

絶対値の方程式クイズ

[1] 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|2x-1|=3$

(2) $|2x-1|<3$

解答 (1) $x=2, -1$ (2) $-1 < x < 2$

解説

(1) $|2x-1|=3$ から $2x-1=\pm 3$
すなわち $2x=4$ または $2x=-2$
よって $x=2, -1$

(2) $|2x-1|<3$ から $-3 < 2x-1 < 3$
各辺に 1 を加えて $-2 < 2x < 4$
各辺を 2 で割って $-1 < x < 2$

[2] 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|3x-4|=2$

(2) $|x-2|\leq 3$

(3) $|2x+1|>1$

解答 (1) $x=2, \frac{2}{3}$ (2) $-1 \leq x \leq 5$ (3) $x < -1, 0 < x$

解説

(1) $|3x-4|=2$ から $3x-4=\pm 2$
すなわち $3x=6$ または $3x=2$
よって $x=2, \frac{2}{3}$

(2) $|x-2|\leq 3$ から $-3 \leq x-2 \leq 3$
よって $-1 \leq x \leq 5$

(3) $|2x+1|>1$ から $2x+1 < -1$ または $1 < 2x+1$
よって $x < -1, 0 < x$

[3] 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|x-4|=3x$

(2) $|x-4|\leq 3x$

解答 (1) $x=1$ (2) $x \geq 1$

解説

(1) [1] $x-4 \geq 0$ すなわち $x \geq 4$ のとき
 $|x-4|=x-4$ であるから、方程式は $x-4=3x$
これを解くと $x=-2$ これは、 $x \geq 4$ を満たさない。

[2] $x-4 < 0$ すなわち $x < 4$ のとき
 $|x-4|=-(x-4)$ であるから、方程式は $-x+4=3x$
これを解くと $x=1$ これは、 $x < 4$ を満たす。

[1], [2] から、求める解は $x=1$

(2) [1] $x \geq 4$ のとき

不等式は $x-4 \leq 3x$ よって $x \geq -2$

これと $x \geq 4$ との共通範囲は $x \geq 4$ ①

[2] $x < 4$ のとき

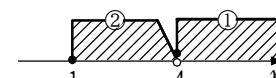
不等式は $-x+4 \leq 3x$ よって $x \geq 1$

これと $x < 4$ との共通範囲は

$1 \leq x < 4$ ②

求める解は、①と②を合わ

せた範囲で $x \geq 1$



[4] 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|x-3|=5x$

(2) $|x+2|>3x$

(3) $|x-2|<2x-1$

解答 (1) $x=\frac{1}{2}$ (2) $x < 1$ (3) $x > 1$

解説

[1] $x \geq 3$ のとき

方程式は $x-3=5x$ これを解くと $x=-\frac{3}{4}$
これは $x \geq 3$ を満たさない。

[2] $x < 3$ のとき

方程式は $-x+3=5x$ これを解くと $x=\frac{1}{2}$
これは $x < 3$ を満たす。

[1], [2] から、求める解は $x=\frac{1}{2}$

[2] $[1] x \geq -2$ のとき

不等式は $x+2 > 3x$ これを解くと $x < 1$
これと $x \geq -2$ との共通範囲は $-2 \leq x < 1$ ①

[2] $x < -2$ のとき

不等式は $-x-2 > 3x$ これを解くと $x < -\frac{1}{2}$
これと $x < -2$ との共通範囲は $x < -2$ ②

求める解は、①と②を合わせた範囲で
 $x < 1$

[3] $[1] x \geq 2$ のとき

不等式は $x-2 < 2x-1$ これを解くと $x > -1$
これと $x \geq 2$ との共通範囲は $x \geq 2$ ①

[2] $x < 2$ のとき

不等式は $-x+2 < 2x-1$ これを解くと $x > 1$
これと $x < 2$ との共通範囲は $1 < x < 2$ ②

求める解は、①と②を合わせた範囲で
 $x > 1$

[5] 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|3x-2|=10$

(2) $|2x+5|>1$

(3) $|5x-3|\leq 12$

解答 (1) $x=4, -\frac{8}{3}$ (2) $x < -3, -2 < x$ (3) $-\frac{9}{5} \leq x \leq 3$

解説

(1) $|3x-2|=10$ から $3x-2=\pm 10$

すなわち $3x=12$ または $3x=-8$

よって $x=4, -\frac{8}{3}$

(2) $|2x+5|>1$ から $2x+5 < -1$ または $1 < 2x+5$

整理すると $2x < -6$ または $-4 < 2x$

各辺を 2 で割って $x < -3, -2 < x$

(3) $|5x-3|\leq 12$ から $-12 \leq 5x-3 \leq 12$

各辺に 3 を加えて $-9 \leq 5x \leq 15$

各辺を 5 で割って $-\frac{9}{5} \leq x \leq 3$

[6] 方程式 $|x|+2|x-2|=x+2$ を解け。

解答 $x=1, 3$

解説

[1] $x < 0$ のとき

方程式は $-x-2(x-2)=x+2$

これを解くと $x=\frac{1}{2}$

これは、 $x < 0$ を満たさない。

[2] $0 \leq x < 2$ のとき

方程式は $x-2(x-2)=x+2$

これを解くと $x=1$

これは、 $0 \leq x < 2$ を満たす。

[3] $2 \leq x$ のとき

方程式は $x+2(x-2)=x+2$

これを解くと $x=3$

これは、 $2 \leq x$ を満たす。

[1]～[3] から、求める解は $x=1, 3$

[7] 次の方程式、不等式を解け。[各 6 点]

(1) $|x|=7$

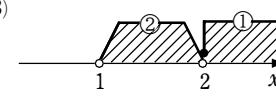
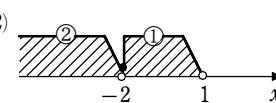
(2) $|x-2|=4$

(3) $|3x-2|=7$

(4) $|x+3| \geq 5$

(5) $|2x+5| < 3$

(6) $|3x-2|=7$



解答 (1) $x=5, -1$ (2) $x=1, -\frac{7}{3}$ (3) $2 < x < 6$ (4) $x < 2, 6 < x$

解説

(1) $x=\pm 7$

(2) $x-2=\pm 4$ から $x=6, -2$

(3) $3x-2=\pm 7$ から $3x=9, -5$ よって $x=3, -\frac{5}{3}$

(4) $x+3 \leq -5, 5 \leq x+3$ から $x \leq -8, 2 \leq x$

(5) $-3 < 2x+5 < 3$ から $-8 < 2x < -2$ よって $-4 < x < -1$

[8] 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|2-x|=3$ (2) $|3x+2|=5$ (3) $|x-4|<2$ (4) $|x-4|>2$

解答 (1) $x=5, -1$ (2) $x=1, -\frac{7}{3}$ (3) $2 < x < 6$ (4) $x < 2, 6 < x$

解説

(1) $|2-x|=|x-2|$ であるから、方程式は $|x-2|=3$

ゆえに $x-2=\pm 3$

よって $x=5, -1$

(2) $|3x+2|=5$ から $3x+2=\pm 5$

$3x+2=5$ から $3x=3$ よって $x=1$

$3x+2=-5$ から $3x=-7$ よって $x=-\frac{7}{3}$

したがって、解は $x=1, -\frac{7}{3}$

(3) $|x-4|<2$ から $-2 < x-4 < 2$

したがって $2 < x < 6$

$2 \leq x$ の共通範囲は $2 \leq x \leq 9$ ②

求める解は、①、②を合わせた範囲で $\frac{3}{5} \leq x \leq 9$

[12] 次の方程式、不等式を解け。

(1) $x^2 + |x-1| + |x-3| = 4$

(2) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2} = 4$

(3) $|3x-4| < |x+2|$

(4) $|2|x|-3| - x - 2 < 0$

〔解答〕 (1) $x=0, \sqrt{2}$ (2) $x=-1, 3$ (3) $\frac{1}{2} < x < 3$

(4) $-\frac{5}{3} < x < -1, \frac{1}{3} < x < 5$

〔解説〕

(1) [1] $x < 1$ のとき、方程式は $x^2 - (x-1) - (x-3) = 4$
整理すると $x^2 - 2x = 0$ これを解くと $x=0, 2$
このうち、 $x < 1$ を満たすものは $x=0$

[2] $1 \leq x < 3$ のとき、方程式は $x^2 + (x-1) - (x-3) = 4$

整理すると $x^2 - 2 = 0$ これを解くと $x = \pm\sqrt{2}$
このうち、 $1 \leq x < 3$ を満たすものは $x = \sqrt{2}$

[3] $3 \leq x$ のとき、方程式は $x^2 + (x-1) + (x-3) = 4$

整理すると $x^2 + 2x - 8 = 0$
これを解くと $x=2, -4$ これらは $3 \leq x$ を満たさない。

以上から、求める解は $x=0, \sqrt{2}$

(2) 方程式の左辺を変形すると $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2} = 4$

すなわち $|x-2| + |x| = 4$ [A]

[1] $x < 0$ のとき、[A]は $-(x-2) - x = 4$
よって $x=-1$ $x=-1$ は $x < 0$ を満たす。

[2] $0 \leq x < 2$ のとき、[A]は $-(x-2) + x = 4$
 $2=4$ となり、これを満たす x は存在しない。

[3] $x \geq 2$ のとき、[A]は $x-2+x=4$
よって $x=3$ $x=3$ は $x \geq 2$ を満たす。

以上から、求める解は $x=-1, 3$

(3) [1] $x < -2$ のとき、不等式は $-(3x-4) < -(x+2)$

ゆえに $-2x < -6$ よって $x > 3$

これと $x < -2$ との共通範囲はない。

[2] $-2 \leq x < \frac{4}{3}$ のとき、不等式は $-(3x-4) < x+2$

ゆえに $-4x < -2$ よって $x > \frac{1}{2}$

$-2 \leq x < \frac{4}{3}$ の共通範囲は $\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$ ①

[3] $\frac{4}{3} \leq x$ のとき、不等式は $3x-4 < x+2$

ゆえに $2x < 6$ よって $x < 3$

$\frac{4}{3} \leq x$ との共通範囲は $\frac{4}{3} \leq x < 3$ ②

以上から、求める解は、①、②を合わせた範囲で

$$\frac{1}{2} < x < 3$$

〔参考〕 不等式の両辺はともに 0 以上であるから、両辺を 2 乗した不等式

$(3x-4)^2 < (x+2)^2$ を解いてもよい。

(4) [1] $x \geq 0$ のとき、不等式は $|2x-3| - x - 2 < 0$ [A]

(i) $0 \leq x < \frac{3}{2}$ のとき、[A]は $-(2x-3) - x - 2 < 0$

ゆえに $-3x < -1$ よって $x > \frac{1}{3}$

$0 \leq x < \frac{3}{2}$ の共通範囲は $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ ①

(ii) $x \geq \frac{3}{2}$ のとき、[A]は $(2x-3) - x - 2 < 0$

ゆえに $x-5 < 0$ よって $x < 5$

$x \geq \frac{3}{2}$ との共通範囲は $\frac{3}{2} \leq x < 5$ ②

[2] $x < 0$ のとき、不等式は $|-2x-3| - x - 2 < 0$

すなわち $|2x+3| - x - 2 < 0$ [B]

(i) $x < -\frac{3}{2}$ のとき、[B]は $-(2x+3) - x - 2 < 0$

ゆえに $-3x < 5$ よって $x > -\frac{5}{3}$

$x < -\frac{3}{2}$ との共通範囲は $-\frac{5}{3} < x < -\frac{3}{2}$ ③

(ii) $-\frac{3}{2} \leq x < 0$ のとき、[B]は $(2x+3) - x - 2 < 0$

ゆえに $x+1 < 0$ よって $x < -1$

$-\frac{3}{2} \leq x < 0$ との共通範囲は $-\frac{3}{2} \leq x < -1$ ④

以上から、求める解は、①～④を合わせた範囲で

$$-\frac{5}{3} < x < -1, \frac{1}{3} < x < 5$$

〔参考〕 $|2|x|-3| - x - 2 < 0$ から $|2|x|-3| < x+2$

$x \geq 0$ のとき $|2|x|-3| = 2x-3$

$x < 0$ のとき $|2|x|-3| = -2x-3$

よって、 $y = |2|x|-3|$ のグラフは右の図のようになる。

求める解は、このグラフが直線 $y = x+2$ より下側にある x の値の範囲である。

$y = |2|x|-3|$ のグラフと直線 $y = x+2$ の交点の x 座標を求める

$x < -\frac{3}{2}$ のとき $-2x-3 = x+2$ から $x = -\frac{5}{3}$

$-\frac{3}{2} \leq x < 0$ のとき $2x+3 = x+2$ から $x = -1$

$0 \leq x < \frac{3}{2}$ のとき $-2x+3 = x+2$ から $x = \frac{1}{3}$

$\frac{3}{2} \leq x$ のとき $2x-3 = x+2$ から $x = 5$

したがって、求める解は $-\frac{5}{3} < x < -1, \frac{1}{3} < x < 5$

[13] 次の方程式を解け。

(1) $2(x+2)^2 - 7(x+2) + 3 = 0$

(2) $x^2 + 2|x-1| - 5 = 0$

(3) $x^2 + 4x = 3\sqrt{(x+2)^2}$

〔解答〕 (1) $x=1, -\frac{3}{2}$ (2) $x=-1, -1+2\sqrt{2}$ (3) $x=2, -6$

〔解説〕

(1) $x+2=t$ とおくと、方程式は $2t^2 - 7t + 3 = 0$

ゆえに $t = \frac{-5 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-5 \pm 5}{4}$

$t = 2$ であるから $x = t-2 = 0$

よって $x=1, -\frac{3}{2}$

(2) $x \geq 1$ のとき、方程式は $x^2 + 2(x-1) - 5 = 0$

ゆえに $x^2 + 2x - 7 = 0$ よって $x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-7)} = -1 \pm 2\sqrt{2}$

$x \geq 1$ を満たすものは $x = -1 + 2\sqrt{2}$

(3) $x < 1$ のとき、方程式は $x^2 - 2(x-1) - 5 = 0$

ゆえに $x^2 - 2x - 3 = 0$ よって $(x+1)(x-3) = 0$ ゆえに $x = -1, 3$

$x < 1$ を満たすものは $x = -1$

(4) $x \geq 0$ のとき、方程式は $x^2 + 2|x| - 5 = 0$

ゆえに $x^2 + 2x - 5 = 0$ よって $x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-5)} = -1 \pm \sqrt{6}$

$x \geq 0$ を満たすものは $x = -1 + \sqrt{6}$

ゆえに $(t-3)(2t-1) = 0$ よって $t=3, \frac{1}{2}$

ゆえに $x+2=3, \frac{1}{2}$ よって $x=1, -\frac{3}{2}$

(2) [1] $x \geq 1$ のとき、方程式は $x^2 + 2(x-1) - 5 = 0$

ゆえに $x^2 + 2x - 7 = 0$ よって $x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-7)} = -1 \pm 2\sqrt{2}$

$x \geq 1$ を満たすものは $x = -1 + 2\sqrt{2}$

[2] $x < 1$ のとき、方程式は $x^2 - 2(x-1) - 5 = 0$

ゆえに $x^2 - 2x - 3 = 0$ よって $(x+1)(x-3) = 0$ ゆえに $x = -1, 3$

$x < 1$ を満たすものは $x = -1$

[1], [2] から、解は $x = -1, -1 + 2\sqrt{2}$

(3) 方程式は $x^2 + 4x = 3|x+2|$ ①

[1] $x \geq -2$ のとき、①は $x^2 + 4x = 3(x+2)$

ゆえに $x^2 + x - 6 = 0$ よって $(x-2)(x+3) = 0$ ゆえに $x=2, -3$

$x \geq -2$ を満たすものは $x=2$

[2] $x < -2$ のとき、①は $x^2 + 4x = -3(x+2)$

ゆえに $x^2 + 7x + 6 = 0$ よって $(x+1)(x+6) = 0$ ゆえに $x = -1, -6$

$x < -2$ を満たすものは $x = -6$

[1], [2] から、解は $x = 2, -6$

[14] 次の方程式を解け。

(1) $2(x-2)^2 + 5(x-2) + 1 = 0$

(2) $6(x+1)^2 + 5(x+1) - 14 = 0$

(3) $(x+3)|x-4| + 2x + 6 = 0$

(4) $x^2 + 2\sqrt{x^2} - 1 = 0$

〔解答〕 (1) $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (2) $x = -3, \frac{1}{6}$ (3) $x = -3$

(4) $x = -1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

〔解説〕

(1) $x-2=t$ とおくと、方程式は $2t^2 + 5t + 1 = 0$

よって $t = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$

$x=t+2$ であるから $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4} + 2 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

(2) $x+1=t$ とおくと、方程式は $6t^2 + 5t - 14 = 0$

よって $(t+2)(6t-7) = 0$ ゆえに $t = -2, \frac{7}{6}$

これらを $x=t-1$ に代入して $x = -3, \frac{1}{6}$

(3) 方程式から $(x+3)|x-4| + 2(x+3) = 0$

よって $(x+3)(|x-4|+2) = 0$ ①

[1] $x \geq 4$ のとき、①は $(x+3)(x-4+2) = 0$

すなわち $(x+3)(x-2) = 0$

これを解くと $x = -3, 2$ これらはいずれも $x \geq 4$ を満たさない。

[2] $x < 4$ のとき、①は $(x+3)(-(x-4)+2) = 0$

すなわち $(x+3)(-x+6) = 0$

これを解くと $x = -3, 6$ $x < 4$ を満たすものは $x = -3$

[1], [2] から、解は $x = -3$

(4) 方程式は $x^2 + 2|x| - 1 = 0$ ①

[1] $x \geq 0$ のとき、①は $x^2 + 2x - 1 = 0$

ゆえに $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$x \geq 0$ を満たすものは $x = -1 + \sqrt{2}$

[2] $x < 0$ のとき、①は $x^2 - 2x - 1 = 0$

ゆえに $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

よって $x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-1)} = -1 \pm \sqrt{2}$

$x \geq 0$ を満たすものは $x = -1 + \sqrt{2}$

[2] $x < 0$ のとき, ①は $x^2 - 2x - 1 = 0$

よって $x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-1)} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x < 0$ を満たすものは $x = 1 - \sqrt{2}$

[1], [2] から, 解は $x = -1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

別解 ①から $|x|^2 + 2|x| - 1 = 0$

ゆえに $|x| = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-1)} = -1 \pm \sqrt{2}$

$|x| \geq 0$ であるから $|x| = -1 + \sqrt{2}$

よって $x = \pm(-1 + \sqrt{2})$ すなわち $x = -1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

[15] 次の方程式を解け。

(1) $|x - 1| = -2$

(2) $|x + 4| = 5x$

解答 (1) 解なし (2) $x = 1$

解説

(1) $|x - 1| = -2$ について, 左辺は 0 以上で右辺は負であるから x がどんな値であっても等号は成り立たない。よって解なし。

(2) [1] $x \geq -4$ のとき, 方程式は $x + 4 = 5x$

これを解いて $x = 1$ $x = 1$ は $x \geq -4$ を満たす。

[2] $x < -4$ のとき, 方程式は $-(x + 4) = 5x$

これを解いて $x = -\frac{2}{3}$ $x = -\frac{2}{3}$ は $x < -4$ を満たさない。

[1], [2] から, 求める解は $x = 1$

[16] 次の方程式を解け。

(1) $|x + 5| = -3$

(2) $2|x - 1| = 3x$

解答 (1) 解なし (2) $x = \frac{2}{5}$

解説

(1) $|x + 5| = -3$ について, 左辺は 0 以上で右辺は負であるから x がどんな値であっても等号は成り立たない。よって解なし。

(2) [1] $x \geq 1$ のとき, 方程式は $2(x - 1) = 3x$

すなわち $2x - 2 = 3x$

これを解いて $x = -2$ $x = -2$ は $x \geq 1$ を満たさない。

[2] $x < 1$ のとき, 方程式は $-2(x - 1) = 3x$

すなわち $-2x + 2 = 3x$

これを解いて $x = \frac{2}{5}$ $x = \frac{2}{5}$ は $x < 1$ を満たす。

[1], [2] から, 求める解は $x = \frac{2}{5}$

[17] 次の方程式を解け。

(1) $|x - 1| + |x - 2| = x$

(2) $\|x - 4\| - 3 = 2$

解答 (1) $x = 1, 3$ (2) $x = -1, 3, 5, 9$

解説

(1) [1] $x < 1$ のとき, 方程式は $-(x - 1) - (x - 2) = x$

すなわち $-2x + 3 = x$

これを解いて $x = 1$ $x = 1$ は $x < 1$ を満たさない。

[2] $1 \leq x < 2$ のとき, 方程式は $(x - 1) - (x - 2) = x$

これを解いて $x = 1$ $x = 1$ は $1 \leq x < 2$ を満たす。

[3] $2 \leq x$ のとき, 方程式は $(x - 1) + (x - 2) = x$

すなわち $2x - 3 = x$

これを解いて $x = 3$ $x = 3$ は $2 \leq x$ を満たす。

以上から, 求める解は $x = 1, 3$

(2) [1] $x \geq 4$ のとき, 方程式は $|(x - 4) - 3| = 2$

すなわち $|x - 7| = 2$ よって $x - 7 = \pm 2$

ゆえに $x = 9, 5$ これらは $x \geq 4$ を満たす。

[2] $x < 4$ のとき, 方程式は $|- (x - 4) - 3| = 2$

すなわち $|-x + 1| = 2$ よって $-x + 1 = \pm 2$

ゆえに $x = -1, 3$ これらは $x < 4$ を満たす。

以上から, 求める解は $x = -1, 3, 5, 9$

別解 $\|x - 4\| - 3 = 2$ から $|x - 4| - 3 = \pm 2$

よって $|x - 4| = 5, 1$

$|x - 4| = 5$ から $x - 4 = \pm 5$ これを解いて $x = 9, -1$

$|x - 4| = 1$ から $x - 4 = \pm 1$ これを解いて $x = 5, 3$

以上から, 求める解は $x = -1, 3, 5, 9$

[18] 次の方程式を解け。

(1) $2|x + 1| - |x - 3| = 2x$

(2) $\|x - 1\| - 2| - 3 = 0$

解答 (1) $x = -\frac{5}{3}, 1, 5$ (2) $x = 6, -4$

解説

(1) [1] $x < -1$ のとき, 方程式は $-2(x + 1) + (x - 3) = 2x$

すなわち $-x - 5 = 2x$ これを解いて $x = -\frac{5}{3}$

$x = -\frac{5}{3}$ は $x < -1$ を満たす。

[2] $-1 \leq x < 3$ のとき, 方程式は $2(x + 1) + (x - 3) = 2x$

すなわち $3x - 1 = 2x$

これを解いて $x = 1$ $x = 1$ は $-1 \leq x < 3$ を満たす。

[3] $3 \leq x$ のとき, 方程式は $2(x + 1) - (x - 3) = 2x$

すなわち $x + 5 = 2x$

これを解いて $x = 5$ $x = 5$ は $3 \leq x$ を満たす。

以上から, 求める解は $x = -\frac{5}{3}, 1, 5$

(2) [1] $x \geq 1$ のとき, 方程式は $\|(x - 1) - 2| - 3 = 0$

すなわち $|x - 3| = 3$ よって $x - 3 = \pm 3$

ゆえに $x = 6, 0$

これらのうち, $x \geq 1$ を満たすのは $x = 6$

[2] $x < 1$ のとき, 方程式は $\|-(x - 1) - 2| - 3 = 0$

すなわち $|x + 1| = 3$ よって $x + 1 = \pm 3$

ゆえに $x = 2, -4$

これらのうち, $x < 1$ を満たすのは $x = -4$

以上から, 求める解は $x = 6, -4$

別解 $\|x - 1\| - 2| = 3$ から $|x - 1| - 2 = \pm 3$

よって $|x - 1| = 5, -1$

$|x - 1| = 5$ から $x - 1 = \pm 5$ これを解いて $x = 6, -4$

$|x - 1| = -1$ を満たす x は存在しない。

以上から, 求める解は $x = 6, -4$

[19] 次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x - 3| + |2x - 3| = 9$

(2) $\|x - 2\| - 4| = 3x$

(3) $|2x - 3| \leq |3x + 2|$

(4) $2|x + 2| + |x - 4| < 15$

解答 (1) $x = -1, 5$ (2) $x = 1$ (3) $x \leq -5, \frac{1}{5} \leq x$ (4) $-5 < x < 5$

解説

(1) [1] $x < \frac{3}{2}$ のとき, 方程式は $-(x - 3) - (2x - 3) = 9$

これを解いて $x = -1$ $x = -1$ は $x < \frac{3}{2}$ を満たす。

[2] $\frac{3}{2} \leq x < 3$ のとき, 方程式は $-(x - 3) + (2x - 3) = 9$

これを解いて $x = 9$ $x = 9$ は $\frac{3}{2} \leq x < 3$ を満たさない。

[3] $3 \leq x$ のとき, 方程式は $(x - 3) + (2x - 3) = 9$

これを解いて $x = 5$ $x = 5$ は $3 \leq x$ を満たす。

以上から, 求める解は $x = -1, 5$

(2) [1] $x < 2$ のとき, 方程式は $|-(x - 2) - 4| = 3x$

よって $|-x - 2| = 3x$ ゆえに $|x + 2| = 3x$ ①

(i) $x < -2$ のとき, ①は $-(x + 2) = 3x$

よって $x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$ は $x < -2$ を満たさない。

(ii) $-2 \leq x < 2$ のとき, ①は $x + 2 = 3x$

ゆえに $x = 1$ $x = 1$ は $-2 \leq x < 2$ を満たす。

[2] $x \geq 2$ のとき, 方程式は $|x - 2 - 4| = 3x$

よって $|x - 6| = 3x$ ②

(i) $2 \leq x < 6$ のとき, ②は $-(x - 6) = 3x$

ゆえに $x = \frac{3}{2}$ $x = \frac{3}{2}$ は $2 \leq x < 6$ を満たさない。

(ii) $x \geq 6$ のとき, ②は $x - 6 = 3x$

よって $x = -3$ $x = -3$ は $x \geq 6$ を満たさない。

以上から, 求める解は $x = 1$

(3) [1] $x < -\frac{2}{3}$ のとき, 不等式は

$$-(2x - 3) \leq -(3x + 2)$$

ゆえに $-2x + 3 \leq -3x - 2$

よって $x \leq -5$

$x < -\frac{2}{3}$ との共通範囲は $x \leq -5$ ①

[2] $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$ のとき, 不等式は $-(2x - 3) \leq 3x + 2$

ゆえに $-2x + 3 \leq 3x + 2$

よって $x \geq \frac{1}{5}$

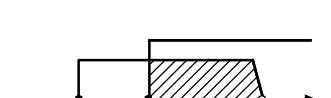
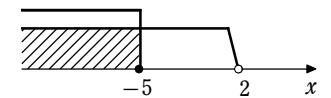
$-\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$ との共通範囲は

$$\frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{2} \quad \dots \dots \text{②}$$

[3] $\frac{3}{2} \leq x$ のとき, 不等式は $2x - 3 \leq 3x + 2$

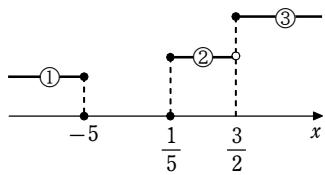
ゆえに $-x \leq 5$ よって $x \geq -5$

$\frac{3}{2} \leq x$ との共通範囲は $\frac{3}{2} \leq x$ ③



求める解は、①と②と③を合わせた範囲であるから

$$x \leq -5, \frac{1}{5} \leq x$$



(4) [1] $x < -2$ のとき、不等式は

$$-2(x+2)-(x-4) < 15$$

$$\text{ゆえに } -2x-4-x+4 < 15$$

$$\text{よって } x > -5$$

$$x < -2 \text{ との共通範囲は } -5 < x < -2 \quad \dots \dots \text{ ①}$$

[2] $-2 \leq x < 4$ のとき、不等式は

$$2(x+2)-(x-4) < 15$$

$$\text{ゆえに } 2x+4-x+4 < 15$$

$$\text{よって } x < 7$$

$$-2 \leq x < 4 \text{ との共通範囲は } -2 \leq x < 4 \quad \dots \dots \text{ ②}$$

[3] $4 \leq x$ のとき、不等式は

$$2(x+2)+(x-4) < 15$$

$$\text{ゆえに } 2x+4+x-4 < 15$$

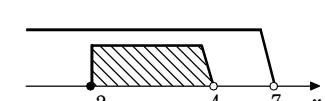
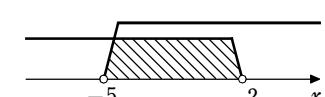
$$\text{よって } x < 5$$

$$4 \leq x \text{ との共通範囲は } 4 \leq x < 5 \quad \dots \dots \text{ ③}$$

求める解は、①と②と③を合わせた範囲

であるから

$$-5 < x < 5$$



[20] (1) 次の2次方程式を解け。

$$(ア) -0.5x^2 - \frac{3}{2}x + 10 = 0$$

$$(イ) \sqrt{2}x^2 - 5x + 2\sqrt{2} = 0$$

(2) 方程式 $3(x+1)^2 + 5(x+1) - 2 = 0$ を、おき換えを利用して解け。

(3) 方程式 $x^2 + x + |x-1| = 5$ を解け。

$$\text{解答} (1) (ア) x = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{2} \quad (イ) x = 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) x = -3, -\frac{2}{3}$$

$$(3) x = -2, -1 + \sqrt{7}$$

解説

(1) (ア) 両辺に -2 を掛けて $x^2 + 3x - 20 = 0$

$$\text{よって } x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{2}$$

(イ) 両辺に $\sqrt{2}$ を掛けて $2x^2 - 5\sqrt{2}x + 4 = 0$

$$\text{よって } x = \frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{(-5\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{したがって } x = 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $x+1 = X$ とおくと $3X^2 + 5X - 2 = 0$

$$\text{ゆえに } (X+2)(3X-1) = 0$$

$$\text{よって } X = -2, \frac{1}{3} \text{ すなわち } x+1 = -2, \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに } x = -3, -\frac{2}{3}$$

(3) [1] $x \geq 1$ のとき、方程式は $x^2 + x + x - 1 = 5$

$$\text{整理すると } x^2 + 2x - 6 = 0 \quad \text{よって } x = -1 \pm \sqrt{7}$$

$x \geq 1$ を満たすものは $x = -1 + \sqrt{7}$

[2] $x < 1$ のとき、方程式は $x^2 + x - (x-1) = 5$

整理すると $x^2 = 4$ よって $x = \pm 2$

$x < 1$ を満たすものは $x = -2$

[1], [2] から、求める解は $x = -2, -1 + \sqrt{7}$

[21] 次の方程式を解け。

$$(1) \frac{x^2}{15} - \frac{x}{3} = \frac{1}{5}(x+1)$$

$$(2) -\sqrt{3}x^2 - 2x + 5\sqrt{3} = 0$$

$$(3) 4(x-2)^2 + 10(x-2) + 5 = 0$$

$$(4) x^2 - 3x - |x-2| - 2 = 0$$

$$\text{解答} (1) x = 4 \pm \sqrt{19} \quad (2) x = \sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad (3) x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$(4) x = 4, 1 - \sqrt{5}$$

解説

(1) 両辺に 15 を掛けて $x^2 - 5x = 3(x+1)$

整理すると $x^2 - 8x - 3 = 0$

$$\text{よって } x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \cdot (-3)}}{1} = 4 \pm \sqrt{19}$$

(2) 両辺に $-\sqrt{3}$ を掛けて $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 15 = 0$

$$\text{よって } x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 3 \cdot (-15)}}{3} = \frac{-\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{したがって } x = \sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

[別解] 両辺に -1 を掛けて $\sqrt{3}x^2 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$

左辺を因数分解して $(x - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 5) = 0$

$$\text{よって } x = \sqrt{3}, -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\text{すなわち } x = \sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

(3) $x-2 = X$ とおくと $4X^2 + 10X + 5 = 0$

$$\text{ゆえに } X = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{よって } x = X + 2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{4} + 2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$$

(4) [1] $x \geq 2$ のとき、方程式は $x^2 - 3x - (x-2) - 2 = 0$

ゆえに $x^2 - 4x = 0$ よって $x(x-4) = 0$

ゆえに $x = 0, 4$ $x \geq 2$ を満たすものは $x = 4$

[2] $x < 2$ のとき、方程式は $x^2 - 3x + (x-2) - 2 = 0$

ゆえに $x^2 - 2x - 4 = 0$

$$\text{よって } x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-4)} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$x < 2$ を満たすものは $x = 1 - \sqrt{5}$

[1], [2] から、求める解は $x = 4, 1 - \sqrt{5}$

[22] 次の方程式を解け。

$$(1) x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$(2) 3(x+2)^2 + 12(x+2) + 10 = 0$$

$$(3) (2+\sqrt{3})x^2 + 2(\sqrt{3}+1)x + 2 = 0$$

$$(4) 2x^2 - 5|x| + 3 = 0$$

$$\text{解答} (1) x = -1, \frac{1}{3} \quad (2) x = -4 \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (3) x = 1 - \sqrt{3}$$

$$(4) x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

解説

(1) 方程式から

$$x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}x$$

両辺に 6 を掛けて $6x^2 + 3x = 2 - x$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(x+1)(3x-1) = 0$$

$$\text{したがって } x = -1, \frac{1}{3}$$

(2) $x+2 = X$ とおくと $3X^2 + 12X + 10 = 0$

$$\text{解の公式により } X = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 3 \cdot 10}}{3} = -2 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{よって } x = X - 2 = -2 \pm \frac{\sqrt{6}}{3} - 2 = -4 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(3) 両辺に $(2 - \sqrt{3})$ を掛けて

$$[2^2 - (\sqrt{3})^2]x^2 + 2(\sqrt{3} + 1)(2 - \sqrt{3})x + 2(2 - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{整理すると } x^2 - 2(1 - \sqrt{3})x + 2(2 - \sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{解の公式により } x &= 1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 - 2(2 - \sqrt{3})} \\ &= 1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(4 - 2\sqrt{3}) - 4 + 2\sqrt{3}} \\ &= 1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

(4) [1] $x \geq 0$ のとき、方程式は $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$\text{ゆえに } (x-1)(2x-3) = 0 \quad \text{よって } x = 1, \frac{3}{2}$$

これらはともに $x \geq 0$ を満たす。

[2] $x < 0$ のとき、方程式は $2x^2 + 5x + 3 = 0$

$$\text{ゆえに } (x+1)(2x+3) = 0 \quad \text{よって } x = -1, -\frac{3}{2}$$

これらはともに $x < 0$ を満たす。

以上から、求める解は $x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$

[別解] $x^2 = |x|^2$ であるから、方程式は $2|x|^2 - 5|x| + 3 = 0$

$$\text{ゆえに } (|x|-1)(2|x|-3) = 0$$

$$\text{よって } |x| = 1, \frac{3}{2} \text{ すなわち } x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

[23] 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) |x+1| = \frac{1}{2}x \quad (2) |x-3| \leq -2x \quad (3) |2x-1| < 3x+2$$

$$\text{解答} (1) \text{解なし} \quad (2) x \leq -3 \quad (3) x > -\frac{1}{5}$$

解説

(1) [1] $x+1 \geq 0$ すなわち $x \geq -1$ のとき

$$|x+1| = x+1 \text{ であるから、方程式は } x+1 = \frac{1}{2}x$$

$$\text{よって } x = -2$$

これは $x \geq -1$ を満たさない。

[2] $x+1 < 0$ すなわち $x < -1$ のとき

$$|x+1| = -(x+1) \text{ であるから、方程式は } -(x+1) = \frac{1}{2}x$$

$$\text{よって } x = -\frac{2}{3}$$

これは $x < -1$ を満たさない。

[1], [2] から、求める解はない

(2) [1] $x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ のとき

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \rightarrow 3 \\ -1 \rightarrow -1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -1 \rightarrow -2 \\ -3 \rightarrow -3 \\ \hline 2 \end{array}$$

$|x-3|=x-3$ であるから、不等式は $x-3 \leq -2x$

よって $3x \leq 3$ ゆえに $x \leq 1$

これと $x \geq 3$ との共通範囲はない。

[2] $x-3 < 0$ すなわち $x < 3$ のとき

$|x-3|=-(x-3)$ であるから、不等式は $-(x-3) \leq -2x$

よって $x \leq -3$

これと $x < 3$ との共通範囲は $x \leq -3$

[1], [2] から、求める解は $x \leq -3$

(3) [1] $2x-1 \geq 0$ すなわち $x \geq \frac{1}{2}$ のとき

$|2x-1|=2x-1$ であるから、不等式は $2x-1 < 3x+2$

よって $-x < 3$ ゆえに $x > -3$

これと $x \geq \frac{1}{2}$ との共通範囲は $x \geq \frac{1}{2}$ ①

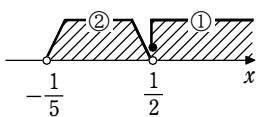
[2] $2x-1 < 0$ すなわち $x < \frac{1}{2}$ のとき

$|2x-1|=-(2x-1)$ であるから、不等式は $-(2x-1) < 3x+2$

よって $-5x < 1$ ゆえに $x > -\frac{1}{5}$

これと $x < \frac{1}{2}$ との共通範囲は

$$-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2} \quad \dots \dots \text{②}$$



求める解は、①と②を合わせた範囲で $x > -\frac{1}{5}$

[24] 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|2x| + |x-2| = 6$

(2) $|2x| + |x-2| < 6$

解答 (1) $x = -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$ (2) $-\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}$

解説

(1) [1] $x < 0$ のとき

$|2x| = -2x, |x-2| = -(x-2)$ であるから、方程式は $-2x-(x-2)=6$

よって $-3x=4$ ゆえに $x=-\frac{4}{3}$

これは $x < 0$ を満たす。

[2] $0 \leq x < 2$ のとき

$|2x|=2x, |x-2|=-(x-2)$ であるから、方程式は $2x-(x-2)=6$

よって $x=4$

これは $0 \leq x < 2$ を満たさない。

[3] $x \geq 2$ のとき

$|2x|=2x, |x-2|=x-2$ であるから、方程式は $2x+(x-2)=6$

よって $3x=8$ ゆえに $x=\frac{8}{3}$

これは $x \geq 2$ を満たす。

[1]～[3] から、求める解は $x=-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$

(2) [1] $x < 0$ のとき

(1) から、不等式は $-2x-(x-2) < 6$

よって $-3x < 4$ ゆえに $x > -\frac{4}{3}$

これと $x < 0$ との共通範囲は $-\frac{4}{3} < x < 0$ ①

[2] $0 \leq x < 2$ のとき

(1) から、不等式は $2x-(x-2) < 6$

よって $x < 4$

これと $0 \leq x < 2$ との共通範囲は $0 \leq x < 2$ ②

[3] $x \geq 2$ のとき

(1) から、不等式は $2x+(x-2) < 6$

よって $3x < 8$ ゆえに $x < \frac{8}{3}$

これと $x \geq 2$ との共通範囲は

$$2 \leq x < \frac{8}{3} \quad \dots \dots \text{③}$$

求める解は、①と②と③を合わせた範囲で

$$-\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}$$

[25] 方程式 $|x| + |x-1| = x+2$ を解け。

解答 $x = -\frac{1}{3}, 3$

解説

[1] $x < 0$ のとき

$|x| = -x, |x-1| = -(x-1)$ であるから、方程式は $-x-(x-1) = x+2$

すなわち $-2x+1 = x+2$

よって $x = -\frac{1}{3}$ これは $x < 0$ を満たす。

[2] $0 \leq x < 1$ のとき

$|x| = x, |x-1| = -(x-1)$ であるから、方程式は $x-(x-1) = x+2$

すなわち $1 = x+2$

よって $x = -1$ これは $0 \leq x < 1$ を満たさない。

[3] $x \geq 1$ のとき

$|x| = x, |x-1| = x-1$ であるから、方程式は $x+(x-1) = x+2$

すなわち $2x-1 = x+2$

よって $x = 3$ これは $x \geq 1$ を満たす。

[1]～[3] から、求める解は $x = -\frac{1}{3}, 3$

[26] (1) 方程式 $|x-3| + |2x-3| = 1$ を解け。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} 4-3x < 2x+1 \leq x+6 \\ 2\sqrt{(x-3)^2} \geq x-1 \end{cases}$ を解け。

解答 (1) 解なし (2) $\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{7}{3}, x=5$

解説

(1) [1] $x < 0$ のとき

方程式は $-(x-3)-(2x-3)=1$

よって $x = \frac{5}{3}$ これは $x < 0$ を満たさない。

[2] $\frac{3}{2} \leq x < 3$ のとき

方程式は $-(x-3)+(2x-3)=1$

よって $x = 1$ これは $\frac{3}{2} \leq x < 3$ を満たさない。

[3] $x \geq 3$ のとき

方程式は $(x-3)+(2x-3)=1$

よって $x = \frac{7}{3}$ これは $x \geq 3$ を満たさない。

以上から 解はない。

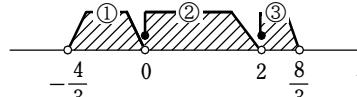
(2) [1] 不等式 $4-3x < 2x+1 \leq x+6$ を解く。

連立不等式 $\begin{cases} 4-3x < 2x+1 \dots \dots \text{①} \\ 2x+1 \leq x+6 \dots \dots \text{②} \end{cases}$ の解を求めればよい。

①から $-5x < -3$ よって $x > \frac{3}{5} \dots \dots \text{③}$

②から $x \leq 5 \dots \dots \text{④}$

③と④の共通範囲を求めて $\frac{3}{5} < x \leq 5 \dots \dots \text{⑤}$



[2] 不等式 $2\sqrt{(x-3)^2} \geq x-1$ を解く。

$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$ から、不等式は $2|x-3| \geq x-1$

(i) $x \geq 3$ のとき

不等式は $2(x-3) \geq x-1$

よって $x \geq 5$ これは $x \geq 3$ を満たす。

(ii) $x < 3$ のとき

不等式は $-2(x-3) \geq x-1$ よって $-3x \geq -7$

ゆえに $x \leq \frac{7}{3}$ これは $x < 3$ を満たす。

(i), (ii) から $x \leq \frac{7}{3}, 5 \leq x \dots \dots \text{⑥}$

以上から、⑤と⑥の共通範囲を求めて

$$\frac{3}{5} < x \leq \frac{7}{3}, x=5$$

