

絶対値の方程式クイズ

1 次の方程式，不等式を解け。

- (1)  $|2x-1|=3$  (2)  $|2x-1|<3$

解答 (1)  $x=2, -1$  (2)  $-1<x<2$

解説

- (1)  $|2x-1|=3$  から  $2x-1=\pm 3$   
すなわち  $2x=4$  または  $2x=-2$   
よって  $x=2, -1$   
(2)  $|2x-1|<3$  から  $-3<2x-1<3$   
各辺に 1 を加えて  $-2<2x<4$   
各辺を 2 で割って  $-1<x<2$

2 次の方程式，不等式を解け。

- (1)  $|3x-4|=2$  (2)  $|x-2|\leq 3$  (3)  $|2x+1|>1$

解答 (1)  $x=2, \frac{2}{3}$  (2)  $-1\leq x\leq 5$  (3)  $x<-1, 0<x$

解説

- (1)  $|3x-4|=2$  から  $3x-4=\pm 2$   
すなわち  $3x=6$  または  $3x=2$   
よって  $x=2, \frac{2}{3}$   
(2)  $|x-2|\leq 3$  から  $-3\leq x-2\leq 3$   
よって  $-1\leq x\leq 5$   
(3)  $|2x+1|>1$  から  $2x+1<-1$  または  $1<2x+1$   
よって  $x<-1, 0<x$

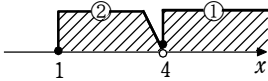
3 次の方程式，不等式を解け。

- (1)  $|x-4|=3x$  (2)  $|x-4|\leq 3x$

解答 (1)  $x=1$  (2)  $x\geq 1$

解説

- (1) [1]  $x-4\geq 0$  すなわち  $x\geq 4$  のとき  
 $|x-4|=x-4$  であるから，方程式は  $x-4=3x$   
これを解くと  $x=-2$  これは， $x\geq 4$  を満たさない。  
[2]  $x-4<0$  すなわち  $x<4$  のとき  
 $|x-4|=-(x-4)$  であるから，方程式は  $-x+4=3x$   
これを解くと  $x=1$  これは， $x<4$  を満たす。  
[1], [2] から，求める解は  $x=1$   
(2) [1]  $x\geq 4$  のとき  
不等式は  $x-4\leq 3x$  よって  $x\geq -2$   
これと  $x\geq 4$  との共通範囲は  $x\geq 4$  …… ①  
[2]  $x<4$  のとき  
不等式は  $-x+4\leq 3x$  よって  $x\geq 1$   
これと  $x<4$  との共通範囲は  
 $1\leq x<4$  …… ②  
求める解は，① と ② を合わせた範囲で  $x\geq 1$



4 次の方程式，不等式を解け。

- (1)  $|x-3|=5x$  (2)  $|x+2|>3x$  (3)  $|x-2|<2x-1$

解答 (1)  $x=\frac{1}{2}$  (2)  $x<1$  (3)  $x>1$

解説

- (1) [1]  $x\geq 3$  のとき  
方程式は  $x-3=5x$  これを解くと  $x=-\frac{3}{4}$   
これは  $x\geq 3$  を満たさない。  
[2]  $x<3$  のとき  
方程式は  $-x+3=5x$  これを解くと  $x=\frac{1}{2}$   
これは  $x<3$  を満たす。  
[1], [2] から，求める解は  $x=\frac{1}{2}$

- (2) [1]  $x\geq -2$  のとき  
不等式は  $x+2>3x$  これを解くと  $x<1$   
これと  $x\geq -2$  との共通範囲は  $-2\leq x<1$  …… ①

- [2]  $x<-2$  のとき  
不等式は  $-x-2>3x$  これを解くと  $x<-\frac{1}{2}$

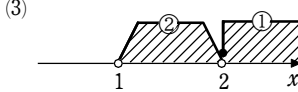
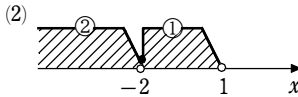
これと  $x<-2$  との共通範囲は  
 $x<-2$  …… ②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で  
 $x<1$

- (3) [1]  $x\geq 2$  のとき  
不等式は  $x-2<2x-1$  これを解くと  $x>-1$   
これと  $x\geq 2$  との共通範囲は  $x\geq 2$  …… ①

- [2]  $x<2$  のとき  
不等式は  $-x+2<2x-1$  これを解くと  $x>1$   
これと  $x<2$  との共通範囲は  
 $1<x<2$  …… ②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で  
 $x>1$



5 次の方程式，不等式を解け。

- (1)  $|3x-2|=10$  (2)  $|2x+5|>1$  (3)  $|5x-3|\leq 12$

解答 (1)  $x=4, -\frac{8}{3}$  (2)  $x<-3, -2<x$  (3)  $-\frac{9}{5}\leq x\leq 3$

解説

- (1)  $|3x-2|=10$  から  $3x-2=\pm 10$   
すなわち  $3x=12$  または  $3x=-8$   
よって  $x=4, -\frac{8}{3}$   
(2)  $|2x+5|>1$  から  $2x+5<-1$  または  $1<2x+5$   
整理すると  $2x<-6$  または  $-4<2x$   
各辺を 2 で割って  $x<-3, -2<x$   
(3)  $|5x-3|\leq 12$  から  $-12\leq 5x-3\leq 12$   
各辺に 3 を加えて  $-9\leq 5x\leq 15$   
各辺を 5 で割って  $-\frac{9}{5}\leq x\leq 3$

6 方程式  $|x|+2|x-2|=x+2$  を解け。

解答  $x=1, 3$

解説

- [1]  $x<0$  のとき  
方程式は  $-x-2(x-2)=x+2$   
これを解くと  $x=\frac{1}{2}$   
これは， $x<0$  を満たさない。  
[2]  $0\leq x<2$  のとき  
方程式は  $x-2(x-2)=x+2$   
これを解くと  $x=1$   
これは， $0\leq x<2$  を満たす。

- [3]  $2\leq x$  のとき  
方程式は  $x+2(x-2)=x+2$   
これを解くと  $x=3$   
これは， $2\leq x$  を満たす。

[1]～[3] から，求める解は  $x=1, 3$

7 次の方程式，不等式を解け。[各 6 点]

- (1)  $|x|=7$  (2)  $|x-2|=4$  (3)  $|3x-2|=7$   
(4)  $|x+3|\geq 5$  (5)  $|2x+5|<3$

解答 (1)  $x=\pm 7$   
(2)  $x-2=\pm 4$  から  $x=6, -2$   
(3)  $3x-2=\pm 7$  から  $3x=9, -5$  よって  $x=3, -\frac{5}{3}$   
(4)  $x+3\leq -5, 5\leq x+3$  から  $x\leq -8, 2\leq x$   
(5)  $-3<2x+5<3$  から  $-8<2x<-2$  よって  $-4<x<-1$

解説

- (1)  $x=\pm 7$   
(2)  $x-2=\pm 4$  から  $x=6, -2$   
(3)  $3x-2=\pm 7$  から  $3x=9, -5$  よって  $x=3, -\frac{5}{3}$   
(4)  $x+3\leq -5, 5\leq x+3$  から  $x\leq -8, 2\leq x$   
(5)  $-3<2x+5<3$  から  $-8<2x<-2$  よって  $-4<x<-1$

8 次の方程式，不等式を解け。

- (1)  $|2-x|=3$  (2)  $|3x+2|=5$  (3)  $|x-4|<2$  (4)  $|x-4|>2$

解答 (1)  $x=5, -1$  (2)  $x=1, -\frac{7}{3}$  (3)  $2<x<6$  (4)  $x<2, 6<x$

解説

- (1)  $|2-x|=|x-2|$  であるから，方程式は  $|x-2|=3$   
ゆえに  $x-2=\pm 3$   
よって  $x=5, -1$   
(2)  $|3x+2|=5$  から  $3x+2=\pm 5$   
 $3x+2=5$  から  $3x=3$  よって  $x=1$   
 $3x+2=-5$  から  $3x=-7$  よって  $x=-\frac{7}{3}$

したがって，解は  $x=1, -\frac{7}{3}$

- (3)  $|x-4|<2$  から  $-2<x-4<2$   
したがって  $2<x<6$

(4)  $|x-4|>2$  から  $x-4<-2, 2<x-4$   
したがって  $x<2, 6<x$

9 次の方程式，不等式を解け。

(1)  $|2x-5|=3$  (2)  $|x+1|\leq 4$  (3)  $|x-3|>6$

解答 (1)  $x=1, 4$  (2)  $-5\leq x\leq 3$  (3)  $x<-3, 9<x$

解説

(1)  $|2x-5|=3$  から  $2x-5=\pm 3$   
 $2x-5=3$  から  $2x=8$  よって  $x=4$   
 $2x-5=-3$  から  $2x=2$  よって  $x=1$   
したがって，解は  $x=1, 4$   
(2)  $|x+1|\leq 4$  から  $-4\leq x+1\leq 4$   
したがって  $-5\leq x\leq 3$   
(3)  $|x-3|>6$  から  $x-3<-6, 6<x-3$   
したがって  $x<-3, 9<x$

10 次の方程式，不等式を解け。

(1)  $|x-3|=2x$  (2)  $||x-1|-2|=3$  (3)  $|x-2|+|x-5|\leq 5$

解答 (1)  $x=1$  (2)  $x=6, -4$  (3)  $1\leq x\leq 6$

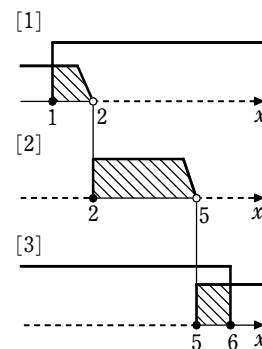
解説

(1) [1]  $x\geq 3$  のとき，方程式は  $x-3=2x$   
これを解くと  $x=-3$   
 $x=-3$  は  $x\geq 3$  を満たさない。  
[2]  $x<3$  のとき，方程式は  $-(x-3)=2x$   
これを解くと  $x=1$   
 $x=1$  は  $x<3$  を満たす。  
[1], [2] から，求める解は  $x=1$   
(2) [1]  $x\geq 1$  のとき，方程式は  $|(x-1)-2|=3$   
すなわち  $|x-3|=3$  よって  $x-3=\pm 3$   
ゆえに  $x=6, 0$   
これらのうち， $x\geq 1$  を満たすのは  $x=6$   
[2]  $x<1$  のとき，方程式は  $|-(x-1)-2|=3$   
すなわち  $|x+1|=3$  よって  $x+1=\pm 3$   
ゆえに  $x=2, -4$   
これらのうち， $x<1$  を満たすのは  $x=-4$   
[1], [2] から，求める解は  $x=6, -4$

別解  $||x-1|-2|=3$  から  $|x-1|-2=\pm 3$   
よって  $|x-1|=5, -1$   
 $|x-1|=5$  から  $x-1=\pm 5$  ゆえに  $x=6, -4$   
 $|x-1|=-1$  を満たす  $x$  は存在しない。  
以上から，求める解は  $x=6, -4$

(3) [1]  $x<2$  のとき，不等式は  $-(x-2)-(x-5)\leq 5$   
ゆえに  $-2x\leq -2$  よって  $x\geq 1$   
 $x<2$  との共通範囲は  $1\leq x<2$  …… ①

[2]  $2\leq x<5$  のとき，不等式は  $x-2-(x-5)\leq 5$   
ゆえに  $3\leq 5$  となり，これはすべての  $x$  で成り立つ。  
 $2\leq x<5$  との共通範囲は  $2\leq x<5$  …… ②  
[3]  $x\geq 5$  のとき，不等式は  $x-2+x-5\leq 5$   
ゆえに  $2x\leq 12$  よって  $x\leq 6$   
 $x\geq 5$  との共通範囲は  $5\leq x\leq 6$  …… ③  
求める解は，①～③を合わせた範囲で  $1\leq x\leq 6$



11 次の方程式，不等式を解け。

(1)  $|x-4|=3x$  (2)  $2|x-1|=x+2$  (3)  $2|x|+|2x+3|=7$   
(4)  $|x-3|-|2x+1|=x$  (5)  $||x-4|-3|=2$  (6)  $|3x-4|<2x$   
(7)  $3|x-1|\geq x+3$  (8)  $3|x-2|-2|x|\leq 3$

解答 (1)  $x=1$  (2)  $x=0, 4$  (3)  $x=-\frac{5}{2}, 1$  (4)  $x=\frac{1}{2}$   
(5)  $x=-1, 3, 5, 9$  (6)  $\frac{4}{5}<x<4$  (7)  $x\leq 0, 3\leq x$  (8)  $\frac{3}{5}\leq x\leq 9$

解説

(1) [1]  $x\geq 4$  のとき，方程式は  $x-4=3x$   
これを解くと  $x=-2$  これは  $x\geq 4$  を満たさない。  
[2]  $x<4$  のとき，方程式は  $-(x-4)=3x$   
これを解くと  $x=1$  これは  $x<4$  を満たす。  
[1], [2] から，求める解は  $x=1$   
(2) [1]  $x\geq 1$  のとき，方程式は  $2(x-1)=x+2$   
これを解くと  $x=4$  これは  $x\geq 1$  を満たす。  
[2]  $x<1$  のとき，方程式は  $-2(x-1)=x+2$   
これを解くと  $x=0$  これは  $x<1$  を満たす。  
[1], [2] から，求める解は  $x=0, 4$

(3) [1]  $x<-\frac{3}{2}$  のとき，方程式は  $-2x-(2x+3)=7$   
これを解くと  $x=-\frac{5}{2}$   $x=-\frac{5}{2}$  は  $x<-\frac{3}{2}$  を満たす。  
[2]  $-\frac{3}{2}\leq x<0$  のとき，方程式は  $-2x+2x+3=7$   
 $3=7$  となり，これを満たす  $x$  は存在しない。  
[3]  $x\geq 0$  のとき，方程式は  $2x+2x+3=7$   
これを解くと  $x=1$   $x=1$  は  $x\geq 0$  を満たす。  
以上から，求める解は  $x=-\frac{5}{2}, 1$

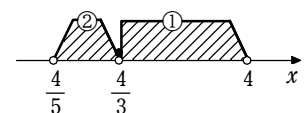
(4) [1]  $x<-\frac{1}{2}$  のとき，方程式は  $-(x-3)+(2x+1)=x$   
 $x+4=x$  となり，これを満たす  $x$  は存在しない。  
[2]  $-\frac{1}{2}\leq x<3$  のとき，方程式は  $-(x-3)-(2x+1)=x$   
これを解くと  $x=\frac{1}{2}$   $x=\frac{1}{2}$  は  $-\frac{1}{2}\leq x<3$  を満たす。  
[3]  $x\geq 3$  のとき，方程式は  $x-3-(2x+1)=x$   
これを解くと  $x=-2$   $x=-2$  は  $x\geq 3$  を満たさない。  
以上から，求める解は  $x=\frac{1}{2}$

(5) [1]  $x\geq 4$  のとき，方程式は  $|(x-4)-3|=2$   
すなわち  $|x-7|=2$  よって  $x-7=\pm 2$   
ゆえに  $x=9, 5$  これらは  $x\geq 4$  を満たす。  
[2]  $x<4$  のとき，方程式は  $|-(x-4)-3|=2$   
すなわち  $|-x+1|=2$  よって  $-x+1=\pm 2$   
ゆえに  $x=-1, 3$  これらは  $x<4$  を満たす。  
以上から，求める解は  $x=-1, 3, 5, 9$

別解  $||x-4|-3|=2$  から  $|x-4|-3=\pm 2$   
よって  $|x-4|=5, 1$   
 $|x-4|=5$  から  $x-4=\pm 5$  これを解いて  $x=9, -1$   
 $|x-4|=1$  から  $x-4=\pm 1$  これを解いて  $x=5, 3$   
以上から，求める解は  $x=-1, 3, 5, 9$

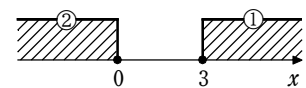
(6) [1]  $x\geq \frac{4}{3}$  のとき，不等式は  $3x-4<2x$   
よって  $x<4$   
 $x\geq \frac{4}{3}$  との共通範囲は  $\frac{4}{3}\leq x<4$  …… ①

[2]  $x<\frac{4}{3}$  のとき，不等式は  $-(3x-4)<2x$   
整理すると  $-5x<-4$  よって  $x>\frac{4}{5}$   
 $x<\frac{4}{3}$  との共通範囲は  $\frac{4}{5}<x<\frac{4}{3}$  …… ②  
求める解は，①，②を合わせた範囲で  $\frac{4}{5}<x<4$



別解  $|3x-4|<2x$  から  $-2x<3x-4<2x$   
すなわち  $\begin{cases} -2x<3x-4 & \text{…… ①} \\ 3x-4<2x & \text{…… ②} \end{cases}$   
① から  $x>\frac{4}{5}$  …… ①' ② から  $x<4$  …… ②'

①', ②' の共通範囲を求めて  $\frac{4}{5}<x<4$   
(7) [1]  $x\geq 1$  のとき，不等式は  $3(x-1)\geq x+3$   
整理すると  $2x\geq 6$  よって  $x\geq 3$   
 $x\geq 1$  との共通範囲は  $x\geq 3$  …… ①  
[2]  $x<1$  のとき，不等式は  $-3(x-1)\geq x+3$   
整理すると  $-4x\geq 0$  よって  $x\leq 0$   
 $x<1$  との共通範囲は  $x\leq 0$  …… ②  
求める解は，①，②を合わせた範囲で  $x\leq 0, 3\leq x$

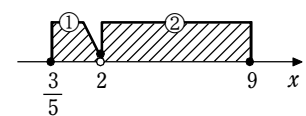


別解  $3|x-1|\geq x+3$  から  $3(x-1)\leq -(x+3)$  …… ① または  $x+3\leq 3(x-1)$  …… ②  
① から  $x\leq 0$  …… ①' ② から  $x\geq 3$  …… ②'  
求める解は，①', ②'を合わせた範囲で  $x\leq 0, 3\leq x$

(8) [1]  $x<0$  のとき，不等式は  $-3(x-2)+2x\leq 3$   
整理すると  $-x\leq -3$  よって  $x\geq 3$   
 $x<0$  との共通範囲はない。  
[2]  $0\leq x<2$  のとき，不等式は  $-3(x-2)-2x\leq 3$   
整理すると  $-5x\leq -3$  よって  $x\geq \frac{3}{5}$

$0\leq x<2$  との共通範囲は  $\frac{3}{5}\leq x<2$  …… ①

[3]  $2\leq x$  のとき，不等式は  $3(x-2)-2x\leq 3$   
よって  $x\leq 9$



$$2 \leq x \text{ との共通範囲は } 2 \leq x \leq 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{求める解は, ①, ② を合わせた範囲で } \frac{3}{5} \leq x \leq 9$$

**12** 次の方程式, 不等式を解け。

- (1)  $x^2 + |x-1| + |x-3| = 4$  (2)  $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2} = 4$   
 (3)  $|3x-4| < |x+2|$  (4)  $|2|x|-3| - x - 2 < 0$

**解答** (1)  $x=0, \sqrt{2}$  (2)  $x=-1, 3$  (3)  $\frac{1}{2} < x < 3$

(4)  $-\frac{5}{3} < x < -1, \frac{1}{3} < x < 5$

**解説**

- (1) [1]  $x < 1$  のとき, 方程式は  $x^2 - (x-1) - (x-3) = 4$   
 整理すると  $x^2 - 2x = 0$  これを解くと  $x = 0, 2$   
 このうち,  $x < 1$  を満たすものは  $x = 0$   
 [2]  $1 \leq x < 3$  のとき, 方程式は  $x^2 + (x-1) - (x-3) = 4$   
 整理すると  $x^2 - 2 = 0$  これを解くと  $x = \pm\sqrt{2}$   
 このうち,  $1 \leq x < 3$  を満たすものは  $x = \sqrt{2}$   
 [3]  $3 \leq x$  のとき, 方程式は  $x^2 + (x-1) + (x-3) = 4$   
 整理すると  $x^2 + 2x - 8 = 0$   
 これを解くと  $x = 2, -4$  これらは  $3 \leq x$  を満たさない。

以上から, 求める解は  $x = 0, \sqrt{2}$

- (2) 方程式の左辺を変形すると  $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2} = 4$   
 すなわち  $|x-2| + |x| = 4 \quad \cdots \cdots [\text{A}]$

- [1]  $x < 0$  のとき, [A] は  $-(x-2) - x = 4$   
 よって  $x = -1$   $x = -1$  は  $x < 0$  を満たす。  
 [2]  $0 \leq x < 2$  のとき, [A] は  $-(x-2) + x = 4$   
 $2 = 4$  となり, これを満たす  $x$  は存在しない。

- [3]  $x \geq 2$  のとき, [A] は  $x - 2 + x = 4$   
 よって  $x = 3$   $x = 3$  は  $x \geq 2$  を満たす。

以上から, 求める解は  $x = -1, 3$

- (3) [1]  $x < -2$  のとき, 不等式は  $-(3x-4) < -(x+2)$   
 ゆえに  $-2x < -6$  よって  $x > 3$   
 これと  $x < -2$  との共通範囲はない。

- [2]  $-2 \leq x < \frac{4}{3}$  のとき, 不等式は  $-(3x-4) < x+2$

$$\text{ゆえに } -4x < -2 \quad \text{よって } x > \frac{1}{2}$$

$$-2 \leq x < \frac{4}{3} \text{ との共通範囲は } \frac{1}{2} < x < \frac{4}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- [3]  $\frac{4}{3} \leq x$  のとき, 不等式は  $3x-4 < x+2$

$$\text{ゆえに } 2x < 6 \quad \text{よって } x < 3$$

$$\frac{4}{3} \leq x \text{ との共通範囲は } \frac{4}{3} \leq x < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

以上から, 求める解は, ①, ② を合わせた範囲で

$$\frac{1}{2} < x < 3$$

**参考** 不等式の両辺はともに 0 以上であるから, 両辺を 2 乗した不等式

$$(3x-4)^2 < (x+2)^2 \text{ を解いてもよい。}$$

- (4) [1]  $x \geq 0$  のとき, 不等式は  $|2x-3| - x - 2 < 0 \quad \cdots \cdots [\text{A}]$

- (i)  $0 \leq x < \frac{3}{2}$  のとき, [A] は  $-(2x-3) - x - 2 < 0$

$$\text{ゆえに } -3x < -1 \quad \text{よって } x > \frac{1}{3}$$

$$0 \leq x < \frac{3}{2} \text{ との共通範囲は } \frac{1}{3} < x < \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (ii)  $x \geq \frac{3}{2}$  のとき, [A] は  $(2x-3) - x - 2 < 0$

$$\text{ゆえに } x-5 < 0 \quad \text{よって } x < 5$$

$$x \geq \frac{3}{2} \text{ との共通範囲は } \frac{3}{2} \leq x < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- [2]  $x < 0$  のとき, 不等式は  $|-2x-3| - x - 2 < 0$

$$\text{すなわち } |2x+3| - x - 2 < 0 \quad \cdots \cdots [\text{B}]$$

- (i)  $x < -\frac{3}{2}$  のとき, [B] は  $-(2x+3) - x - 2 < 0$

$$\text{ゆえに } -3x < 5 \quad \text{よって } x > -\frac{5}{3}$$

$$x < -\frac{3}{2} \text{ との共通範囲は } -\frac{5}{3} < x < -\frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

- (ii)  $-\frac{3}{2} \leq x < 0$  のとき, [B] は  $(2x+3) - x - 2 < 0$

$$\text{ゆえに } x+1 < 0 \quad \text{よって } x < -1$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < 0 \text{ との共通範囲は } -\frac{3}{2} \leq x < -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

以上から, 求める解は, ① ~ ④ を合わせた範囲で

$$-\frac{5}{3} < x < -1, \frac{1}{3} < x < 5$$

**参考**  $|2|x|-3| - x - 2 < 0$  から  $|2|x|-3| < x+2$

$$x \geq 0 \text{ のとき } |2|x|-3| = |2x-3|$$

$$x < 0 \text{ のとき } |2|x|-3| = |-2x-3|$$

よって,  $y = |2|x|-3|$  のグラフは右の図のようになる。

求める解は, このグラフが直線  $y = x+2$  より下側にある  $x$  の値の範囲である。

$y = |2|x|-3|$  のグラフと直線  $y = x+2$  の交点の  $x$  座標を求めると

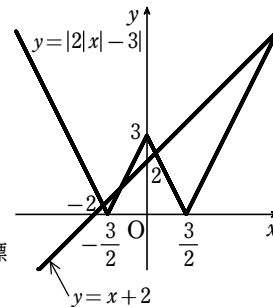
$$x < -\frac{3}{2} \text{ のとき } -2x-3 = x+2 \text{ から } x = -\frac{5}{3}$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < 0 \text{ のとき } 2x+3 = x+2 \text{ から } x = -1$$

$$0 \leq x < \frac{3}{2} \text{ のとき } -2x+3 = x+2 \text{ から } x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{2} \leq x \text{ のとき } 2x-3 = x+2 \text{ から } x = 5$$

$$\text{したがって, 求める解は } -\frac{5}{3} < x < -1, \frac{1}{3} < x < 5$$



**13** 次の方程式を解け。

- (1)  $2(x+2)^2 - 7(x+2) + 3 = 0$  (2)  $x^2 + 2|x-1| - 5 = 0$   
 (3)  $x^2 + 4x = 3\sqrt{(x+2)^2}$

**解答** (1)  $x=1, -\frac{3}{2}$  (2)  $x=-1, -1+2\sqrt{2}$  (3)  $x=2, -6$

**解説**

- (1)  $x+2 = t$  とおくと, 方程式は  $2t^2 - 7t + 3 = 0$

$$\text{ゆえに } (t-3)(2t-1) = 0 \quad \text{よって } t = 3, \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } x+2 = 3, \frac{1}{2} \quad \text{よって } x = 1, -\frac{3}{2}$$

- (2) [1]  $x \geq 1$  のとき, 方程式は  $x^2 + 2(x-1) - 5 = 0$   
 ゆえに  $x^2 + 2x - 7 = 0$  よって  $x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-7)} = -1 \pm 2\sqrt{2}$   
 $x \geq 1$  を満たすものは  $x = -1 + 2\sqrt{2}$

- [2]  $x < 1$  のとき, 方程式は  $x^2 - 2(x-1) - 5 = 0$

$$\text{ゆえに } x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\text{よって } (x+1)(x-3) = 0 \quad \text{ゆえに } x = -1, 3$$

$$x < 1 \text{ を満たすものは } x = -1$$

- [1], [2] から, 解は  $x = -1, -1 + 2\sqrt{2}$

- (3) 方程式は  $x^2 + 4x = 3|x+2| \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

- [1]  $x \geq -2$  のとき, ① は  $x^2 + 4x = 3(x+2)$

$$\text{ゆえに } x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{よって } (x-2)(x+3) = 0 \quad \text{ゆえに } x = 2, -3$$

$$x \geq -2 \text{ を満たすものは } x = 2$$

- [2]  $x < -2$  のとき, ① は  $x^2 + 4x = -3(x+2)$

$$\text{ゆえに } x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$\text{よって } (x+1)(x+6) = 0 \quad \text{ゆえに } x = -1, -6$$

$$x < -2 \text{ を満たすものは } x = -6$$

- [1], [2] から, 解は  $x = 2, -6$

**14** 次の方程式を解け。

- (1)  $2(x-2)^2 + 5(x-2) + 1 = 0$  (2)  $6(x+1)^2 + 5(x+1) - 14 = 0$   
 (3)  $(x+3)|x-4| + 2x + 6 = 0$  (4)  $x^2 + 2\sqrt{x^2} - 1 = 0$

**解答** (1)  $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$  (2)  $x = -3, \frac{1}{6}$  (3)  $x = -3$   
 (4)  $x = -1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

**解説**

- (1)  $x-2 = t$  とおくと, 方程式は  $2t^2 + 5t + 1 = 0$

$$\text{よって } t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x = t + 2 \text{ であるから } x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4} + 2 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

- (2)  $x+1 = t$  とおくと, 方程式は  $6t^2 + 5t - 14 = 0$

$$\text{よって } (t+2)(6t-7) = 0 \quad \text{ゆえに } t = -2, \frac{7}{6}$$

$$\text{これらを } x = t - 1 \text{ に代入して } x = -3, \frac{1}{6}$$

- (3) 方程式から  $(x+3)|x-4| + 2(x+3) = 0$

$$\text{よって } (x+3)(|x-4| + 2) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- [1]  $x \geq 4$  のとき, ① は  $(x+3)(x-4+2) = 0$

$$\text{すなわち } (x+3)(x-2) = 0$$

$$\text{これを解くと } x = -3, 2 \quad \text{これらはいずれも } x \geq 4 \text{ を満たさない。}$$

- [2]  $x < 4$  のとき, ① は  $(x+3)\{-(x-4)+2\} = 0$

$$\text{すなわち } (x+3)(-x+6) = 0$$

$$\text{これを解くと } x = -3, 6 \quad x < 4 \text{ を満たすものは } x = -3$$

- [1], [2] から, 解は  $x = -3$

- (4) 方程式は  $x^2 + 2|x| - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

- [1]  $x \geq 0$  のとき, ① は  $x^2 + 2x - 1 = 0$

$$\text{よって } x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-1)} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x \geq 0 \text{ を満たすものは } x = -1 + \sqrt{2}$$

$$[2] \ x < 0 \text{ のとき, ①は } x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\text{よって } x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-1)} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x < 0 \text{ を満たすものは } x = 1 - \sqrt{2}$$

$$[1], [2] \text{ から, 解は } x = -1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$$

$$\text{〔別解〕 ① から } |x|^2 + 2|x| - 1 = 0$$

$$\text{ゆえに } |x| = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-1)} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$|x| \geq 0 \text{ であるから } |x| = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{よって } x = \pm(-1 + \sqrt{2}) \text{ すなわち } x = -1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$$

〔15〕次の方程式を解け。

$$(1) \ |x-1| = -2 \qquad (2) \ |x+4| = 5x$$

〔解答〕 (1) 解なし (2)  $x=1$

〔解説〕

(1)  $|x-1| = -2$  について, 左辺は 0 以上で右辺は負であるから  $x$  がどんな値であっても等号は成り立たない。よって解なし。

$$(2) \ [1] \ x \geq -4 \text{ のとき, 方程式は } x+4=5x$$

$$\text{これを解いて } x=1 \quad x=1 \text{ は } x \geq -4 \text{ を満たす。}$$

$$[2] \ x < -4 \text{ のとき, 方程式は } -(x+4)=5x$$

$$\text{これを解いて } x = -\frac{2}{3} \quad x = -\frac{2}{3} \text{ は } x < -4 \text{ を満たさない。}$$

$$[1], [2] \text{ から, 求める解は } x=1$$

〔16〕次の方程式を解け。

$$(1) \ |x+5| = -3 \qquad (2) \ 2|x-1| = 3x$$

〔解答〕 (1) 解なし (2)  $x = \frac{2}{5}$

〔解説〕

(1)  $|x+5| = -3$  について, 左辺は 0 以上で右辺は負であるから  $x$  がどんな値であっても等号は成り立たない。よって解なし。

$$(2) \ [1] \ x \geq 1 \text{ のとき, 方程式は } 2(x-1)=3x$$

$$\text{すなわち } 2x-2=3x$$

$$\text{これを解いて } x=-2 \quad x=-2 \text{ は } x \geq 1 \text{ を満たさない。}$$

$$[2] \ x < 1 \text{ のとき, 方程式は } -2(x-1)=3x$$

$$\text{すなわち } -2x+2=3x$$

$$\text{これを解いて } x = \frac{2}{5} \quad x = \frac{2}{5} \text{ は } x < 1 \text{ を満たす。}$$

$$[1], [2] \text{ から, 求める解は } x = \frac{2}{5}$$

〔17〕次の方程式を解け。

$$(1) \ |x-1| + |x-2| = x \qquad (2) \ ||x-4|-3|=2$$

〔解答〕 (1)  $x=1, 3$  (2)  $x=-1, 3, 5, 9$

〔解説〕

$$(1) \ [1] \ x < 1 \text{ のとき, 方程式は } -(x-1)-(x-2)=x$$

$$\text{すなわち } -2x+3=x$$

$$\text{これを解いて } x=1 \quad x=1 \text{ は } x < 1 \text{ を満たさない。}$$

$$[2] \ 1 \leq x < 2 \text{ のとき, 方程式は } (x-1)-(x-2)=x$$

$$\text{これを解いて } x=1 \quad x=1 \text{ は } 1 \leq x < 2 \text{ を満たす。}$$

$$[3] \ 2 \leq x \text{ のとき, 方程式は } (x-1)+(x-2)=x$$

$$\text{すなわち } 2x-3=x$$

$$\text{これを解いて } x=3 \quad x=3 \text{ は } 2 \leq x \text{ を満たす。}$$

$$\text{以上から, 求める解は } x=1, 3$$

$$(2) \ [1] \ x \geq 4 \text{ のとき, 方程式は } |(x-4)-3|=2$$

$$\text{すなわち } |x-7|=2 \quad \text{よって } x-7=\pm 2$$

$$\text{ゆえに } x=9, 5 \quad \text{これらは } x \geq 4 \text{ を満たす。}$$

$$[2] \ x < 4 \text{ のとき, 方程式は } |-(x-4)-3|=2$$

$$\text{すなわち } |-x+1|=2 \quad \text{よって } -x+1=\pm 2$$

$$\text{ゆえに } x=-1, 3 \quad \text{これらは } x < 4 \text{ を満たす。}$$

$$\text{以上から, 求める解は } x=-1, 3, 5, 9$$

$$\text{〔別解〕 } ||x-4|-3|=2 \text{ から } |x-4|-3=\pm 2$$

$$\text{よって } |x-4|=5, 1$$

$$|x-4|=5 \text{ から } x-4=\pm 5 \quad \text{これを解いて } x=9, -1$$

$$|x-4|=1 \text{ から } x-4=\pm 1 \quad \text{これを解いて } x=5, 3$$

$$\text{以上から, 求める解は } x=-1, 3, 5, 9$$

〔18〕次の方程式を解け。

$$(1) \ 2|x+1|-|x-3|=2x \qquad (2) \ ||x-1|-2|-3=0$$

〔解答〕 (1)  $x = -\frac{5}{3}, 1, 5$  (2)  $x=6, -4$

〔解説〕

$$(1) \ [1] \ x < -1 \text{ のとき, 方程式は } -2(x+1)+(x-3)=2x$$

$$\text{すなわち } -x-5=2x \quad \text{これを解いて } x = -\frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{5}{3} \text{ は } x < -1 \text{ を満たす。}$$

$$[2] \ -1 \leq x < 3 \text{ のとき, 方程式は } 2(x+1)+(x-3)=2x$$

$$\text{すなわち } 3x-1=2x$$

$$\text{これを解いて } x=1 \quad x=1 \text{ は } -1 \leq x < 3 \text{ を満たす。}$$

$$[3] \ 3 \leq x \text{ のとき, 方程式は } 2(x+1)-(x-3)=2x$$

$$\text{すなわち } x+5=2x$$

$$\text{これを解いて } x=5 \quad x=5 \text{ は } 3 \leq x \text{ を満たす。}$$

$$\text{以上から, 求める解は } x = -\frac{5}{3}, 1, 5$$

$$(2) \ [1] \ x \geq 1 \text{ のとき, 方程式は } |(x-1)-2|-3=0$$

$$\text{すなわち } |x-3|=3 \quad \text{よって } x-3=\pm 3$$

$$\text{ゆえに } x=6, 0 \quad \text{これらのうち, } x \geq 1 \text{ を満たすのは } x=6$$

$$[2] \ x < 1 \text{ のとき, 方程式は } |-(x-1)-2|-3=0$$

$$\text{すなわち } |x+1|=3 \quad \text{よって } x+1=\pm 3$$

$$\text{ゆえに } x=2, -4 \quad \text{これらのうち, } x < 1 \text{ を満たすのは } x=-4$$

$$\text{以上から, 求める解は } x=6, -4$$

$$\text{〔別解〕 } ||x-1|-2|=3 \text{ から } |x-1|-2=\pm 3$$

$$\text{よって } |x-1|=5, -1$$

$$|x-1|=5 \text{ から } x-1=\pm 5 \quad \text{これを解いて } x=6, -4$$

$$|x-1|=-1 \text{ を満たす } x \text{ は存在しない。}$$

$$\text{以上から, 求める解は } x=6, -4$$

〔19〕次の方程式・不等式を解け。

$$(1) \ |x-3| + |2x-3| = 9 \qquad (2) \ ||x-2|-4|=3x$$

$$(3) \ |2x-3| \leq |3x+2| \qquad (4) \ 2|x+2| + |x-4| < 15$$

〔解答〕 (1)  $x=-1, 5$  (2)  $x=1$  (3)  $x \leq -5, \frac{1}{5} \leq x$  (4)  $-5 < x < 5$

〔解説〕

$$(1) \ [1] \ x < \frac{3}{2} \text{ のとき, 方程式は } -(x-3)-(2x-3)=9$$

$$\text{これを解いて } x=-1 \quad x=-1 \text{ は } x < \frac{3}{2} \text{ を満たす。}$$

$$[2] \ \frac{3}{2} \leq x < 3 \text{ のとき, 方程式は } -(x-3)+(2x-3)=9$$

$$\text{これを解いて } x=9 \quad x=9 \text{ は } \frac{3}{2} \leq x < 3 \text{ を満たさない。}$$

$$[3] \ 3 \leq x \text{ のとき, 方程式は } (x-3)+(2x-3)=9$$

$$\text{これを解いて } x=5 \quad x=5 \text{ は } 3 \leq x \text{ を満たす。}$$

$$\text{以上から, 求める解は } x=-1, 5$$

$$(2) \ [1] \ x < 2 \text{ のとき, 方程式は } |-(x-2)-4|=3x$$

$$\text{よって } |-x-2|=3x \quad \text{ゆえに } |x+2|=3x \quad \cdots \cdots \text{ ①}$$

$$(i) \ x < -2 \text{ のとき, ①は } -(x+2)=3x$$

$$\text{よって } x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ は } x < -2 \text{ を満たさない。}$$

$$(ii) \ -2 \leq x < 2 \text{ のとき, ①は } x+2=3x$$

$$\text{ゆえに } x=1 \quad x=1 \text{ は } -2 \leq x < 2 \text{ を満たす。}$$

$$[2] \ x \geq 2 \text{ のとき, 方程式は } |x-2-4|=3x$$

$$\text{よって } |x-6|=3x \quad \cdots \cdots \text{ ②}$$

$$(i) \ 2 \leq x < 6 \text{ のとき, ②は } -(x-6)=3x$$

$$\text{ゆえに } x = \frac{3}{2} \quad x = \frac{3}{2} \text{ は } 2 \leq x < 6 \text{ を満たさない。}$$

$$(ii) \ x \geq 6 \text{ のとき, ②は } x-6=3x$$

$$\text{よって } x=-3 \quad x=-3 \text{ は } x \geq 6 \text{ を満たさない。}$$

$$\text{以上から, 求める解は } x=1$$

$$(3) \ [1] \ x < -\frac{2}{3} \text{ のとき, 不等式は}$$

$$-(2x-3) \leq -(3x+2)$$

$$\text{ゆえに } -2x+3 \leq -3x-2$$

$$\text{よって } x \leq -5$$

$$x < -\frac{2}{3} \text{ との共通範囲は } x \leq -5 \quad \cdots \cdots \text{ ①}$$

$$[2] \ -\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2} \text{ のとき, 不等式は } -(2x-3) \leq 3x+2$$

$$\text{ゆえに } -2x+3 \leq 3x+2$$

$$\text{よって } x \geq \frac{1}{5}$$

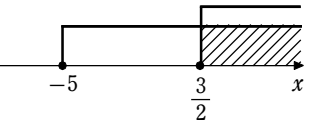
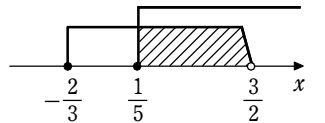
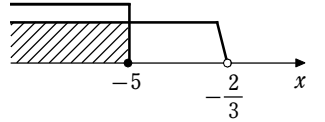
$$-\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2} \text{ との共通範囲は}$$

$$\frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \text{ ②}$$

$$[3] \ \frac{3}{2} \leq x \text{ のとき, 不等式は } 2x-3 \leq 3x+2$$

$$\text{ゆえに } -x \leq 5 \quad \text{よって } x \geq -5$$

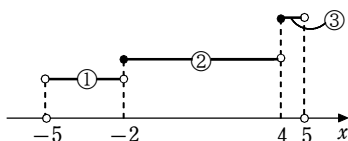
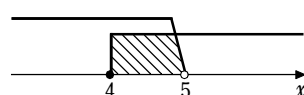
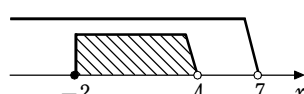
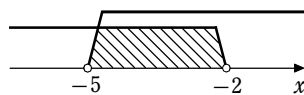
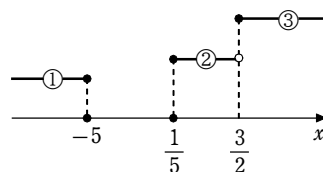
$$\frac{3}{2} \leq x \text{ との共通範囲は } \frac{3}{2} \leq x \quad \cdots \cdots \text{ ③}$$





求める解は、①と②と③を合わせた範囲であるから

$$x \leq -5, \frac{1}{5} \leq x$$



(4) [1]  $x < -2$  のとき、不等式は

$$-2(x+2) - (x-4) < 15$$

$$\text{ゆえに } -2x - 4 - x + 4 < 15$$

$$\text{よって } x > -5$$

$$x < -2 \text{ との共通範囲は } -5 < x < -2 \quad \dots\dots ①$$

[2]  $-2 \leq x < 4$  のとき、不等式は

$$2(x+2) - (x-4) < 15$$

$$\text{ゆえに } 2x + 4 - x + 4 < 15$$

$$\text{よって } x < 7$$

$$-2 \leq x < 4 \text{ との共通範囲は } -2 \leq x < 4 \quad \dots\dots ②$$

[3]  $4 \leq x$  のとき、不等式は

$$2(x+2) + (x-4) < 15$$

$$\text{ゆえに } 2x + 4 + x - 4 < 15$$

$$\text{よって } x < 5$$

$$4 \leq x \text{ との共通範囲は } 4 \leq x < 5 \quad \dots\dots ③$$

求める解は、①と②と③を合わせた範囲であるから

$$-5 < x < 5$$

[20] (1) 次の2次方程式を解け。

$$(ア) -0.5x^2 - \frac{3}{2}x + 10 = 0$$

$$(イ) \sqrt{2}x^2 - 5x + 2\sqrt{2} = 0$$

(2) 方程式  $3(x+1)^2 + 5(x+1) - 2 = 0$  を、おき換えを利用して解け。

(3) 方程式  $x^2 + x + |x-1| = 5$  を解け。

**解答** (1) (ア)  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{2}$  (イ)  $x = 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$  (2)  $x = -3, -\frac{2}{3}$   
(3)  $x = -2, -1 + \sqrt{7}$

**解説**

(1) (ア) 両辺に  $-2$  を掛けて  $x^2 + 3x - 20 = 0$

$$\text{よって } x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{2}$$

(イ) 両辺に  $\sqrt{2}$  を掛けて  $2x^2 - 5\sqrt{2}x + 4 = 0$

$$\text{よって } x = \frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{(-5\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{したがって } x = 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2)  $x+1 = X$  とおくと  $3X^2 + 5X - 2 = 0$

$$\text{ゆえに } (X+2)(3X-1) = 0$$

$$\text{よって } X = -2, \frac{1}{3} \quad \text{すなわち } x+1 = -2, \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに } x = -3, -\frac{2}{3}$$

(3) [1]  $x \geq 1$  のとき、方程式は  $x^2 + x + x - 1 = 5$

$$\text{整理すると } x^2 + 2x - 6 = 0 \quad \text{よって } x = -1 \pm \sqrt{7}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & 2 \rightarrow 6 \\ 3 & \times & -1 \rightarrow -1 \\ \hline 3 & & -2 \quad 5 \end{array}$$

$$x \geq 1 \text{ を満たすものは } x = -1 + \sqrt{7}$$

[2]  $x < 1$  のとき、方程式は  $x^2 + x - (x-1) = 5$

$$\text{整理すると } x^2 = 4 \quad \text{よって } x = \pm 2$$

$$x < 1 \text{ を満たすものは } x = -2$$

$$[1], [2] \text{ から、求める解は } x = -2, -1 + \sqrt{7}$$

[21] 次の方程式を解け。

$$(1) \frac{x^2}{15} - \frac{x}{3} = \frac{1}{5}(x+1)$$

$$(2) -\sqrt{3}x^2 - 2x + 5\sqrt{3} = 0$$

$$(3) 4(x-2)^2 + 10(x-2) + 5 = 0$$

$$(4) x^2 - 3x - |x-2| - 2 = 0$$

**解答** (1)  $x = 4 \pm \sqrt{19}$  (2)  $x = \sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}$  (3)  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$   
(4)  $x = 4, 1 - \sqrt{5}$

**解説**

(1) 両辺に  $15$  を掛けて  $x^2 - 5x = 3(x+1)$

$$\text{整理すると } x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$\text{よって } x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \cdot (-3)}}{1} = 4 \pm \sqrt{19}$$

(2) 両辺に  $-\sqrt{3}$  を掛けて  $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 15 = 0$

$$\text{よって } x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 3 \cdot (-15)}}{3} = \frac{-\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{したがって } x = \sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

**別解** 両辺に  $-1$  を掛けて  $\sqrt{3}x^2 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$

$$\text{左辺を因数分解して } (x - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 5) = 0$$

$$\text{よって } x = \sqrt{3}, -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\text{すなわち } x = \sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

(3)  $x-2 = X$  とおくと  $4X^2 + 10X + 5 = 0$

$$\text{ゆえに } X = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{よって } x = X + 2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{4} + 2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$$

(4) [1]  $x \geq 2$  のとき、方程式は  $x^2 - 3x - (x-2) - 2 = 0$

$$\text{ゆえに } x^2 - 4x = 0 \quad \text{よって } x(x-4) = 0$$

$$\text{ゆえに } x = 0, 4 \quad x \geq 2 \text{ を満たすものは } x = 4$$

[2]  $x < 2$  のとき、方程式は  $x^2 - 3x + (x-2) - 2 = 0$

$$\text{ゆえに } x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\text{よって } x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-4)} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x < 2 \text{ を満たすものは } x = 1 - \sqrt{5}$$

$$[1], [2] \text{ から、求める解は } x = 4, 1 - \sqrt{5}$$

[22] 次の方程式を解け。

$$(1) x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$(2) 3(x+2)^2 + 12(x+2) + 10 = 0$$

$$(3) (2 + \sqrt{3})x^2 + 2(\sqrt{3} + 1)x + 2 = 0$$

$$(4) 2x^2 - 5|x| + 3 = 0$$

**解答** (1)  $x = -1, \frac{1}{3}$  (2)  $x = -4 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$  (3)  $x = 1 - \sqrt{3}$   
(4)  $x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$

**解説**

$$(1) \text{ 方程式から } x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}x$$

$$\text{両辺に } 6 \text{ を掛けて } 6x^2 + 3x = 2 - x$$

$$\text{ゆえに } 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{よって } (x+1)(3x-1) = 0$$

$$\text{したがって } x = -1, \frac{1}{3}$$

(2)  $x+2 = X$  とおくと  $3X^2 + 12X + 10 = 0$

$$\text{解の公式により } X = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 3 \cdot 10}}{3} = -2 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{よって } x = X - 2 = -2 \pm \frac{\sqrt{6}}{3} - 2 = -4 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(3) 両辺に  $(2 - \sqrt{3})$  を掛けて

$$\{2^2 - (\sqrt{3})^2\}x^2 + 2(\sqrt{3} + 1)(2 - \sqrt{3})x + 2(2 - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{整理すると } x^2 - 2(1 - \sqrt{3})x + 2(2 - \sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{解の公式により } x &= 1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 - 2(2 - \sqrt{3})} \\ &= 1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(4 - 2\sqrt{3}) - 4 + 2\sqrt{3}} \\ &= 1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

(4) [1]  $x \geq 0$  のとき、方程式は  $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$\text{ゆえに } (x-1)(2x-3) = 0 \quad \text{よって } x = 1, \frac{3}{2}$$

これらはともに  $x \geq 0$  を満たす。

[2]  $x < 0$  のとき、方程式は  $2x^2 + 5x + 3 = 0$

$$\text{ゆえに } (x+1)(2x+3) = 0 \quad \text{よって } x = -1, -\frac{3}{2}$$

これらはともに  $x < 0$  を満たす。

$$\text{以上から、求める解は } x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

**別解**  $x^2 = |x|^2$  であるから、方程式は  $2|x|^2 - 5|x| + 3 = 0$

$$\text{ゆえに } (|x|-1)(2|x|-3) = 0$$

$$\text{よって } |x| = 1, \frac{3}{2} \quad \text{すなわち } x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & -1 \rightarrow -2 \\ 2 & \times & -3 \rightarrow -3 \\ \hline 2 & & 3 \quad -5 \end{array}$$

[23] 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) |x+1| = \frac{1}{2}x$$

$$(2) |x-3| \leq -2x$$

$$(3) |2x-1| < 3x+2$$

**解答** (1) 解なし (2)  $x \leq -3$  (3)  $x > -\frac{1}{5}$

**解説**

(1) [1]  $x+1 \geq 0$  すなわち  $x \geq -1$  のとき

$$|x+1| = x+1 \text{ であるから、方程式は } x+1 = \frac{1}{2}x$$

$$\text{よって } x = -2$$

これは  $x \geq -1$  を満たさない。

[2]  $x+1 < 0$  すなわち  $x < -1$  のとき

$$|x+1| = -(x+1) \text{ であるから、方程式は } -(x+1) = \frac{1}{2}x$$

$$\text{よって } x = -\frac{2}{3}$$

これは  $x < -1$  を満たさない。

[1], [2] から、求める解はない

(2) [1]  $x-3 \geq 0$  すなわち  $x \geq 3$  のとき

$$|x-3|=x-3 \text{ であるから, 不等式は } x-3 \leq -2x$$

$$\text{よって } 3x \leq 3 \quad \text{ゆえに } x \leq 1$$

これと  $x \geq 3$  との共通範囲はない。

[2]  $x-3 < 0$  すなわち  $x < 3$  のとき

$$|x-3|=-(x-3) \text{ であるから, 不等式は } -(x-3) \leq -2x$$

$$\text{よって } x \leq -3$$

これと  $x < 3$  との共通範囲は  $x \leq -3$

[1], [2] から, 求める解は  $x \leq -3$

(3) [1]  $2x-1 \geq 0$  すなわち  $x \geq \frac{1}{2}$  のとき

$$|2x-1|=2x-1 \text{ であるから, 不等式は } 2x-1 < 3x+2$$

$$\text{よって } -x < 3 \quad \text{ゆえに } x > -3$$

これと  $x \geq \frac{1}{2}$  との共通範囲は  $x \geq \frac{1}{2}$  ……①

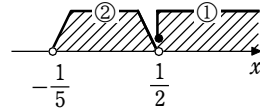
[2]  $2x-1 < 0$  すなわち  $x < \frac{1}{2}$  のとき

$$|2x-1|=-(2x-1) \text{ であるから, 不等式は } -(2x-1) < 3x+2$$

$$\text{よって } -5x < 1 \quad \text{ゆえに } x > -\frac{1}{5}$$

これと  $x < \frac{1}{2}$  との共通範囲は

$$-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2} \quad \text{……②}$$



求める解は, ①と②を合わせた範囲で  $x > -\frac{1}{5}$

[24] 次の方程式, 不等式を解け。

(1)  $|2x|+|x-2|=6$

(2)  $|2x|+|x-2|<6$

**解答** (1)  $x = -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$  (2)  $-\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}$

**解説**

(1) [1]  $x < 0$  のとき

$$|2x|=-2x, |x-2|=-(x-2) \text{ であるから, 方程式は } -2x-(x-2)=6$$

$$\text{よって } -3x=4 \quad \text{ゆえに } x=-\frac{4}{3}$$

これは  $x < 0$  を満たす。

[2]  $0 \leq x < 2$  のとき

$$|2x|=2x, |x-2|=-(x-2) \text{ であるから, 方程式は } 2x-(x-2)=6$$

$$\text{よって } x=4$$

これは  $0 \leq x < 2$  を満たさない。

[3]  $x \geq 2$  のとき

$$|2x|=2x, |x-2|=x-2 \text{ であるから, 方程式は } 2x+(x-2)=6$$

$$\text{よって } 3x=8 \quad \text{ゆえに } x=\frac{8}{3}$$

これは  $x \geq 2$  を満たす。

[1]～[3] から, 求める解は  $x = -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$

(2) [1]  $x < 0$  のとき

(1) から, 不等式は  $-2x-(x-2) < 6$

$$\text{よって } -3x < 4 \quad \text{ゆえに } x > -\frac{4}{3}$$

これと  $x < 0$  との共通範囲は  $-\frac{4}{3} < x < 0$  ……①

[2]  $0 \leq x < 2$  のとき

(1) から, 不等式は  $2x-(x-2) < 6$

$$\text{よって } x < 4$$

これと  $0 \leq x < 2$  との共通範囲は  $0 \leq x < 2$  ……②

[3]  $x \geq 2$  のとき

(1) から, 不等式は  $2x+(x-2) < 6$

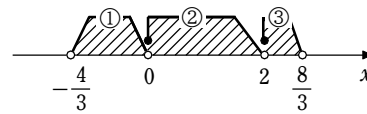
$$\text{よって } 3x < 8 \quad \text{ゆえに } x < \frac{8}{3}$$

これと  $x \geq 2$  との共通範囲は

$$2 \leq x < \frac{8}{3} \quad \text{……③}$$

求める解は, ①と②と③を合わせた範囲で

$$-\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}$$



[25] 方程式  $|x|+|x-1|=x+2$  を解け。

**解答**  $x = -\frac{1}{3}, 3$

**解説**

[1]  $x < 0$  のとき

$$|x|=-x, |x-1|=-(x-1) \text{ であるから, 方程式は } -x-(x-1)=x+2$$

$$\text{すなわち } -2x+1=x+2$$

$$\text{よって } x=-\frac{1}{3} \quad \text{これは } x < 0 \text{ を満たす。}$$

[2]  $0 \leq x < 1$  のとき

$$|x|=x, |x-1|=-(x-1) \text{ であるから, 方程式は } x-(x-1)=x+2$$

$$\text{すなわち } 1=x+2$$

$$\text{よって } x=-1 \quad \text{これは } 0 \leq x < 1 \text{ を満たさない。}$$

[3]  $x \geq 1$  のとき

$$|x|=x, |x-1|=x-1 \text{ であるから, 方程式は } x+(x-1)=x+2$$

$$\text{すなわち } 2x-1=x+2$$

$$\text{よって } x=3 \quad \text{これは } x \geq 1 \text{ を満たす。}$$

[1]～[3] から, 求める解は  $x = -\frac{1}{3}, 3$

[26] (1) 方程式  $|x-3|+|2x-3|=1$  を解け。

(2) 連立不等式  $\begin{cases} 4-3x < 2x+1 \leq x+6 \\ 2\sqrt{(x-3)^2} \geq x-1 \end{cases}$  を解け。

**解答** (1) 解なし (2)  $\frac{3}{5} < x \leq \frac{7}{3}, x=5$

**解説**

(1) [1]  $x < \frac{3}{2}$  のとき

$$\text{方程式は } -(x-3)-(2x-3)=1$$

$$\text{よって } x=\frac{5}{3} \quad \text{これは } x < \frac{3}{2} \text{ を満たさない。}$$

[2]  $\frac{3}{2} \leq x < 3$  のとき

$$\text{方程式は } -(x-3)+(2x-3)=1$$

$$\text{よって } x=1 \quad \text{これは } \frac{3}{2} \leq x < 3 \text{ を満たさない。}$$

[3]  $x \geq 3$  のとき

$$\text{方程式は } (x-3)+(2x-3)=1$$

$$\text{よって } x=\frac{7}{3} \quad \text{これは } x \geq 3 \text{ を満たさない。}$$

以上から 解はない。

(2) [1] 不等式  $4-3x < 2x+1 \leq x+6$  を解く。

$$\text{連立不等式 } \begin{cases} 4-3x < 2x+1 & \text{……①} \\ 2x+1 \leq x+6 & \text{……②} \end{cases} \text{ の解を求めればよい。}$$

$$\text{① から } -5x < -3 \quad \text{よって } x > \frac{3}{5} \quad \text{……③}$$

$$\text{② から } x \leq 5 \quad \text{……④}$$

$$\text{③ と ④ の共通範囲を求めて } \frac{3}{5} < x \leq 5 \quad \text{……⑤}$$

[2] 不等式  $2\sqrt{(x-3)^2} \geq x-1$  を解く。

$$\sqrt{(x-3)^2}=|x-3| \text{ から, 不等式は } 2|x-3| \geq x-1$$

(i)  $x \geq 3$  のとき

$$\text{不等式は } 2(x-3) \geq x-1$$

$$\text{よって } x \geq 5 \quad \text{これは } x \geq 3 \text{ を満たす。}$$

(ii)  $x < 3$  のとき

$$\text{不等式は } -2(x-3) \geq x-1 \quad \text{よって } -3x \geq -7$$

$$\text{ゆえに } x \leq \frac{7}{3} \quad \text{これは } x < 3 \text{ を満たす。}$$

(i), (ii) から  $x \leq \frac{7}{3}, 5 \leq x$  ……⑥

以上から, ⑤と⑥の共通範囲を求めて

$$\frac{3}{5} < x \leq \frac{7}{3}, x=5$$

