$\boxed{1}$ $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$　　(2) xy　　(3) x^2+y^2

解答　(1) $\sqrt{5}$　(2) 1　(3) 3

解説

(1) $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって　$x+y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{5}$

(2) $xy=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=1$

(3) $x+y=\sqrt{5}$，$xy=1$ であるから

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{5})^2-2\cdot1=3$

$\boxed{2}$ $x=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$　　(2) xy

(3) x^2+y^2　　(4) x^2y+xy^2

解答　(1) $\sqrt{7}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) 6　(4) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

解説

(1) $x=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$

よって　$x+y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{7}$

別解　$x+y=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

(2) $xy=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{7})^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=6$

(4) $x^2y+xy^2=xy(x+y)=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\boxed{3}$ 等式 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ を用いて，$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，x^3+y^3 の値を求めよ。

解答　$2\sqrt{5}$

解説

$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

ゆえに

$x+y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{5}$

$xy=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=1$

よって

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(\sqrt{5})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}$

$\boxed{4}$ $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) x^2+y^2　　(2) x^2-y^2

解答　(1) 62　(2) $-16\sqrt{15}$

解説

(1) $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15}$

$y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$

ゆえに　$x+y=(4-\sqrt{15})+(4+\sqrt{15})=8$

$xy=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=1$

よって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot1=62$

(2) $x-y=(4-\sqrt{15})-(4+\sqrt{15})=-2\sqrt{15}$

よって　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=8\cdot(-2\sqrt{15})=-16\sqrt{15}$

$\boxed{5}$ $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+\dfrac{1}{x}$　　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(3) $x^2-\dfrac{1}{x^2}$

(4) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$　　(5) $x^4-\dfrac{1}{x^4}$

解答　(1) 3　(2) 7　(3) $-3\sqrt{5}$　(4) 47　(5) $-21\sqrt{5}$

解説

(1) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{9-5}$

$=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=3$

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=3^2-2=7$

(3) $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$

よって　$x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=3\cdot(-\sqrt{5})=-3\sqrt{5}$

(4) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=7^2-2=47$

(5) $x^4-\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)=7\cdot(-3\sqrt{5})=-21\sqrt{5}$

$\boxed{6}$ $x=\sqrt{5}-2$ のとき，次の式の値を求めよ。[各 10 点]

(1) $x+\dfrac{1}{x}$　　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(3) $x^2-\dfrac{1}{x^2}$

解答　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

(1) $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2=2\sqrt{5}$

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=(2\sqrt{5})^2-2=18$

(3) $x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=2\sqrt{5}\{(\sqrt{5}-2)-(\sqrt{5}+2)\}$

$=2\sqrt{5}\cdot(-4)=-8\sqrt{5}$

解説

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

(1) $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2=2\sqrt{5}$

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=(2\sqrt{5})^2-2=18$

(3) $x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=2\sqrt{5}\{(\sqrt{5}-2)-(\sqrt{5}+2)\}$

$=2\sqrt{5}\cdot(-4)=-8\sqrt{5}$

$\boxed{7}$ $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a，b，b^2+2b-2 の値を求めよ。

[20 点]

解答　$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

ここで，$1<\sqrt{3}<2$ より　$3<2+\sqrt{3}<4$

よって　$a=3$

ゆえに　$b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

したがって　$b^2+2b-2=(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)-2$

$=3-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}-2-2$

$=0$

解説

$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

ここで，$1<\sqrt{3}<2$ より　$3<2+\sqrt{3}<4$

よって　$a=3$

ゆえに　$b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

したがって　$b^2+2b-2=(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)-2$

$=3-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}-2-2$

$=0$

$\boxed{8}$ $4+2\sqrt{5}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a，b，a^2+b^2 の値を求めよ。

解答　$a=8$，$b=2\sqrt{5}-4$，$a^2+b^2=100-16\sqrt{5}$

解説

$4^2<(2\sqrt{5})^2<5^2$ であるから　$4<2\sqrt{5}<5$

ゆえに　$4+4<4+2\sqrt{5}<4+5$

すなわち　$8<4+2\sqrt{5}<9$

したがって　$a=8$，$b=(4+2\sqrt{5})-a=2\sqrt{5}-4$

よって　$a^2+b^2=8^2+(2\sqrt{5}-4)^2=64+20-16\sqrt{5}+16$

$=100-16\sqrt{5}$

9 (1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。このとき，a^2+ab+b^2 と

$\dfrac{1}{a-b-1}-\dfrac{1}{a+b+1}$ の値を求めよ。

(2) $\sqrt{42+12\sqrt{6}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a，b および $\dfrac{a}{b(b+4)}$ の値を求めよ。

解答 (1) $a^2+ab+b^2=6$，$\dfrac{1}{a-b-1}-\dfrac{1}{a+b+1}=2\sqrt{3}$

(2) $a=8$，$b=\sqrt{6}-2$，$\dfrac{a}{b(b+4)}=4$

解説

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{3}+1$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから　　$2<\sqrt{3}+1<3$

したがって，$\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分 a は　　$a=2$

また，小数部分 b は　　$b=(\sqrt{3}+1)-a=\sqrt{3}-1$

よって　　$a^2+ab+b^2=a^2+(a+b)b=2^2+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

$$=4+(\sqrt{3})^2-1^2=6$$

$$\frac{1}{a-b-1}-\frac{1}{a+b+1}=\frac{1}{2-(\sqrt{3}-1)-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1+1}$$

$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$$

別解　$\dfrac{1}{a-b-1}-\dfrac{1}{a+b+1}=\dfrac{(a+b+1)-(a-b-1)}{\{a-(b+1)\}\{a+(b+1)\}}=\dfrac{2(b+1)}{a^2-(b+1)^2}$

$$=\frac{2\{(\sqrt{3}-1)+1\}}{2^2-\{(\sqrt{3}-1)+1\}^2}=2\sqrt{3}$$

(2) $\sqrt{42+12\sqrt{6}}=\sqrt{42+2\sqrt{36\cdot6}}=\sqrt{(36+6)+2\sqrt{36\cdot6}}$

$$=\sqrt{36}+\sqrt{6}=6+\sqrt{6}$$

$2<\sqrt{6}<3$ であるから　　$8<6+\sqrt{6}<9$

よって　　$a=8$，$b=(6+\sqrt{6})-a=\sqrt{6}-2$

$$\frac{a}{b(b+4)}=\frac{8}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\frac{8}{6-4}=4$$

10 $x=\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}$，$y=\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) x^2+y^2　　(2) x^3+y^3　　(3) x^5+y^5　　(4) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

解答 (1) 28　(2) 144　(3) 3936　(4) $-\sqrt{2}$

解説

$$x=\frac{4}{3+\sqrt{5}}=\frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=3-\sqrt{5}$$

$$y=\frac{4}{3-\sqrt{5}}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=3+\sqrt{5}$$

よって　　$x+y=(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=6$

$xy=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=3^2-(\sqrt{5})^2=4$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot4=36-8=28$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=6^3-3\cdot4\cdot6=216-72=144$

(3) $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$

$$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x+y)(xy)^2$$

(1)，(2) の結果から　　$x^5+y^5=28\cdot144-6\cdot4^2=3936$

(4) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}=6-2\sqrt{4}=6-4=2$

ここで，$0<3-\sqrt{5}<3+\sqrt{5}$ であるから　　$0<x<y$

よって　　$\sqrt{x}<\sqrt{y}$　すなわち　$\sqrt{x}-\sqrt{y}<0$

したがって　　$\sqrt{x}-\sqrt{y}=-\sqrt{2}$

11 $x=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) x^2+y^2　　(2) x^3+y^3　　(3) $x^3y-2x^2y^2+xy^3$

解答 (1) 5　(2) $4\sqrt{7}$　(3) 3

解説

$$x+y=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\{(\sqrt{7}+\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{3})\}}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\cdot2\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$$

$$xy=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{4}{7-3}=1$$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{7})^2-2\cdot1=5$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(\sqrt{7})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{7}=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

(3) $x^3y-2x^2y^2+xy^3=xy(x^2-2xy+y^2)=xy\{(x+y)^2-4xy\}$

$$=1\cdot\{(\sqrt{7})^2-4\cdot1\}=3$$

12 $x=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，$y=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ の値を求めよ。

解答 $-\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$

解説

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$

また　　$x+y=(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}+\sqrt{3})=2\sqrt{5}$

$x-y=(\sqrt{5}-\sqrt{3})-(\sqrt{5}+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

$xy=(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})=5-3=2$

よって　　$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{-2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$=-\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=-\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$$

13 $x-\dfrac{1}{x}=2\sqrt{2}$（ただし $x<0$）のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $x+\dfrac{1}{x}$　　(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　　(4) $x^4-\dfrac{1}{x^4}$

解答 (1) 10　(2) $-2\sqrt{3}$　(3) $-18\sqrt{3}$　(4) $-40\sqrt{6}$

解説

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=(2\sqrt{2})^2+2=10$

(2) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=10+2=12$

$x<0$ より，$x+\dfrac{1}{x}<0$ であるから　　$x+\dfrac{1}{x}=-2\sqrt{3}$

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(-2\sqrt{3})^3-3\cdot(-2\sqrt{3})$

$$=-24\sqrt{3}+6\sqrt{3}=-18\sqrt{3}$$

(4) $x^4-\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$$=10\cdot(-2\sqrt{3})\cdot2\sqrt{2}=-40\sqrt{6}$$

14 $x^2-3x-1=0$ の解は，$x-\dfrac{1}{x}=$ ア $\boxed{}$，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ イ $\boxed{}$，$x^3-\dfrac{1}{x^3}=$ ウ $\boxed{}$ を満たす。

解答 (ア) 3　(イ) 11　(ウ) 36

解説

(ア) $x^2-3x-1=0$　……①

$x=0$ は ① の解ではない。

よって，$x\fallingdotseq0$ であるから，① の両辺を x で割ると

$x-3-\dfrac{1}{x}=0$　すなわち　$x-\dfrac{1}{x}=3$

(イ) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$

(ウ) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=3^3+3\cdot3=36$

別解　$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)=3(11+1)=36$

15 $x+y+z=\sqrt{5}+2$，$xy+yz+zx=2\sqrt{5}+1$，$xyz=2$ を満たす実数 x，y，z に対して，次の式の値を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$　　(2) $x^2+y^2+z^2$

(3) $x^3+y^3+z^3$　　(4) $x^4+y^4+z^4$

解答 (1) $\dfrac{2\sqrt{5}+1}{2}$　(2) 7　(3) $8+2\sqrt{5}$　(4) 23

解説

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{yz}{x\cdot yz}+\dfrac{zx}{y\cdot zx}+\dfrac{xy}{z\cdot xy}$

$$=\frac{yz+zx+xy}{xyz}=\frac{2\sqrt{5}+1}{2}$$

(2) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$$=(\sqrt{5}+2)^2-2(2\sqrt{5}+1)$$

$$=9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}-2=7\quad\cdots\cdots①$$

(3) ① から

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$$=(\sqrt{5}+2)\{7-(2\sqrt{5}+1)\}+3\cdot2$$

$$=2(\sqrt{5}+2)(3-\sqrt{5})+6$$

$$=2(1+\sqrt{5})+6=8+2\sqrt{5}$$

(4) $x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ ……②

ここで

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$$
$$=(2\sqrt{5}+1)^2-2\cdot2(\sqrt{5}+2)$$
$$=21+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}-8=13 \quad \cdots\cdots③$$

①，③を②に代入して

$$x^4+y^4+z^4=7^2-2\cdot13=23$$

16 $x+y+z=2\sqrt{3}+2$，$xy+yz+zx=4\sqrt{3}-1$，$xyz=-2$ のとき，$x^2+y^2+z^2$，$x^3+y^3+z^3$，$x^4+y^4+z^4$ の値をそれぞれ求めよ。

解答 $x^2+y^2+z^2=18$，$x^3+y^3+z^3=8+30\sqrt{3}$，$x^4+y^4+z^4=210$

解説

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$
$$=(2\sqrt{3}+2)^2-2(4\sqrt{3}-1)$$
$$=12+8\sqrt{3}+4-8\sqrt{3}+2=18 \quad \cdots\cdots①$$
$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$
$$=(2\sqrt{3}+2)\{18-(4\sqrt{3}-1)\}+3\cdot(-2)$$
$$=2(\sqrt{3}+1)(19-4\sqrt{3})-6$$
$$=2(19\sqrt{3}-12+19-4\sqrt{3})-6=8+30\sqrt{3}$$
$$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \quad \cdots\cdots②$$

ここで $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$$=(4\sqrt{3}-1)^2-2\cdot(-2)(2\sqrt{3}+2)$$
$$=48-8\sqrt{3}+1+8\sqrt{3}+8$$
$$=57 \quad \cdots\cdots③$$

①，③を②に代入して　$x^4+y^4+z^4=18^2-2\cdot57=210$

17 (1) $x=1+\sqrt{3}$ のとき，$P=x^4-2x^3-x^2-x$ の値を求めよ。

(2) $x=\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}$ のとき，x^3-2x-1 の値を求めよ。

解答 (1) $3+\sqrt{3}$　(2) $16\sqrt{6}+39$

解説

(1) $x=1+\sqrt{3}$ から　$x-1=\sqrt{3}$

両辺を2乗して　$(x-1)^2=3$

ゆえに　$x^2-2x-2=0$　すなわち　$x^2=2x+2$

よって　$x^3=x^2x=(2x+2)x=2x^2+2x=2(2x+2)+2x=6x+4$

$x^4=x^3x=(6x+4)x=6x^2+4x=6(2x+2)+4x=16x+12$

したがって　$P=16x+12-2(6x+4)-(2x+2)-x=x+2$

$=(1+\sqrt{3})+2=3+\sqrt{3}$

(2) $x=\dfrac{2(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\dfrac{2(\sqrt{6}+2)}{2}=\sqrt{6}+2$

よって　$x-2=\sqrt{6}$　両辺を2乗して　$(x-2)^2=6$

ゆえに　$x^2-4x-2=0$　すなわち　$x^2=4x+2$

よって　$x^3-2x-1=x^2x-2x-1=(4x+2)x-2x-1$

$$=4x^2-1=4(4x+2)-1$$
$$=16x+7=16(\sqrt{6}+2)+7$$
$$=16\sqrt{6}+39$$

18 $x=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ のとき，$x^2-3x+1=$ ア $\boxed{}$，$(x-1)(2x^2-5x+2)=$ イ $\boxed{}$ である。

解答 (ア) 0　(イ) $2+\sqrt{5}$

解説

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

よって，$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ から　$2x-3=\sqrt{5}$

両辺を2乗して　$4x^2-12x+9=5$

ゆえに　$x^2-3x+1=$ ア 0

したがって　$x^2=3x-1$

よって　$(x-1)(2x^2-5x+2)=(x-1)\{2(3x-1)-5x+2\}$

$$=x(x-1)=x^2-x$$
$$=(3x-1)-x$$
$$=2x-1=\text{イ}\,2+\sqrt{5}$$

別解 $(x-1)(2x^2-5x+2)=(x-1)(x-2)(2x-1)=(x^2-3x+2)(2x-1)$

$$=\{(x^2-3x+1)+1\}(2x-1)=2x-1=\text{イ}\,2+\sqrt{5}$$

19 $x=\sqrt{12+2\sqrt{35}}$，$y=\sqrt{12-2\sqrt{35}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

解答 (1) $\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{5}$

解説

$$x=\sqrt{12+2\sqrt{35}}=\sqrt{(7+5)+2\sqrt{7\cdot5}}=\sqrt{7}+\sqrt{5}$$
$$y=\sqrt{12-2\sqrt{35}}=\sqrt{(7+5)-2\sqrt{7\cdot5}}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$$

(1) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}}$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{7-5}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}$$

(2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}=\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})+2\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$$
$$=\frac{2\sqrt{7}+2\sqrt{7-5}}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{5}$$

20 a，b，c が $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=4$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ を満たすとき，次の式の値を求めよ。

(1) $ab+bc+ca$　(2) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$

解答 (1) $-\dfrac{3}{2}$　(2) $\dfrac{7}{3}$

解説

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ であるから

$$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=1^2-4=-3$$

したがって　$ab+bc+ca=-\dfrac{3}{2}$

(2) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$ ……①

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ であるから　$\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=1$

よって　$ab+bc+ca=abc$　(1) の結果から　$abc=-\dfrac{3}{2}$

また，$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$ から

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$
$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot1=\frac{21}{4}$$

abc，$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ の値を①に代入して

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{21}{4}\div\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{21}{4}\cdot\frac{4}{9}=\frac{7}{3}$$

21 (1) 方程式 $x^2-2x-5=0$ の正の解について，整数部分を a，小数部分を b とするとき，a，b および $b^4+2b^3-9b^2+3b-4$ の値を求めよ。

(2) $a^2+\sqrt{2}b=\sqrt{5}$，$b^2+\sqrt{2}a=\sqrt{5}$，$a\neq b$ のとき，$a+b$，$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}$ の値を求めよ。

解答 (1) 順に 3，$-2+\sqrt{6}$，$8-5\sqrt{6}$　(2) 順に $\sqrt{2}$，$-7\sqrt{2}-2\sqrt{10}$

解説

(1) $x^2-2x-5=0$ を解くと　$x=1\pm\sqrt{6}$

よって，正の解は　$x=1+\sqrt{6}$

$2<\sqrt{6}<3$ より，$3<1+\sqrt{6}<4$ であるから　$a=3$

また　$b=1+\sqrt{6}-3=-2+\sqrt{6}$

次に，$b=-2+\sqrt{6}$ から　$b+2=\sqrt{6}$

両辺を2乗すると　$b^2+4b+4=6$

よって　$b^2=-4b+2$

$P=b^4+2b^3-9b^2+3b-4$ とすると　$P=b^2(b^2+2b-9)+3b-4$

$b^2=-4b+2$ を代入すると

$$P=(-4b+2)\{(-4b+2)+2b-9\}+3b-4=(4b-2)(2b+7)+3b-4$$
$$=8b^2+24b-14+3b-4=8b^2+27b-18$$
$$=8(-4b+2)+27b-18=-5b-2$$

$b=-2+\sqrt{6}$ を代入すると

$$P=-5(-2+\sqrt{6})-2=8-5\sqrt{6}$$

別解 $P=b^4+2b^3-9b^2+3b-4=b^2(b^2+4b-2)-2b^3-7b^2+3b-4$

$$=b^2\cdot0-2b(b^2+4b-2)+b^2-b-4$$
$$=-2b\cdot0+(b^2+4b-2)-5b-2=-5(-2+\sqrt{6})-2$$
$$=8-5\sqrt{6}$$

(2) $a^2+\sqrt{2}b=\sqrt{5}$ ……①，$b^2+\sqrt{2}a=\sqrt{5}$ ……②　とする。

①−② から　$a^2-b^2+\sqrt{2}(b-a)=0$

よって　$(a-b)(a+b-\sqrt{2})=0$

$a\neq b$ であるから　$a+b=\sqrt{2}$ ……③

①+②から　$a^2+b^2+\sqrt{2}(b+a)=2\sqrt{5}$

変形すると　$(a+b)^2-2ab+\sqrt{2}(a+b)-2\sqrt{5}=0$

③を代入して　$(\sqrt{2})^2-2ab+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-2\sqrt{5}=0$

ゆえに　$ab=2-\sqrt{5}$

したがって　$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=\frac{a^3}{ab}+\frac{b^3}{ab}=\frac{a^3+b^3}{ab}=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$

$$=\frac{(\sqrt{2})^3-3(2-\sqrt{5})\sqrt{2}}{2-\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}-3\sqrt{2}$$

$$=-4\sqrt{2}-2\sqrt{10}-3\sqrt{2}=-7\sqrt{2}-2\sqrt{10}$$

参考　$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}b}{b}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}a}{a}=\frac{\sqrt{5}}{a}+\frac{\sqrt{5}}{b}-2\sqrt{2}$

$$=\frac{\sqrt{5}(a+b)}{ab}-2\sqrt{2}$$

のように計算してもよい。

22　$x=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$，$y=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+y$　(2)　xy　(3)　x^2y+xy^2

(4)　x^2+y^2　(5)　x^3+y^3

解答　(1)　18　(2)　1　(3)　18　(4)　322　(5)　5778

解説

(1)　$x+y=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{(\sqrt{5}+2)^2+(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$

$$=(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})=18$$

(2)　$xy=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=1$

(3)　$x^2y+xy^2=xy(x+y)=1\cdot18=18$

(4)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=18^2-2\cdot1=322$

(5)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=18^3-3\cdot1\cdot18=5832-54=5778$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}$

$$=18(322-1)=5778$$

参考　$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ から　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ から　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

x^2+y^2 や x^2y+xy^2 は，x，y を入れ替えても，もとの式と同じになる。このような式を対称式という。x，y の対称式は，$x+y$，xy で表されることが知られている。

23　$x=\sqrt{2}-1$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+\frac{1}{x}$　(2)　$x^2+\frac{1}{x^2}$　(3)　$x^3+\frac{1}{x^3}$

(4)　$x^4+\frac{1}{x^4}$　(5)　$x^5+\frac{1}{x^5}$

解答　(1)　$2\sqrt{2}$　(2)　6　(3)　$10\sqrt{2}$　(4)　34　(5)　$58\sqrt{2}$

解説

(1)　$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$

よって　$x+\frac{1}{x}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$

(2)　$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(2\sqrt{2})^2-2=6$

(3)　$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=(2\sqrt{2})^3-3\cdot2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

別解　$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2\sqrt{2}(6-1)=10\sqrt{2}$

(4)　$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=6^2-2=34$

(5)　$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=10\sqrt{2}\cdot6-2\sqrt{2}=58\sqrt{2}$

参考　$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ から　$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ から　$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=x^4+2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$ から　$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$

$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^5+x^3\cdot\frac{1}{x^2}+x^2\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}$ から

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

24　$x=1-\sqrt{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　x^2-2x-4　(2)　x^3-2x^2

解答　(1)　0　(2)　$4-4\sqrt{5}$

解説

(1)　与式$=(1-\sqrt{5})^2-2(1-\sqrt{5})-4=(1-2\sqrt{5}+5)-2+2\sqrt{5}-4=0$

別解　$x=1-\sqrt{5}$ から　$x-1=-\sqrt{5}$

両辺を 2 乗すると　$x^2-2x+1=5$

よって　$x^2-2x-4=0$

(2)　(1) から　$x^2-2x=4$

よって　$x^3-2x^2=x(x^2-2x)=(1-\sqrt{5})\cdot4=4-4\sqrt{5}$

25　$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。次の式の値を求めよ。

(1)　a　(2)　b　(3)　$a+b+b^2$

解答　(1)　3　(2)　$\sqrt{2}-1$　(3)　$5-\sqrt{2}$

解説

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2}=2+\sqrt{2}$$

(1)　$1<\sqrt{2}<2$ であるから　$3<2+\sqrt{2}<4$

よって　$a=3$

(2)　$b=(2+\sqrt{2})-a=(2+\sqrt{2})-3=\sqrt{2}-1$

(3)　$a+b+b^2=a+b(1+b)=3+(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}=3+2-\sqrt{2}=5-\sqrt{2}$

別解　もとの数は $a+b$ であるから

$$a+b+b^2=(a+b)+b^2=(2+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)^2=5-\sqrt{2}$$

26　$\sqrt{12-\sqrt{108}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。

(1)　a，b，$b^3+\frac{1}{b^3}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$x=\frac{1}{b-a+\sqrt{2}}$，$y=\frac{1}{3a-b+\sqrt{2}}$ のとき，$\frac{1}{x+y}$ の値を求めよ。

解答　(1)　順に 1，$2-\sqrt{3}$，52　(2)　$2-\sqrt{2}$

解説

(1)　$\sqrt{12-\sqrt{108}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=\sqrt{(9+3)-2\sqrt{9\cdot3}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから　$-2<-\sqrt{3}<-1$

よって　$1<3-\sqrt{3}<2$　ゆえに　$a=1$

よって　$b=3-\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}$

$$b^3+\frac{1}{b^3}=\left(b+\frac{1}{b}\right)^3-3\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

ここで　$b+\frac{1}{b}=2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}+\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$$=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$$

よって　$b^3+\frac{1}{b^3}=4^3-3\cdot4=52$

別解　$b^3+\frac{1}{b^3}=\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(b^2-1+\frac{1}{b^2}\right)=\left(b+\frac{1}{b}\right)\left\{\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-3\right\}=4\cdot(4^2-3)=52$

(2)　(1) の結果から

$$x=\frac{1}{2-\sqrt{3}-1+\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$y=\frac{1}{3-(2-\sqrt{3})+\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

よって

$$x+y=\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$\frac{1}{x+y}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2-\sqrt{2}$

27　$x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$，$y=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+y$　(2)　xy　(3)　x^2+y^2

(4)　x^2y+xy^2　(5)　x^3+y^3

解答　(1)　$2\sqrt{3}$　(2)　2　(3)　8　(4)　$4\sqrt{3}$　(5)　$12\sqrt{3}$

解説

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$$

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$$

(1)　$x+y=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}$

(2)　$xy=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=2$

(3)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\cdot2=8$

(4)　$x^2y+xy^2=xy(x+y)=2\cdot2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

(5)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(2\sqrt{3})^3-3\cdot2\cdot2\sqrt{3}$

$$=24\sqrt{3}-12\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=2\sqrt{3}(8-2)=12\sqrt{3}$

28　$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+\frac{1}{x}$　(2)　$x^2+\frac{1}{x^2}$　(3)　$x^2-\frac{1}{x^2}$　(4)　$x^3+\frac{1}{x^3}$

解答　(1)　$\sqrt{5}$　(2)　3　(3)　$\sqrt{5}$　(4)　$2\sqrt{5}$

解説

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(1)　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}$

(2)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=(\sqrt{5})^2-2=3$

(3)　$x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{5}\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$=\sqrt{5}\cdot 1=\sqrt{5}$

(4)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

別解　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-1\right)$

$=\sqrt{5}(3-1)=2\sqrt{5}$

29　$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$，$y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+y$　(2)　x^2+y^2　(3)　$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$　(4)　x^3+y^3

解答　(1)　7　(2)　47　(3)　47　(4)　322

解説

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{14+6\sqrt{5}}{9-5}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$y=\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{(3-\sqrt{5})^2}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{14-6\sqrt{5}}{9-5}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

(1)　$x+y=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}+\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}=7$

(2)　$xy=\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=1$

よって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7^2-2\cdot 1=47$

(3)　$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{47}{1}=47$

(4)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=7^3-3\cdot 1\cdot 7=343-21=322$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=7(47-1)=322$

30　$6+\sqrt{5}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする。次の式の値を求めよ。

(1)　a　(2)　b　(3)　$a+2b+b^2$

解答　(1)　8　(2)　$\sqrt{5}-2$　(3)　$13-2\sqrt{5}$

解説

(1)　$2<\sqrt{5}<3$ であるから　$8<6+\sqrt{5}<9$

したがって　$a=8$

(2)　$a+b=6+\sqrt{5}$ であるから　$b=(6+\sqrt{5})-8=\sqrt{5}-2$

(3)　$a+2b+b^2=8+2(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)^2$

$=8+2\sqrt{5}-4+(9-4\sqrt{5})$

$=13-2\sqrt{5}$

別解　$a+2b+b^2=a+b(b+2)=8+(\sqrt{5}-2)\{(\sqrt{5}-2)+2\}$

$=8+(\sqrt{5}-2)\sqrt{5}=8+5-2\sqrt{5}$

$=13-2\sqrt{5}$

31　$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする。次の式の値を求めよ。

(1)　a　(2)　b　(3)　$a+2b+b^2+1$

解答　(1)　3　(2)　$\sqrt{3}-1$　(3)　6

解説

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

(1)　$1<\sqrt{3}<2$ であるから　$3<2+\sqrt{3}<4$

したがって　$a=3$

(2)　$a+b=2+\sqrt{3}$ であるから　$b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

(3)　$a+2b+b^2+1=a+(b+1)^2=3+\{(\sqrt{3}-1)+1\}^2$

$=3+(\sqrt{3})^2=6$

32　$x=1+\sqrt{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　x^2-2x　(2)　x^3-3x^2

解答　(1)　1　(2)　$-2-\sqrt{2}$

解説

(1)　$x^2-2x=(1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})$

$=(3+2\sqrt{2})-2-2\sqrt{2}=1$

別解　$x=1+\sqrt{2}$ から　$x-1=\sqrt{2}$

両辺を 2 乗して　$x^2-2x+1=2$

よって　$x^2-2x=1$

(2)　(1) から　$x^2-2x=1$　すなわち　$x^2=2x+1$

したがって

$x^3-3x^2=x^2(x-3)=(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$

$=2(2x+1)-5x-3=-x-1$

$=-(1+\sqrt{2})-1=-2-\sqrt{2}$

33　$2x+\dfrac{1}{2x}=\sqrt{7}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$4x^2+\dfrac{1}{4x^2}$　(2)　$8x^3+\dfrac{1}{8x^3}$　(3)　$64x^6+\dfrac{1}{64x^6}$

解答　(1)　5　(2)　$4\sqrt{7}$　(3)　110

解説

(1)　$4x^2+\dfrac{1}{4x^2}=\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^2-2=(\sqrt{7})^2-2=5$

(2)　$8x^3+\dfrac{1}{8x^3}=\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^3-3\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$

$=(\sqrt{7})^3-3\sqrt{7}=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

(3)　$64x^6+\dfrac{1}{64x^6}=(8x^3)^2+\dfrac{1}{(8x^3)^2}=\left(8x^3+\dfrac{1}{8x^3}\right)^2-2$

$=(4\sqrt{7})^2-2=112-2=110$

別解　$64x^6+\dfrac{1}{64x^6}=(4x^2)^3+\dfrac{1}{(4x^2)^3}$

$=\left(4x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)^3-3\left(4x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)$

$=5^3-3\times 5=110$

34　$x+y+z=xy+yz+zx=2\sqrt{2}+1$，$xyz=1$ を満たす実数 x，y，z に対して，次の式の値を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$　(2)　$x^2+y^2+z^2$　(3)　$x^3+y^3+z^3$

解答　(1)　$2\sqrt{2}+1$　(2)　7　(3)　$10\sqrt{2}+1$

解説

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{yz}{x\cdot yz}+\dfrac{zx}{y\cdot zx}+\dfrac{xy}{z\cdot xy}=\dfrac{yz+zx+xy}{xyz}=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{1}=2\sqrt{2}+1$

(2)　$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=(2\sqrt{2}+1)^2-2(2\sqrt{2}+1)$

$=9+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2=7$

(3)　$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$ が成り立つから，

(2) より　$x^3+y^3+z^3=(2\sqrt{2}+1)\{7-(2\sqrt{2}+1)\}+3$

$=2(2\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})+3=10\sqrt{2}+1$

35　$x+y+z=0$，$xy+yz+zx=-10$，$xyz=-4\sqrt{3}$ を満たす実数 x，y，z に対して，次の式の値を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$　(2)　$x^2+y^2+z^2$　(3)　$x^3+y^3+z^3$

解答　(1)　0　(2)　20　(3)　$-12\sqrt{3}$

解説

(1)　$\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{z}{xy\cdot z}+\dfrac{x}{yz\cdot x}+\dfrac{y}{zx\cdot y}=\dfrac{z+x+y}{xyz}=\dfrac{0}{-4\sqrt{3}}=0$

(2)　$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=0^2-2(-10)=20$

(3)　$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=3\cdot(-4\sqrt{3})=-12\sqrt{3}$

別解　$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz$

$=3\cdot(-4\sqrt{3})=-12\sqrt{3}$

36　$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　a^2-a-1　(2)　$a^4+a^3+a^2+a+1$

解答　(1)　0　(2)　$\dfrac{17+7\sqrt{5}}{2}$

解説

(1)　$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ から　$2a-1=\sqrt{5}$　両辺を 2 乗して　$(2a-1)^2=5$

よって　$4a^2-4a-4=0$　ゆえに　$a^2-a-1=0$

(2)　(1) から　$a^2=a+1$

よって　$a^3=a^2a=(a+1)a=a^2+a=(a+1)+a=2a+1$,

$a^4=a^3a=(2a+1)a=2a^2+a=2(a+1)+a=3a+2$

したがって　$a^4+a^3+a^2+a+1$

$=(3a+2)+(2a+1)+(a+1)+a+1$

$=7a+5=7\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+5=\dfrac{17+7\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{37}$ $a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $2a^2-2a-1$　　(2) a^8

解答　(1) 0　(2) $\dfrac{97-56\sqrt{3}}{16}$

解説

(1) $a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ から　$2a-1=-\sqrt{3}$

両辺を 2 乗して　$(2a-1)^2=3$　ゆえに　$4a^2-4a-2=0$

したがって　$2a^2-2a-1=0$

(2) (1) から　$a^2=a+\dfrac{1}{2}$

$a^8=(a^4)^2$ であるから，a^4 について

$a^4=(a^2)^2=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2=a^2+a+\dfrac{1}{4}=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)+a+\dfrac{1}{4}=2a+\dfrac{3}{4}$

よって　$a^8=(a^4)^2=\left(2a+\dfrac{3}{4}\right)^2=4a^2+3a+\dfrac{9}{16}$

$=4\left(a+\dfrac{1}{2}\right)+3a+\dfrac{9}{16}=7a+\dfrac{41}{16}$

$a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ を代入して，求める式の値は

$7\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{41}{16}=\dfrac{56(1-\sqrt{3})+41}{16}=\dfrac{97-56\sqrt{3}}{16}$

別解　$a^4=2a+\dfrac{3}{4}$ を求めるところまでは同じ。

$a^4=2a+\dfrac{3}{4}=2\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7-4\sqrt{3}}{4}$

よって　$a^8=(a^4)^2=\left(\dfrac{7-4\sqrt{3}}{4}\right)^2=\dfrac{(7-4\sqrt{3})^2}{4^2}=\dfrac{97-56\sqrt{3}}{16}$

$\boxed{38}$ $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　　(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

解答　(1) 3　(2) $2\sqrt{5}$　(3) 7

解説

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(\sqrt{5})^2-2=3$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2)^2+\dfrac{1}{(x^2)^2}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=3^2-2=7$

別解　(1) $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ の両辺を 2 乗して　$x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=5$

したがって　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$

(2) $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ の両辺を 3 乗して　$x^3+3x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}=5\sqrt{5}$

よって　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=5\sqrt{5}-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$\boxed{39}$ $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，$x+y$，xy，x^2+y^2，x^3+y^3，x^3-y^3 の値を求めよ。

解答　$x+y=8$，$xy=1$，$x^2+y^2=62$，$x^3+y^3=488$，$x^3-y^3=126\sqrt{15}$

解説

$x+y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(5+2\sqrt{15}+3)+(5-2\sqrt{15}+3)}{5-3}=8$

$xy=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=1$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot1=62$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=8^3-3\cdot1\cdot8=488$

また　$x-y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(5+2\sqrt{15}+3)-(5-2\sqrt{15}+3)}{5-3}=2\sqrt{15}$

よって　$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=2\sqrt{15}(62+1)=126\sqrt{15}$

別解　$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(2\sqrt{15})^3+3\cdot1\cdot2\sqrt{15}$

$=120\sqrt{15}+6\sqrt{15}=126\sqrt{15}$

$\boxed{40}$ $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，$x+y=$ ア $\boxed{}$，$xy=$ イ $\boxed{}$ であるから，

$x^2+y^2=$ ウ $\boxed{}$，$x^3+y^3=$ エ $\boxed{}$，$x^4+y^4=$ オ $\boxed{}$，$x^5+y^5=$ カ $\boxed{}$ となる。

解答　(ア) 10　(イ) 1　(ウ) 98　(エ) 970　(オ) 9602　(カ) 95050

解説

(ア) $x+y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(3-2\sqrt{6}+2)+(3+2\sqrt{6}+2)}{3-2}=10$

(イ) $xy=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1$

(ウ) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2\cdot1=98$

(エ) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=10^3-3\cdot1\cdot10=970$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=10\cdot(98-1)=970$

(オ) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$

(イ)，(ウ) の結果から　$x^4+y^4=98^2-2\cdot1^2=9602$

(カ) $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$

$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x+y)(xy)^2$

(ア)～(エ) の結果から　$x^5+y^5=98\cdot970-10\cdot1^2=95050$

別解　$x^5+y^5=(x+y)(x^4+y^4)-xy^4-x^4y$

$=(x+y)(x^4+y^4)-xy(x^3+y^3)$

(ア)，(イ)，(エ)，(オ) の結果から　$x^5+y^5=10\cdot9602-1\cdot970=95050$