2^2の正の約数と，3の正の約数と，5^2の正の約数の積で表される。

2^2の正の約数は　1，2，2^2の3個

3の正の約数は　1，3の2個

5^2の正の約数は　1，5，5^2の3個

よって，300の正の約数の個数は，積の法則により　$3\times 2\times 3=18$（個）

また，300の正の約数の総和は

$$(1+2+2^2)(1+3)(1+5+5^2)=7\times 4\times 31=868$$

3 **504の正の約数の個数**

504を素因数分解すると

$$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$$

よって，504の正の約数の個数は

$$(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot 3\cdot 2=24$$

すなわち　24個

解説

4 次の数の正の約数の個数を求めよ。

(1)　48　　(2)　216　　(3)　600

解答　(1)　10個　　(2)　16個　　(3)　24個

解説

(1)　48を素因数分解すると　$48=2^4\cdot 3$

よって，48の正の約数の個数は

$$(4+1)(1+1)=5\cdot 2=10$$

すなわち　10個

(2)　216を素因数分解すると　$216=2^3\cdot 3^3$

よって，216の正の約数の個数は

$$(3+1)(3+1)=4\cdot 4=16$$

すなわち　16個

(3)　600を素因数分解すると　$600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$

よって，600の正の約数の個数は

$$(3+1)(1+1)(2+1)=4\cdot 2\cdot 3=24$$

すなわち　24個

5 3780の正の約数の個数を求めよ。

解答　48個

解説

3780を素因数分解すると　$3780=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$

よって，3780の正の約数の個数は

$$(2+1)(3+1)(1+1)(1+1)=48$$

すなわち　48個

6 次の数の正の約数の個数を求めよ。[各10点]

(1)　112　　(2)　700

解答　(1)　$112=2^4\cdot 7$であるから

$(4+1)(1+1)=10$（個）

(2)　$700=2^2\cdot 5^2\cdot 7$であるから

$(2+1)(2+1)(1+1)=18$（個）

解説

(1)　$112=2^4\cdot 7$であるから

$(4+1)(1+1)=10$（個）

(2)　$700=2^2\cdot 5^2\cdot 7$であるから

$(2+1)(2+1)(1+1)=18$（個）

7 1200の正の約数は何個あるか。また，その約数の和を求めよ。

解答　30個，和は3844

解説

$1200=2^4\cdot 3\cdot 5^2$であるから，1200の正の約数は，

$2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$　$(a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ ;\ b=0,\ 1\ ;\ c=0,\ 1,\ 2)$

と表される。

（約数の個数）　aの定め方は5通り。

そのおのおのについて，bの定め方は2通り。

更に，そのおのおのについて，cの定め方は3通りある。

よって，積の法則により　$5\times 2\times 3=30$（個）

（約数の和）　1200の正の約数は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1+5+5^2)$$

を展開した項にすべて現れる。よって，求める和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1+5+5^2)=31\times 4\times 31=3844$$

8 (1)　次の式を展開すると，異なる項は何個あるか。

（ア）　$(a+b)(x+y+z)$　　（イ）　$(a+b+c)(x+y)^2$

(2)　5400の正の約数の個数と，その約数の和を求めよ。また，5400の正の約数のうち，奇数は何個あるか。

解答　(1)　（ア）　6個　　（イ）　9個　　(2)　順に　48個，18600，12個

解説

(1)　（ア）　$(a+b)(x+y+z)$を展開したときの各項は，次の形になる。

（aかbの一方）×（x，y，zのどれか1つ）

よって，求める項の個数は　$2\times 3=6$（個）

（イ）　$(a+b+c)(x+y)^2=(a+b+c)(x^2+2xy+y^2)$

$(a+b+c)(x^2+2xy+y^2)$を展開すると，各項は次の形になる。

（a，b，cのどれか1つ）×（x^2，$2xy$，y^2のどれか1つ）

よって，求める項の個数は　$3\times 3=9$（個）

(2)　$5400=2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$であるから，5400の正の約数は

$2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$　$(a=0,\ 1,\ 2,\ 3\ ;\ b=0,\ 1,\ 2,\ 3\ ;\ c=0,\ 1,\ 2)$

の形に表される。

2) 5400
2) 2700
2) 1350
3) 675
3) 225
3) 75
5) 25
5

（約数の個数）　aの定め方は4通り。

そのおのおのについてbの定め方は4通り。

更に，そのおのおのについてcの定め方は3通りある。

よって，積の法則により　$4\times 4\times 3=48$（個）

（約数の和）　5400の正の約数は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2+3^3)(1+5+5^2)$$

を展開した項にすべて現れる。よって，求める和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2+3^3)(1+5+5^2)=15\times 40\times 31=18600$$

（約数のうち奇数）　条件を満たすものは

$3^b\cdot 5^c$　$(b=0,\ 1,\ 2,\ 3\ ;\ c=0,\ 1,\ 2)$

の形に表される。

bの定め方は4通りあり，そのおのおのについてcの定め方が3通りあるから

$4\times 3=12$（個）

9 (1)　720の正の約数の個数と正の約数の総和を求めよ。

(2)　24の倍数で，正の約数の個数が21個である自然数nを求めよ。

解答　(1)　個数は 30 個，総和は 2418　　(2)　$n=576$

解説

(1)　$720=2^4\cdot3^2\cdot5$ であるから，正の約数の個数は

$$(4+1)(2+1)(1+1)=5\cdot3\cdot2=30\ (個)$$

また，正の約数の総和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+5)=31\cdot13\cdot6=2418$$

(2)　n の正の約数の個数は $21\ (=21\cdot1=7\cdot3)$ であるから，n は

$$p^{20}\quad または\quad p^6q^2\ (p,\ q\ は異なる素数)$$

の形で表される。

n は 24 の倍数であり，$24=2^3\cdot3$ であるから，n は p^6q^2 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は　$n=2^6\cdot3^2=576$

10 540 の正の約数は全部で何個あるか。また，その約数の和を求めよ。

解答　順に 24 個，1680

解説

$540=2^2\cdot3^3\cdot5$ であるから，540 の正の約数は，

$$a=0,\ 1,\ 2;\quad b=0,\ 1,\ 2,\ 3;\quad c=0,\ 1$$

として，$2^a\cdot3^b\cdot5^c$ と表される。

(約数の個数)　a の定め方は 3 通り。

そのおのおのについて，b の定め方は 4 通り。

更に，そのおのおのについて，c の定め方は 2 通りある。

よって，積の法則により　$3\times4\times2=24$ (個)

(約数の和)　540 の正の約数は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5)$$

を展開した項にすべて現れる。よって，求める和は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5)=7\times40\times6=1680$$

11 1400 の正の約数の個数と，正の約数の和を求めよ。また，1400 の正の約数のうち偶数は何個あるか。

解答　個数は 24 個，和は 3720，偶数は 18 個

解説

$1400=2^3\cdot5^2\cdot7$ であるから，1400 の正の約数は

$$2^a\cdot5^b\cdot7^c\ (a=0,\ 1,\ 2,\ 3;\ b=0,\ 1,\ 2;\ c=0,\ 1)$$

と表すことができる。

a の定め方は 4 通り。

そのおのおのについて，b の定め方は 3 通り。

更に，そのおのおのについて，c の定め方は 2 通りある。

よって，1400 の正の約数の個数は　$4\times3\times2=24$ (個)

また，1400 の正の約数は $(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)(1+7)$ を展開した項にすべて現れる。

よって，求める約数の和は　$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)(1+7)=15\times31\times8=3720$

また，1400 の正の約数のうち，偶数は

$$2^a\cdot5^b\cdot7^c\ (a=1,\ 2,\ 3;\ b=0,\ 1,\ 2;\ c=0,\ 1)$$

と表すことができる。

a の定め方は 3 通り。

そのおのおのについて，b の定め方は 3 通り。

更に，そのおのおのについて，c の定め方は 2 通りある。

よって，1400 の正の約数のうち，偶数であるものは　$3\times3\times2=18$ (個)

12 1050 の正の約数は ア[　] 個あり，その約数のうち 1 と 1050 を除く正の約数の和は イ[　] である。

解答　(ア)　24　　(イ)　1925

解説

(ア)　$1050=2\cdot3\cdot5^2\cdot7$ であるから，1050 の正の約数の個数は

$$(1+1)(1+1)(2+1)(1+1)=2\cdot2\cdot3\cdot2=24$$

(イ)　1050 の正の約数の総和は　$(1+2)(1+3)(1+5+5^2)(1+7)=3\cdot4\cdot31\cdot8=2976$

1 と 1050 を除くと　$2976-1-1050=1925$

13 (1)　360 の正の約数の個数と，正の約数のうち偶数であるものの総和を求めよ。

(2)　12^n の正の約数の個数が 28 個となるような自然数 n を求めよ。

(3)　56 の倍数で，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を求めよ。

解答　(1)　個数は 24 個，総和は 1092　　(2)　$n=3$　　(3)　$n=784$

解説

(1)　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$ であるから，正の約数の個数は

$$(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot3\cdot2=24\ (個)$$

また，正の約数のうち偶数であるものの総和は

$$(2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=14\cdot13\cdot6=1092$$

(2)　$12^n=(2^2\cdot3)^n=2^{2n}\cdot3^n$ であるから，12^n の正の約数が 28 個であるための条件は

$$(2n+1)(n+1)=28$$

よって　$2n^2+3n-27=0$　　ゆえに　$(n-3)(2n+9)=0$

n は自然数であるから　$n=3$

(3)　n の正の約数の個数は $15\ (=15\cdot1=5\cdot3)$ であるから，n は

$$p^{14}\quad または\quad p^4q^2\quad (p,\ q\ は異なる素数)$$

の形で表される。

n は 56 の倍数であり，$56=2^3\cdot7$ であるから，n は p^4q^2 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は　$n=2^4\cdot7^2=784$

14 (1)　756 の正の約数の個数と，正の約数のうち奇数であるものの総和を求めよ。

(2)　正の約数の個数が 3 で，正の約数の総和が 57 となる自然数 n を求めよ。

(3)　300 以下の自然数のうち，正の約数が 9 個である数の個数を求めよ。

解答　(1)　24 個，総和 320　　(2)　$n=49$　　(3)　5 個

解説

(1)　$756=2^2\cdot3^3\cdot7$ であるから，正の約数の個数は

$$(2+1)(3+1)(1+1)=3\cdot4\cdot2=24\ (個)$$

756 の正の約数のうち，奇数であるものは $3^3\cdot7$ の正の約数である。

その総和は　$(1+3+3^2+3^3)(1+7)=40\cdot8=320$

(2)　n の正の約数の個数は $3\ (=3\cdot1)$ であるから，

$$n=p^{3-1}=p^2\ (p\ は素数)\quad と表される。$$

n の正の約数の総和が 57 であるから　$1+p+p^2=57$

よって　$p^2+p-56=0$　　ゆえに　$(p-7)(p+8)=0$

p は素数であるから　$p=7$　　よって　$n=7^2=49$

(3)　正の約数の個数が $9\ (=9\cdot1=3\cdot3)$ であるような自然数を n として，n を素因数分解すると，次の形で表される。

$$p^8\ または\ p^2q^2\ (p,\ q\ は異なる素数，p<q)$$

[1]　$n=p^8$ の形の場合

$2^8=256$，$3^8>300$ であるから，条件を満たす p の値は　$p=2$

[2]　$n=p^2q^2$ の形の場合

$\sqrt{300}=10\sqrt{3}<18$ であるから，積 pq が 17 以下となるような素数 p，q について考える。

$p=2$ のとき，$p<q$，$2q\leqq17$ を満たす素数 q は　$q=3,\ 5,\ 7$

$p=3$ のとき，$p<q$，$3q\leqq17$ を満たす素数 q は　$q=5$

$p=5$ のとき，$p<q$，$5q\leqq17$ を満たす素数 q は存在しない。

よって，正の約数の個数が 9 個であるような自然数は 5 個。

15 次の数の正の約数の個数と，その約数の総和を求めよ。

(1)　$5\cdot2^3$　　(2)　108　　(3)　540

解答　順に　(1)　8 個，90　　(2)　12 個，280　　(3)　24 個，1680

解説

(1)　$5\cdot2^3$ の正の約数は，5 の正の約数と 2^3 の正の約数の積で表される。

5 の正の約数は　1，5 の 2 個

2^3 の正の約数は　1，2，2^2，2^3 の 4 個

よって，$5\cdot2^3$ の正の約数の個数は　$2\times4=8$ (個)

また，$5\cdot2^3$ の正の約数の総和は　$(1+5)(1+2+2^2+2^3)=90$

(2)　108 を素因数分解すると　$108=2^2\cdot3^3$

$2^2\cdot3^3$ の正の約数は，2^2 の正の約数と 3^3 の正の約数の積で表される。

2^2 の正の約数は　1，2，2^2 の 3 個

3^3 の正の約数は　1，3，3^2，3^3 の 4 個

よって，108 の正の約数の個数は　$3\times4=12$ (個)

また，108 の正の約数の総和は　$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)=280$

(3)　540 を素因数分解すると　$540=2^2\cdot3^3\cdot5$

$2^2\cdot3^3\cdot5$ の正の約数は，2^2 の正の約数と 3^3 の正の約数と 5 の正の約数の積で表される。

2^2 の正の約数は　1，2，2^2 の 3 個

3^3 の正の約数は　1，3，3^2，3^3 の 4 個

5 の正の約数は　1，5 の 2 個

よって，540 の正の約数の個数は　$3\times4\times2=24$ (個)

また，540 の正の約数の総和は　$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5)=1680$

16 次の数の正の約数の個数を求めよ。

(1)　144　　(2)　756　　(3)　840

(4)　900　　(5)　1872　　(6)　5280

解答　(1)　15 個　　(2)　24 個　　(3)　32 個　　(4)　27 個　　(5)　30 個　　(6)　48 個

解説

(1)　144 を素因数分解すると　$144=2^4\cdot3^2$

よって，144 の正の約数の個数は　$(4+1)(2+1)=5\cdot3=15$（個）

(2)　756 を素因数分解すると　$756=2^2\cdot3^3\cdot7$

よって，756 の正の約数の個数は　$(2+1)(3+1)(1+1)=3\cdot4\cdot2=24$（個）

(3)　840 を素因数分解すると　$840=2^3\cdot3\cdot5\cdot7$

よって，840 の正の約数の個数は　$(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)=4\cdot2\cdot2\cdot2=32$（個）

(4)　900 を素因数分解すると　$900=2^2\cdot3^2\cdot5^2$

よって，900 の正の約数の個数は　$(2+1)(2+1)(2+1)=3\cdot3\cdot3=27$（個）

(5)　1872 を素因数分解すると　$1872=2^4\cdot3^2\cdot13$

よって，1872 の正の約数の個数は　$(4+1)(2+1)(1+1)=5\cdot3\cdot2=30$（個）

(6)　5280 を素因数分解すると　$5280=2^5\cdot3\cdot5\cdot11$

よって，5280 の正の約数の個数は　$(5+1)(1+1)(1+1)(1+1)=6\cdot2\cdot2\cdot2=48$（個）

17 648 の正の約数の個数と，その約数の総和を求めよ。

解答　順に　20 個，1815

解説

648 を素因数分解すると　$648=2^3\cdot3^4$

648 の正の約数は，2^3 の正の約数と 3^4 の正の約数の積で表される。

2^3 の正の約数は　1，2，2^2，2^3 の 4 個

3^4 の正の約数は　1，3，3^2，3^3，3^4 の 5 個

よって，648 の正の約数の個数は　$4\times5=20$（個）

また，約数の総和は　$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2+3^3+3^4)=15\times121=1815$

18 次の数の正の約数の個数と，その約数の総和を求めよ。

(1)　32　　(2)　200　　(3)　60

解答　個数，総和の順に　(1)　6 個，63　　(2)　12 個，465　　(3)　12 個，168

解説

(1)　$32=2^5$ であるから，32 の正の約数は 1，2，2^2，2^3，2^4，2^5 である。

よって，32 の正の約数の個数は　6 個

また，約数の総和は　$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=63$

参考　正の約数の個数は　$5+1=6$（個）

(2)　$200=2^3\cdot5^2$ であるから，200 の正の約数は，2^3 の正の約数と 5^2 の正の約数の積で表される。

2^3 の正の約数は　1，2，2^2，2^3 の 4 個

5^2 の正の約数は　1，5，5^2 の 3 個

よって，200 の正の約数の個数は，積の法則により

$4\times3=12$（個）

また，200 の正の約数は，$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)$ を展開した項にすべて現れるから，その約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)=15\times31=465$

参考　正の約数の個数は　$(3+1)(2+1)=12$（個）

(3)　$60=2^2\cdot3\cdot5$ であるから，60 の正の約数は，2^2 の正の約数と 3 の正の約数と 5 の正の約数の積で表される。

2^2 の正の約数は　1，2，2^2 の 3 個

3 の正の約数は　1，3 の 2 個

5 の正の約数は　1，5 の 2 個

よって，60 の正の約数の個数は，積の法則により

$3\times2\times2=12$（個）

また，60 の正の約数は，$(1+2+2^2)(1+3)(1+5)$ を展開した項にすべて現れるから，その約数の総和は

$(1+2+2^2)(1+3)(1+5)=7\times4\times6=168$

参考　正の約数の個数は　$(2+1)(1+1)(1+1)=12$（個）

19 次の数の正の約数の個数を求めよ。

(1)　96　　(2)　540　　(3)　784　　(4)　1260

解答　(1)　12 個　　(2)　24 個　　(3)　15 個　　(4)　36 個

解説

(1)　96 を素因数分解すると　$96=2^5\cdot3$

よって，96 の正の約数の個数は

$(5+1)(1+1)=6\cdot2=12$（個）

(2)　540 を素因数分解すると　$540=2^2\cdot3^3\cdot5$

よって，540 の正の約数の個数は

$(2+1)(3+1)(1+1)=3\cdot4\cdot2=24$（個）

(3)　784 を素因数分解すると　$784=2^4\cdot7^2$

よって，784 の正の約数の個数は

$(4+1)(2+1)=5\cdot3=15$（個）

(4)　1260 を素因数分解すると　$1260=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$

よって，1260 の正の約数の個数は

$(2+1)(2+1)(1+1)(1+1)=3\cdot3\cdot2\cdot2=36$（個）

20 108 の正の約数の個数と，その約数の総和を求めよ。

解答　正の約数の個数 12 個，約数の総和 280

解説

$108=2^2\cdot3^3$ であるから，108 の正の約数は，2^2 の正の約数と 3^3 の正の約数の積で表される。

2^2 の正の約数は　1，2，2^2 の 3 個

3^3 の正の約数は　1，3，3^2，3^3 の 4 個

よって，108 の正の約数の個数は，積の法則により

$3\times4=12$（個）

また，108 の正の約数は，$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)$ を展開した項にすべて現れるから，その約数の総和は　$(1+2+4)(1+3+9+27)=7\times40=280$

参考　素因数分解した結果が $N=p^aq^br^c\cdot\cdots\cdots$ となる自然数 N について，

約数の個数は　$(a+1)(b+1)(c+1)\cdot\cdots\cdots$

約数の総和は

$(1+p+p^2+\cdots\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots\cdots+q^b)(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^c)\cdot\cdots\cdots$

21 次の数の正の約数の総和を求めよ。

(1)　200　　(2)　48　　(3)　360

解答　(1)　465　　(2)　124　　(3)　1170

解説

(1)　200 を素因数分解すると　$200=2^3\cdot5^2$

よって，200 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)=15\times31=465$

(2)　48 を素因数分解すると　$48=2^4\cdot3$

よって，48 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)=31\times4=124$

(3)　360 を素因数分解すると　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

よって，360 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=15\times13\times6=1170$

22 600 の正の約数の総和を求めよ。

解答　1860

解説

600 を素因数分解すると　$600=2^3\cdot3\cdot5^2$

よって，600 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+5+5^2)=15\times4\times31=1860$

23 次の数の正の約数の総和を求めよ。

(1)　392　　(2)　405　　(3)　2016

解答　(1)　855　　(2)　726　　(3)　6552

解説

(1)　392 を素因数分解すると　$392=2^3\cdot7^2$

よって，392 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3)(1+7+7^2)=15\times57=855$

(2)　405 を素因数分解すると　$405=3^4\cdot5$

よって，405 の正の約数の総和は

$(1+3+3^2+3^3+3^4)(1+5)=121\times6=726$

(3)　2016 を素因数分解すると　$2016=2^5\cdot3^2\cdot7$

よって，2016 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+7)=63\times13\times8=6552$

24 $72(=2^3\cdot3^2)$ の正の約数は，次のような式の展開にすべて現れる。

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=1\cdot1+1\cdot3+1\cdot3^2+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot3^2$$
$$+2^2\cdot1+2^2\cdot3+2^2\cdot3^2+2^3\cdot1+2^3\cdot3+2^3\cdot3^2$$

これを参考にして，次の数の正の約数の総和を求めよ。

(1)　200　　(2)　144

解答　(1)　465　　(2)　403

解説

(1)　$200=2^3\cdot5^2$ であるから，200 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)=(1+2+4+8)(1+5+25)$

$=15\times31=465$

(2)　$144=2^4\cdot3^2$ であるから，144 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)=(1+2+4+8+16)(1+3+9)$

$=31\times13=403$

$\boxed{25}$ 次の数の正の約数の総和を求めよ。

(1)　200　　(2)　588　　(3)　1980

解答　(1)　465　(2)　1596　(3)　6552

解説

(1)　200 を素因数分解すると　$200=2^3\cdot5^2$

よって，200 の正の約数は $(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)$ を展開するとすべて現れる。

その展開式は 200 の正の約数の総和である。

したがって，正の約数の総和は　$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)=15\cdot31=465$

(2)　588 を素因数分解すると　$588=2^2\cdot3\cdot7^2$

よって，588 の正の約数は $(1+2+2^2)(1+3)(1+7+7^2)$ を展開するとすべて現れる。

その展開式は 588 の正の約数の総和である。

したがって，正の約数の総和は　$(1+2+2^2)(1+3)(1+7+7^2)=7\cdot4\cdot57=1596$

(3)　1980 を素因数分解すると　$1980=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11$

よって，1980 の正の約数は $(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+5)(1+11)$ を展開するとすべて現れる。

その展開式は 1980 の正の約数の総和である。

したがって，正の約数の総和は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+5)(1+11)=7\cdot13\cdot6\cdot12=6552$$

$\boxed{26}$ 900 の正の約数の総和を求めよ。

解答　2821

解説

900 を素因数分解すると　$900=2^2\cdot3^2\cdot5^2$

よって，900 の正の約数は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+5+5^2)$$

を展開するとすべて現れる。

その展開式は 900 の正の約数の総和である。

したがって，正の約数の総和は　$(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+5+5^2)=2821$

$\boxed{27}$ 次の数の正の約数の和を求めよ。

(1)　3^7　　(2)　$3^4\cdot7^3$　　(3)　864

解答　(1)　3280　(2)　48400　(3)　2520

解説

(1)　求める和は　$1+3+3^2+\cdots\cdots+3^7=\dfrac{3^8-1}{3-1}=3280$

(2)　求める和は

$$(1+3+3^2+3^3+3^4)(1+7+7^2+7^3)=\frac{3^5-1}{3-1}\cdot\frac{7^4-1}{7-1}=121\cdot400$$
$$=48400$$

(3)　$864=2^5\cdot3^3$ であるから，求める和は

$$(1+2+\cdots\cdots+2^5)(1+3+3^2+3^3)=\frac{2^6-1}{2-1}\cdot\frac{3^4-1}{3-1}=63\cdot40$$
$$=2520$$

$\boxed{28}$ 800 の正の約数の和を求めよ。

解答　1953

解説

800 を素因数分解すると　$2^5\cdot5^2$

よって，800 の正の約数の和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+5+5^2)=\frac{2^6-1}{2-1}\cdot\frac{5^3-1}{5-1}=1953$$

$\boxed{29}$ 次の数の正の約数の総和を求めよ。

(1)　2^9　　(2)　$2^5\cdot3^4$　　(3)　4032

解答　(1)　1023　(2)　7623　(3)　13208

解説

(1)　2^9 の正の約数の総和 S は　$S=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^9$

よって，等比数列の和の公式を用いて　$S=\dfrac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=1024-1=1023$

(2)　$2^5\cdot3^4$ の正の約数の総和 S は，次のように表される。

$$S=(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^5)(1+3+3^2+3^3+3^4)$$

よって，等比数列の和の公式を用いて

$$S=\frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}\times\frac{1\cdot(3^5-1)}{3-1}=63\times121=7623$$

(3)　4032 を素因数分解すると　$4032=2^6\cdot3^2\cdot7$

よって，4032 の正の約数の総和 S は，次のように表される。

$$S=(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^6)(1+3+3^2)(1+7)$$

したがって，等比数列の和の公式を用いて

$$S=\frac{1\cdot(2^7-1)}{2-1}\times13\times8=127\times13\times8=13208$$

$\boxed{30}$ 次の数の正の約数の和を求めよ。

(1)　2^9　　(2)　$2^5\cdot3^3$　　(3)　720

解答　(1)　1023　(2)　2520　(3)　2418

解説

(1)　2^9 の正の約数の和は

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^9=\frac{2^{10}-1}{2-1}=1023$$

(2)　$2^5\cdot3^3$ の正の約数の和は

$$(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^5)(1+3+3^2+3^3)=\frac{2^6-1}{2-1}\times\frac{3^4-1}{3-1}$$
$$=63\times\frac{80}{2}=2520$$

(3)　$720=2^4\cdot3^2\cdot5$ であるから，求める和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+5)=\frac{2^5-1}{2-1}\times\frac{3^3-1}{3-1}\times6$$
$$=31\times13\times6=2418$$

$\boxed{31}$ 次の数の正の約数全体の和を求めよ。

(1)　2^{10}　　(2)　$2^5\cdot3^3$　　(3)　720

解答　(1)　2047　(2)　2520　(3)　2418

解説

(1)　2^{10} の正の約数全体の和 S は　$S=1+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{10}$

よって，等比数列の和の公式を用いて　$S=\dfrac{1\cdot(2^{11}-1)}{2-1}=2048-1=2047$

(2)　$2^5\cdot3^3$ の正の約数全体の和 S は，次のように表される。

$$S=(1+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^5)(1+3^1+3^2+3^3)$$

よって，等比数列の和の公式を用いて

$$S=\frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}\times\frac{1\cdot(3^4-1)}{3-1}=63\times40=2520$$

(3)　$720=2^4\cdot3^2\cdot5$ の正の約数全体の和 S は，次のように表される。

$$S=(1+2^1+2^2+2^3+2^4)(1+3^1+3^2)(1+5^1)$$

よって，等比数列の和の公式を用いて

$$S=\frac{1\cdot(2^5-1)}{2-1}\times\frac{1\cdot(3^3-1)}{3-1}\times6=31\times13\times6=2418$$

$\boxed{32}$ $2^3\cdot3^4$ の正の約数全体の和を求めよ。

解答　1815

解説

$2^3\cdot3^4$ の正の約数全体の和 S は，次のように表される。

$$S=(1+2^1+2^2+2^3)(1+3^1+3^2+3^3+3^4)$$

よって，等比数列の和の公式を用いて

$$S=\frac{1\cdot(2^4-1)}{2-1}\times\frac{1\cdot(3^5-1)}{3-1}=15\times121=1815$$

$\boxed{33}$ 次の数の正の約数全体の和を求めよ。

(1)　3^7　　(2)　$2^4\cdot3^3$　　(3)　960

解答　(1)　3280　(2)　1240　(3)　3048

解説

(1)　求める和は

$$1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7=\frac{1\cdot(3^8-1)}{3-1}=3280$$

(2)　求める和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2+3^3)=\frac{1\cdot(2^5-1)}{2-1}\times\frac{1\cdot(3^4-1)}{3-1}=1240$$

(3)　$960=2^6\cdot3\cdot5$ であるから，求める和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)(1+3)(1+5)=\frac{1\cdot(2^7-1)}{2-1}\times4\times6=3048$$

$\boxed{34}$ 次の数について，正の約数全体の和を求めよ。

(1)　512　　(2)　4000

解答　(1)　1023　　(2)　9828

解説

(1)　512 を素因数分解すると　　$512=2^9$

2^9 の正の約数は　　$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots\cdots,\ 2^9$

よって，512 の正の約数全体の和は

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^9=\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=1023$$

(2)　4000 を素因数分解すると　　$4000=2^5\cdot5^3$

2^5 の正の約数は　$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5$　　　5^3 の正の約数は　$1,\ 5,\ 5^2,\ 5^3$

よって，4000 の正の約数全体の和は

$$\begin{aligned}&(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+5+5^2+5^3)\\&=\frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}\times\frac{1\cdot(5^4-1)}{5-1}=63\cdot156=9828\end{aligned}$$

35　432 の正の約数全体の和を求めよ。

解答　1240

解説

432 を素因数分解すると　　$432=2^4\cdot3^3$

2^4 の正の約数は　$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4$　　　3^3 の正の約数は　$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3$

よって，432 の正の約数全体の和は

$$\begin{aligned}&(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2+3^3)\\&=\frac{1\cdot(2^5-1)}{2-1}\cdot\frac{1\cdot(3^4-1)}{3-1}=31\cdot\frac{80}{2}=1240\end{aligned}$$