1 x は実数とする。次の $\boxed{\quad}$ の中は，「必要条件であるが十分条件ではない」，「十分条件であるが必要条件ではない」，「必要十分条件である」，「必要条件でも十分条件でもない」のうち，それぞれどれが適するか。

(1)　$x=2$ は $x^2=2x$ であるための $\boxed{\quad}$。

(2)　$x>0$ は $x\neq 1$ であるための $\boxed{\quad}$。

(3)　2 つの三角形の面積が等しいことは，2 つの三角形が合同であるための $\boxed{\quad}$。

(4)　$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$ であることは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が $\angle\mathrm{B}=90^\circ$ の直角三角形であるための $\boxed{\quad}$。

解答　(1)　十分条件であるが必要条件ではない　(2)　必要条件でも十分条件でもない
(3)　必要条件であるが十分条件ではない　(4)　必要十分条件である

(1)　十分条件であるが必要条件ではない
(2)　必要条件でも十分条件でもない
(3)　必要条件であるが十分条件ではない
(4)　必要十分条件である

2 x，y は実数とする。次の $\boxed{\quad}$ の中は，「必要条件であるが十分条件ではない」，「十分条件であるが必要条件ではない」，「必要十分条件である」のうち，それぞれどれが適するか。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が二等辺三角形であることは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形であるための $\boxed{\quad}$。

(2)　$x=y$ は，$x^2+y^2=2xy$ であるための $\boxed{\quad}$。

(3)　$x+y>2$ は，「$x>1$ または $y>1$」であるための $\boxed{\quad}$。

解答　(1)　必要条件であるが十分条件ではない
(2)　必要十分条件である
(3)　十分条件であるが必要条件ではない

(1)　「$\triangle\mathrm{ABC}$ が二等辺三角形 $\Longrightarrow$ $\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形」は偽。
(反例：頂角 90°)
「$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形 $\Longrightarrow$ $\triangle\mathrm{ABC}$ は二等辺三角形」は真。
よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ が二等辺三角形であることは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形であるための必要条件であるが十分条件ではない。

(2)　$x^2+y^2=2xy \iff x^2-2xy+y^2=0$
$\iff (x-y)^2=0$
$\iff x=y$
よって，$x=y$ と $x^2+y^2=2xy$ は同値である。
ゆえに，$x=y$ は $x^2+y^2=2xy$ であるための必要十分条件である。

(3)　「$x+y>2$ $\Longrightarrow$ 「$x>1$ または $y>1$」」は真。
(対偶「「$x\leqq 1$ かつ $y\leqq 1$」 $\Longrightarrow$ $x+y\leqq 2$」は真。)
「「$x>1$ または $y>1$」 $\Longrightarrow$ $x+y>2$」は偽。
(反例：$x=2$，$y=-2$)
よって，$x+y>2$ は，$x>1$ または $y>1$ であるための十分条件であるが必要条件ではない。

3 自然数 m，n に関する条件 p，q，r を次のように定める。
p：$m+n$ は偶数である　　q：mn は偶数である
r：m，n はともに偶数である

次の $\boxed{\quad}$ の中は，「必要条件であるが十分条件ではない」，「十分条件であるが必要条件ではない」，「必要十分条件である」，「必要条件でも十分条件でもない」のうち，それぞれどれが適するか。

(1)　p は r であるための $\boxed{\quad}$。

(2)　$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための $\boxed{\quad}$。

(3)　「p かつ q」は r であるための $\boxed{\quad}$。

(4)　「p または $\overline{q}$」は r であるための $\boxed{\quad}$。

解答　(1)　必要条件であるが十分条件ではない
(2)　十分条件であるが必要条件ではない
(3)　必要十分条件である
(4)　必要条件であるが十分条件ではない

p：$m+n$ は偶数である　　q：mn は偶数である
r：m，n はともに偶数である

(1)　「$m+n$ は偶数である $\Longrightarrow$ m，n はともに偶数である」は偽である。
(反例：$m=1$，$n=3$)
「m，n はともに偶数である $\Longrightarrow$ $m+n$ は偶数である」は真である。
よって，適するのは　「必要条件であるが十分条件ではない」

(2)　(1) より，$p \Longrightarrow r$ は偽，$r \Longrightarrow p$ は真であるから，それらの対偶を考えると
$\overline{p} \Longrightarrow \overline{r}$ は真，$\overline{r} \Longrightarrow \overline{p}$ は偽
よって，適するのは　「十分条件であるが必要条件ではない」

(3)　p：(m，n はともに偶数である) または (m，n はともに奇数である)
である。
m，n はともに偶数のとき q は成り立つが，m，n はともに奇数のとき q は成り立たないから
p かつ q：m，n はともに偶数である
である。したがって，「p かつ q」と r は同値である。
よって，適するのは　「必要十分条件である」

(4)　$\overline{q}$：mn は奇数である
であるから
$\overline{q}$：m，n はともに奇数である
また
p：(m，n はともに偶数である) または (m，n はともに奇数である)
であるから
p または $\overline{q}$：(m，n はともに偶数である) または (m，n はともに奇数である)
すなわち，(p または $\overline{q}$) は p と同じ条件である。
(1) より，$p \Longrightarrow r$ は偽，$r \Longrightarrow p$ は真であるから，
(p または $\overline{q}$) $\Longrightarrow r$ は偽であり，$r \Longrightarrow$ (p または $\overline{q}$) は真である。
よって，適するのは　「必要条件であるが十分条件ではない」

参考　m，n の偶奇については，次の 4 つの条件ですべて尽くされる。
a：m は偶数かつ n は偶数
b：m は偶数かつ n は奇数
c：m は奇数かつ n は偶数
d：m は奇数かつ n は奇数
また，a，b，c，d はどの 2 つも条件として交わりがない。
このとき，次のようになる。
p：a または d
q：a または b または c
r：a
$\overline{q}$：d
p または $\overline{q}$：a または d

4 次の $\boxed{\quad}$ の中は，「必要条件であるが十分条件ではない」，「十分条件であるが必要条件ではない」，「必要十分条件である」のうち，それぞれどれが適するか。ただし，a，b，x，y は実数とする。[各 8 点]

(1)　$a^2+b^2=2ab$ は $a=b$ であるための $\boxed{\quad}$。

(2)　$x=3$ かつ $y=4$ は $xy=12$ であるための $\boxed{\quad}$。

(3)　$a^2+b^2=0$ は $a=b=0$ であるための $\boxed{\quad}$。

解答　(1)　必要十分条件である
(2)　十分条件であるが必要条件ではない
(3)　必要十分条件である

(1)　必要十分条件である
(2)　十分条件であるが必要条件ではない
(3)　必要十分条件である

5 次の $\boxed{\quad}$ の中は，「必要条件であるが十分条件ではない」，「十分条件であるが必要条件ではない」，「必要十分条件である」，「必要条件でも十分条件でもない」のうち，それぞれどれが適するか。ただし，x は実数，a，b は整数とする。[各 15 点]

(1)　$x>-3$ は $x^2>9$ であるための $\boxed{\quad}$。

(2)　四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DA}$ であることは，四角形 ABCD が正方形であるための $\boxed{\quad}$。

(3)　a，b がともに奇数であることは，ab が奇数であるための $\boxed{\quad}$。

解答　(1)　必要条件でも十分条件でもない
(2)　必要条件であるが十分条件ではない
(3)　必要十分条件である

(1)　必要条件でも十分条件でもない
(2)　必要条件であるが十分条件ではない
(3)　必要十分条件である

6 x，y は実数とする。次の $\boxed{\quad}$ に，「必要」，「十分」のうち，適する言葉を入れよ。

(1)　$x=-2$ は $x^2=4$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件である。

(2)　$x>0$ は $x>1$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件である。

(3)　$x=y$ は $(x-y)x=0$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件である。

解答　(1)　十分　(2)　必要　(3)　十分

(1)　「$x=-2$ $\Longrightarrow$ $x^2=4$」は真，「$x^2=4$ $\Longrightarrow$ $x=-2$」は偽 (反例：$x=2$)。
よって　十分

(2)　「$x>0$ $\Longrightarrow$ $x>1$」は偽 (反例：$x=1$)，「$x>1$ $\Longrightarrow$ $x>0$」は真。
よって　必要

(3)　「$x=y$ $\Longrightarrow$ $(x-y)x=0$」は真，「$(x-y)x=0$ $\Longrightarrow$ $x=y$」は偽 (反例：$x=0$，

$y=1$)。

よって　十分

7 x，y は実数とする。次の □ に，「必要条件であるが十分条件ではない」，「十分条件であるが必要条件ではない」，「必要十分条件である」のうち，適する言葉を入れよ。

(1) △ABC が正三角形であることは，△ABC が二等辺三角形であるための □。

(2) $x<3$ は $-1<x<1$ であるための □。

(3) $|x|=|y|$ は $x^2=y^2$ であるための □。

解答 (1) 十分条件であるが必要条件ではない

(2) 必要条件であるが十分条件ではない　(3) 必要十分条件である

(1) 十分条件であるが必要条件ではない

(2) 必要条件であるが十分条件ではない

(3) 必要十分条件である

8 次の □ に最も適する語句を (ア)～(エ) から選べ。x，y は実数とする。

(1) $x<1$ は $x\leqq 1$ であるための □。

(2) $x<y$ は $x^4<y^4$ であるための □。

(3) $xy+1=x+y$ は x，y のうち少なくとも 1 つは 1 であるための □。

(4) $\angle\mathrm{A}<90^\circ$ は，△ABC が鋭角三角形であるための □。

(ア) 必要十分条件である

(イ) 必要条件であるが十分条件ではない

(ウ) 十分条件であるが必要条件ではない

(エ) 必要条件でも十分条件でもない

解答 (1) (ウ)　(2) (エ)　(3) (ア)　(4) (イ)

(1) $x<1 \Longrightarrow x\leqq 1$ は明らかに真。

$x\leqq 1 \Longrightarrow x<1$ は偽。　(反例) $x=1$

よって　(ウ)

(2) $x<y \Longrightarrow x^4<y^4$ は偽。　(反例) $x=-1$，$y=0$

$x^4<y^4 \Longrightarrow x<y$ は偽。　(反例) $x=0$，$y=-1$

ゆえに　(エ)

(3) $xy+1=x+y \iff (x-1)(y-1)=0$

$\iff x=1$ または $y=1$

$\iff x$，y のうち少なくとも 1 つは 1

よって　(ア)

(4) $\angle\mathrm{A}<90^\circ \Longrightarrow$ △ABC が鋭角三角形　は偽。

(反例) $\angle\mathrm{A}=30^\circ<90^\circ$，$\angle\mathrm{B}=30^\circ$，$\angle\mathrm{C}=120^\circ$

△ABC が鋭角三角形 $\Longrightarrow \angle\mathrm{A}<90^\circ$　は真。

ゆえに　(イ)

9 次の □ に最も適する語句を，下の選択肢 (ア)～(エ) から選べ。

a，x，y は実数とする。

(1) $xy>0$ は $x>0$ であるための □。

(2) $a\geqq 0$ は $\sqrt{a^2}=a$ であるための □。

(3) $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ は，△ABC が直角三角形であるための □。

(4) A，B を 2 つの集合とする。a が $A\cup B$ の要素であることは，a が A の要素であるための □。

(ア) 必要十分条件である　(イ) 必要条件であるが十分条件ではない

(ウ) 十分条件であるが必要条件ではない

(エ) 必要条件でも十分条件でもない

解答 (1) (エ)　(2) (ア)　(3) (ウ)　(4) (イ)

(1) $xy>0 \Longrightarrow x>0$ は偽。　(反例) $x=-1$，$y=-2$

$x>0 \Longrightarrow xy>0$ は偽。　(反例) $x=1$，$y=-2$

よって　(エ)

(2) $a\geqq 0 \iff \sqrt{a^2}=a$ は真。

よって　(ア)

(3) $\angle\mathrm{A}=90^\circ \Longrightarrow$ △ABC が直角三角形　は真。

△ABC が直角三角形 $\Longrightarrow \angle\mathrm{A}=90^\circ$　は偽。

(反例) $\angle\mathrm{A}=30^\circ$，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$，$\angle\mathrm{C}=60^\circ$

よって　(ウ)

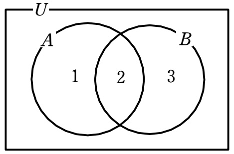
(4) 「$a\in A\cup B \Longrightarrow a\in A$」は偽。

(反例) $A=\{1,\ 2\}$，$B=\{2,\ 3\}$，$a=3$

また，$A\subset A\cup B$ であるから，

「$a\in A \Longrightarrow a\in A\cup B$」は真。

よって　(イ)



10 次の □ に最も適する語句を (ア)～(エ) から選べ。a，b，m，x，y は実数とする。

(1) $x=y$ は $x^2=y^2$ であるための □。

(2) $x=3$ は $x^2-5x+6=0$ であるための □。

(3) △ABC において，$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ は △ABC が直角三角形であるための □。

(4) $xy>0$ は $x>0$ であるための □。

(5) $a\geqq 0$ は $\sqrt{a^2}=a$ であるための □。

(6) $a=b$ は $ma=mb$ であるための □。

(7) $x+y>2$ は $x>1$ かつ $y>1$ であるための □。

(8) A，B を 2 つの集合とする。a が $A\cup B$ の要素であることは，a が A の要素であるための □。

(ア) 必要十分条件である　(イ) 必要条件であるが十分条件ではない

(ウ) 十分条件であるが必要条件ではない　(エ) 必要条件でも十分条件でもない

解答 (1) (ウ)　(2) (ウ)　(3) (ウ)　(4) (エ)　(5) (ア)　(6) (ウ)

(7) (イ)　(8) (イ)

(1) 「$x=y \Longrightarrow x^2=y^2$」は明らかに真。

「$x^2=y^2 \Longrightarrow x=y$」は偽。　(反例) $x=1$，$y=-1$

よって　(ウ)

(2) $x=3$ のとき　$x^2-5x+6=3^2-5\cdot 3+6=0$

ゆえに，「$x=3 \Longrightarrow x^2-5x+6=0$」は真。

「$x^2-5x+6=0 \Longrightarrow x=3$」は偽。　(反例) $x=2$

よって　(ウ)

(3) 「△ABC において，$\angle\mathrm{A}=90^\circ \Longrightarrow$ △ABC が直角三角形」は真。

「△ABC が直角三角形 $\Longrightarrow \angle\mathrm{A}=90^\circ$」は偽。

(反例) $\angle\mathrm{A}=30^\circ$，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$，$\angle\mathrm{C}=60^\circ$

よって　(ウ)

(4) 「$xy>0 \Longrightarrow x>0$」は偽。　(反例) $x=-1$，$y=-2$

「$x>0 \Longrightarrow xy>0$」は偽。　(反例) $x=1$，$y=-2$

よって　(エ)

(5) 「$a\geqq 0 \iff \sqrt{a^2}=a$」は真。

よって　(ア)

(6) $a=b$ の両辺に m を掛けると　$ma=mb$

ゆえに，「$a=b \Longrightarrow ma=mb$」は真。

「$ma=mb \Longrightarrow a=b$」は偽。　(反例) $m=0$，$a=1$，$b=2$

よって　(ウ)

(7) 「$x+y>2 \Longrightarrow x>1$ かつ $y>1$」は偽。　(反例) $x=5$，$y=-1$

$x>1$ かつ $y>1$ のとき　$x+y>1+y>2$

ゆえに，「$x>1$ かつ $y>1 \Longrightarrow x+y>2$」は真。

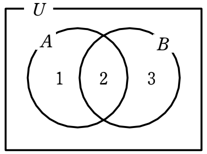
よって　(イ)

(8) 「$a\in A\cup B \Longrightarrow a\in A$」は偽。

(反例) $A=\{1,\ 2\}$，$B=\{2,\ 3\}$，$a=3$

また，$A\subset A\cup B$ であるから，「$a\in A \Longrightarrow a\in A\cup B$」は真。

よって　(イ)



11 2 以上の自然数 a，b について，集合 A，B を次のように定めるとき，次の ア□ ～ ウ□ に当てはまるものを，下の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

$A=\{x \mid x$ は a の正の約数 $\}$，$B=\{x \mid x$ は b の正の約数 $\}$

(1) A の要素の個数が 2 であることは，a が素数であるための ア□。

(2) $A\cap B=\{1,\ 2\}$ であることは，a と b がともに偶数であるための イ□。

(3) $a\leqq b$ であることは，$A\subset B$ であるための ウ□。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (ア) ⓪　(イ) ②　(ウ) ①

(1) A の要素の個数が 2 である，すなわち a の正の約数が 2 個であることは，a が素数であることと同値である。

したがって　ア ⓪

(2) 「$A\cap B=\{1,\ 2\} \Longrightarrow a$，$b$ がともに偶数」は真である。

(証明) $A\cap B=\{1,\ 2\}$ のとき，A は 1，2 を要素にもつ。

すなわち，a は 1，2 を約数にもつから，a は偶数である。

同様に b も偶数であるから，a，b はともに偶数である。

「a，b がともに偶数 $\Longrightarrow A\cap B=\{1,\ 2\}$」は偽である。

(反例) $a=4$，$b=8$

このとき，$A=\{1,\ 2,\ 4\}$，$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ となり，$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4\}$ である。

したがって　イ ②

(3) 「$a \leqq b \Longrightarrow A \subset B$」は偽である。

(反例) $a=3$，$b=5$

このとき，$A=\{1,\ 3\}$，$B=\{1,\ 5\}$ となり，$A \subset B$ ではない。

「$A \subset B \Longrightarrow a \leqq b$」は真である。

(証明) $A \subset B$ のとき，A の要素はすべて B の要素となる。

よって，b は，a の正の約数すべてを約数にもつ。

すなわち，b は a の倍数となるから　$a \leqq b$

したがって　ウ ①

12 次の □ に当てはまるものを下記の ①～④ のうちから1つ選べ。ただし，同じ番号を繰り返し選んでもよい。

実数 x に関する条件 p，q，r を

$$p:\ -1 \leqq x \leqq \frac{7}{3},\quad q:\ |3x-5| \leqq 2,\quad r:\ -5 \leqq 2-3x \leqq -1$$

とする。このとき，p は q であるための ア□。q は p であるための イ□。

また，r は q であるための ウ□。

① 必要十分条件である　② 必要条件でも十分条件でもない

③ 必要条件であるが，十分条件ではない　④ 十分条件であるが，必要条件ではない

解答　(ア) ③　(イ) ④　(ウ) ①

$|3x-5| \leqq 2$ から　$-2 \leqq 3x-5 \leqq 2$

すなわち　$1 \leqq x \leqq \dfrac{7}{3}$

よって，$p \Longrightarrow q$ は偽，$q \Longrightarrow p$ は真である。

したがって　p は q であるための必要条件であるが，十分条件ではない（ア ③）

q は p であるための十分条件であるが，必要条件ではない（イ ④）

$-5 \leqq 2-3x \leqq -1$ から　$1 \leqq x \leqq \dfrac{7}{3}$

ゆえに，$q \Longrightarrow r$，$r \Longrightarrow q$ はいずれも真である。

よって，r は q であるための必要十分条件である（ウ ①）

13 x，y は実数とする。次の □ に，「必要」，「十分」，「必要十分」のうち，最も適する言葉を入れよ。

(1) $xy>0$ は $x>0$ かつ $y>0$ であるための □ 条件である。

(2) $|x|=0$ は $x=0$ であるための □ 条件である。

(3) $xy \neq 0$ は $x \neq 0$ であるための □ 条件である。

解答　(1) 必要　(2) 必要十分　(3) 十分

(1) 「$xy>0 \Longrightarrow x>0$ かつ $y>0$」は偽。(反例：$x=-1$，$y=-1$)

「$x>0$ かつ $y>0 \Longrightarrow xy>0$」は真。

よって，必要条件である。

(2) 「$|x|=0 \Longrightarrow x=0$」は真。

「$x=0 \Longrightarrow |x|=0$」は真。

よって，必要十分条件である。

(3) 「$xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$」は真。

「$x \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0$」は偽。(反例：$x=1$，$y=0$)

よって，十分条件である。

14 m，n，k は自然数，x，y は実数，A，B は集合とする。次の □ に，下の (ア)～(エ) のうち，適するものを入れよ。

(ア) 必要条件であるが十分条件でない

(イ) 十分条件であるが必要条件でない

(ウ) 必要十分条件である

(エ) 必要条件でも十分条件でもない

(1) 積 mnk が偶数であることは，m，n，k がすべて偶数であるための □。

(2) $x=y$ は $x=\sqrt{y^2}$ であるための □。

(3) x，y がともに有理数であることは，$x+y$ が有理数であるための □。

(4) $x \in A \cup B$ は，$x \in A$ であるための □。

(5) $xy+1=x+y$ は，$x=1$ または $y=1$ であるための □。

解答　(1) (ア)　(2) (エ)　(3) (イ)　(4) (ア)　(5) (ウ)

(1) 「積 mnk が偶数 $\Longrightarrow$ m，n，k がすべて偶数」は偽。(反例：$m=2$，$n=1$，$k=1$)

「m，n，k がすべて偶数 $\Longrightarrow$ 積 mnk が偶数」は真。

よって，必要条件であるが十分条件でない。(ア)

(2) 「$x=y \Longrightarrow x=\sqrt{y^2}$」は偽。(反例：$x=-1$，$y=-1$)

「$x=\sqrt{y^2} \Longrightarrow x=y$」は偽。(反例：$x=1$，$y=-1$)

よって，必要条件でも十分条件でもない。(エ)

(3) 「x，y はともに有理数 $\Longrightarrow$ $x+y$ は有理数」は真。

「$x+y$ は有理数 $\Longrightarrow$ x，y はともに有理数」は偽。(反例：$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$)

よって，十分条件であるが必要条件でない。(イ)

(4) 「$x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A$」は偽。(反例：$x \in \overline{A} \cap B$)

「$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$」は真。

よって，必要条件であるが十分条件でない。(ア)

(5)
$$\begin{aligned} xy+1=x+y &\Longleftrightarrow xy-x-y+1=0 \\ &\Longleftrightarrow x(y-1)-(y-1)=0 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)(y-1)=0 \\ &\Longleftrightarrow x=1 \text{ または } y=1 \end{aligned}$$

よって，必要十分条件である。(ウ)

15 x，y は実数とする。次の □ に，「必要条件であるが十分条件でない」，「十分条件であるが必要条件でない」，「必要十分条件である」のうち，適するものを入れよ。いずれでもない場合には×印を入れよ。

(1) $x^2=y^2$ は $x^4=y^4$ であるための □。

(2) $|xy|=xy$ は，$x=0$ または $y=0$ であるための □。

(3) $x>0$ は $\sqrt{x^2}=x$ であるための □。

解答　(1) 必要十分条件である　(2) 必要条件であるが十分条件でない

(3) 十分条件であるが必要条件でない

(1) $x^2=y^2$ のとき，両辺を2乗すると　$x^4=y^4$

よって，「$x^2=y^2 \Longrightarrow x^4=y^4$」は真。

また，$x^4=y^4$ のとき　$\sqrt{(x^2)^2}=\sqrt{(y^2)^2}$

ゆえに　$x^2=y^2$

よって，「$x^4=y^4 \Longrightarrow x^2=y^2$」は真。

したがって，必要十分条件である。

(2) 「$|xy|=xy \Longrightarrow x=0$ または $y=0$」は偽。(反例：$x=1$，$y=1$)

$x=0$ または $y=0$ のとき　$|xy|=0$，$xy=0$

よって，「$x=0$ または $y=0 \Longrightarrow |xy|=xy$」は真。

したがって，必要条件であるが十分条件でない。

(3) $x>0$ のとき　$\sqrt{x^2}=|x|=x$

よって，「$x>0 \Longrightarrow \sqrt{x^2}=x$」は真。

また，「$\sqrt{x^2}=x \Longrightarrow x>0$」は偽。(反例：$x=0$)

したがって，十分条件であるが必要条件でない。

16 a，b は実数とする。次の □ に，「必要」，「十分」，「必要十分」のうち，最も適する言葉を入れよ。

(1) $a=5$ は $a^2=25$ であるための □ 条件である。

(2) $a<b$ は $a-b<0$ であるための □ 条件である。

解答　(1) 十分　(2) 必要十分

(1) 「$a=5 \Longrightarrow a^2=25$」は真，

「$a^2=25 \Longrightarrow a=5$」は偽 (反例：$a=-5$) である。

よって，$a=5$ は $a^2=25$ であるための十分条件である。

(2) 「$a<b \Longrightarrow a-b<0$」は真，

「$a-b<0 \Longrightarrow a<b$」も真である。

よって，$a<b$ は $a-b<0$ であるための必要十分条件である。

17 a，b は実数とする。次の □ に，「必要」，「十分」，「必要十分」のうち，最も適する言葉を入れよ。

(1) $a+b=2$ は $a=1$ かつ $b=1$ であるための □ 条件である。

(2) $(a+b)(a-b)=0$ は $a=b$ または $a=-b$ であるための □ 条件である。

解答　(1) 必要　(2) 必要十分

(1) 「$a+b=2 \Longrightarrow a=1$ かつ $b=1$」は偽

(反例：$a=0$，$b=2$)，

「$a=1$ かつ $b=1 \Longrightarrow a+b=2$」は真である。

よって，$a+b=2$ は $a=1$ かつ $b=1$ であるための必要条件である。

(2) 「$(a+b)(a-b)=0 \Longrightarrow a=b$ または $a=-b$」は真，

「$a=b$ または $a=-b \Longrightarrow (a+b)(a-b)=0$」も真である。

よって，$(a+b)(a-b)=0$ は $a=b$ または $a=-b$ であるための必要十分条件である。

18 次の条件 p，q について，p は q であるための「必要条件であるが十分条件ではない」か，「十分条件であるが必要条件ではない」か，「必要十分条件である」か，それとも「いずれでもない」か。最も適するものをいえ。

(1) x は実数　p：x^2 は偶数　q：x は偶数

(2) n は自然数　p：n^2 は奇数　q：n は奇数

(3) m，n，k は整数　p：和 $m+n+k$ は偶数　q：積 mnk は偶数

(4) a，b は実数　p：積 ab は有理数　q：和 $a+b$ は有理数

解答　(1)　必要条件であるが十分条件ではない　　(2)　必要十分条件である
(3)　十分条件であるが必要条件ではない　　(4)　いずれでもない

(1)　$x=\sqrt{2}$ とすると，$x^2=2$ (偶数) であるが，x は無理数である。
よって，$p \Longrightarrow q$ は偽である。また，$q \Longrightarrow p$ は真である。
したがって，p は q であるための　必要条件であるが十分条件ではない

(2)　$p \Longrightarrow q$ の対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ は，「n は偶数 $\Longrightarrow$ n^2 は偶数」である。
これは真であるから，$p \Longrightarrow q$ も真である。また，$q \Longrightarrow p$ は真である。
したがって，p は q であるための　必要十分条件である

(3)　$m+n+k$ が偶数になるのは，m，n，k がすべて偶数のときか，m，n，k のうち 1 つだけが偶数のときであるから，mnk も偶数となる。
よって，$p \Longrightarrow q$ は真である。
$m=1$，$n=k=2$ とすると，$mnk=4$ (偶数) であるが，$m+n+k=5$ (奇数) である。
よって，$q \Longrightarrow p$ は偽である。
したがって，p は q であるための　十分条件であるが必要条件ではない

(4)　$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$ とすると，$ab=2$ (有理数) であるが，$a+b=2\sqrt{2}$ (無理数) である。よって，$p \Longrightarrow q$ は偽である。
$a=1-\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$ とすると，$a+b=1$ (有理数) であるが，$ab=\sqrt{2}-2$ (無理数) である。よって，$q \Longrightarrow p$ は偽である。
したがって，いずれでもない。

19　a は実数とする。次の $\boxed{}$ に，「必要」，「十分」，「必要十分」のうち，最も適する言葉を入れよ。

(1)　$a^2=4$ は $a=2$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

(2)　$a>3$ は $a>1$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

(3)　$(a-3)^2=0$ は $a=3$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

解答　(1)　必要　　(2)　十分　　(3)　必要十分

(1)　「$a^2=4 \Longrightarrow a=2$」は 偽，　「$a=2 \Longrightarrow a^2=4$」は 真
よって，$a^2=4$ は $a=2$ であるための　　必要条件

(2)　「$a>3 \Longrightarrow a>1$」は 真，　「$a>1 \Longrightarrow a>3$」は 偽
よって，$a>3$ は $a>1$ であるための　　十分条件

(3)　「$(a-3)^2=0 \Longrightarrow a=3$」は 真，　「$a=3 \Longrightarrow (a-3)^2=0$」も 真
よって，$(a-3)^2=0$ は $a=3$ であるための　　必要十分条件

20　x，y は実数とする。次の $\boxed{}$ に「必要」，「十分」，「必要十分」のうち，最も適切なものを入れよ。

(1)　$x^2=16$ は $x=-4$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

(2)　$x=0$ は $xy=0$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

(3)　$3x=3y$ は $x=y$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

解答　(1)　必要　　(2)　十分　　(3)　必要十分

(1)　命題「$x^2=16 \Longrightarrow x=-4$」は偽である。(反例は $x=4$)
その逆「$x=-4 \Longrightarrow x^2=16$」は真である。
よって，$x^2=16$ は $x=-4$ であるための必要条件である。

(2)　命題「$x=0 \Longrightarrow xy=0$」は真である。
その逆「$xy=0 \Longrightarrow x=0$」は偽である。(反例は $x=1$，$y=0$)
よって，$x=0$ は $xy=0$ であるための十分条件である。

(3)　命題「$3x=3y \Longrightarrow x=y$」は真である。
その逆「$x=y \Longrightarrow 3x=3y$」も真である。
よって，$3x=3y$ は $x=y$ であるための必要十分条件である。

21　x，y は実数とする。次の $\boxed{}$ に「必要」，「十分」，「必要十分」のうち，最も適切なものを入れよ。

(1)　$x^2=4$ は $x=2$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

(2)　$x<0$ は $x^2>0$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

(3)　$x \fallingdotseq 0$ は $x^2>0$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

解答　(1)　必要　　(2)　十分　　(3)　必要十分

(1)　命題「$x^2=4 \Longrightarrow x=2$」は偽である。(反例は $x=-2$)
その逆「$x=2 \Longrightarrow x^2=4$」は真である。
よって，$x^2=4$ は $x=2$ であるための必要条件である。

(2)　命題「$x<0 \Longrightarrow x^2>0$」は真である。
その逆「$x^2>0 \Longrightarrow x<0$」は偽である。(反例は $x=1$)
よって，$x<0$ は $x^2>0$ であるための十分条件である。

(3)　命題「$x \fallingdotseq 0 \Longrightarrow x^2>0$」は真である。
その逆「$x^2>0 \Longrightarrow x \fallingdotseq 0$」も真である。
よって，$x \fallingdotseq 0$ は $x^2>0$ であるための必要十分条件である。

22　a を正の実数とする。このとき，実数 x に関する次の条件 p，q，r を考える。

$$p : |x-1| \leqq a, \qquad q : |x| \leqq \frac{5}{2}, \qquad r : x^2-2x \leqq a$$

(1)　次の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ③ のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。
$a=1$ のとき，p は q であるための $\boxed{\text{ア}}$。また，$a=3$ のとき，p は q であるための $\boxed{\text{イ}}$。

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない
①　十分条件であるが，必要条件ではない
②　必要十分条件である
③　必要条件でも十分条件でもない

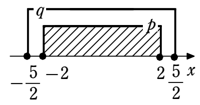
(2)　命題「$p \Longrightarrow q$」が真となるような a の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。
また，命題「$q \Longrightarrow p$」が真となるような a の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(3)　命題「$r \Longrightarrow q$」が真となるような a の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

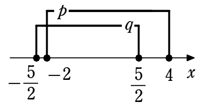
解答　(ア)　①　　(イ)　③　　$\dfrac{(\text{ウ})}{(\text{エ})}$　$\dfrac{3}{2}$　　$\dfrac{(\text{オ})}{(\text{カ})}$　$\dfrac{7}{2}$　　$\dfrac{(\text{キ})}{(\text{ク})}$　$\dfrac{5}{4}$

p について　　$-a \leqq x-1 \leqq a \Longleftrightarrow 1-a \leqq x \leqq 1+a$
q について　　$-\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$
r について　　$x^2-2x-a \leqq 0$
$x^2-2x-a=0$ を解くと　　$x=1\pm\sqrt{1+a}$　(a は正の実数)
よって　　r を解くと　　$1-\sqrt{1+a} \leqq x \leqq 1+\sqrt{1+a}$

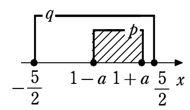
(1)　$a=1$ のとき，$p : 0 \leqq x \leqq 2$ である。
命題「$0 \leqq x \leqq 2 \Longrightarrow -\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$」は真。
すなわち，命題「$p \Longrightarrow q$」は真。
命題「$-\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2} \Longrightarrow 0 \leqq x \leqq 2$」は偽。
反例は $x=-1$
すなわち，命題「$q \Longrightarrow p$」は偽。
よって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない。
すなわち，p は q であるための ア①。



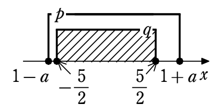
また，$a=3$ のとき，$p : -2 \leqq x \leqq 4$ である。
命題　$-2 \leqq x \leqq 4 \Longrightarrow -\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$　は偽。
反例は $x=3$
すなわち，命題「$p \Longrightarrow q$」は偽。
命題「$-\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2} \Longrightarrow -2 \leqq x \leqq 4$」は偽。
反例は $x=-\dfrac{5}{2}$
すなわち，命題「$q \Longrightarrow p$」は偽。
よって，p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。
すなわち，p は q であるための イ③。



(2)　命題「$p \Longrightarrow q$」が真となるための条件は，
右の図から $-\dfrac{5}{2} \leqq 1-a$ かつ $1+a \leqq \dfrac{5}{2}$ である。
$-\dfrac{5}{2} \leqq 1-a$ から　　$a \leqq \dfrac{7}{2}$
$1+a \leqq \dfrac{5}{2}$ から　　$a \leqq \dfrac{3}{2}$
$a \leqq \dfrac{7}{2}$ かつ $a \leqq \dfrac{3}{2}$ より　　$a \leqq \dfrac{3}{2}$
$a>0$ であるから　　$0<a \leqq \dfrac{3}{2}$
よって，命題「$p \Longrightarrow q$」が真となるような a の最大値は $\dfrac{{}^{\text{ウ}}3}{{}_{\text{エ}}2}$ である。



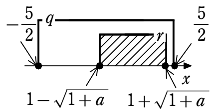
また，命題「$q \Longrightarrow p$」が真となるための条件は，
右の図から $1-a \leqq -\dfrac{5}{2}$ かつ $\dfrac{5}{2} \leqq 1+a$ である。
$1-a \leqq -\dfrac{5}{2}$ から　　$a \geqq \dfrac{7}{2}$
$\dfrac{5}{2} \leqq 1+a$ から　　$a \geqq \dfrac{3}{2}$
$a \geqq \dfrac{7}{2}$ かつ $a \geqq \dfrac{3}{2}$ より　　$a \geqq \dfrac{7}{2}$
よって，命題「$q \Longrightarrow p$」が真となるような a の最小値は $\dfrac{{}^{\text{オ}}7}{{}_{\text{カ}}2}$ である。



(3) 命題「$r \Longrightarrow q$」が真となるための条件は，
右の図から

$-\frac{5}{2} \leqq 1-\sqrt{1+a}$ かつ $1+\sqrt{1+a} \leqq \frac{5}{2}$

である。



$-\frac{5}{2} \leqq 1-\sqrt{1+a}$ から　　$\sqrt{1+a} \leqq \frac{7}{2}$　…… ①

① の両辺は 0 以上であるから，
両辺を 2 乗しても同値である。

よって，$1+a \leqq \frac{49}{4}$ から　　$a \leqq \frac{45}{4}$

$1+\sqrt{1+a} \leqq \frac{5}{2}$ から　　$\sqrt{1+a} \leqq \frac{3}{2}$　…… ②

② の両辺は 0 以上であるから，両辺を 2 乗しても同値である。

よって，$1+a \leqq \frac{9}{4}$ から　　$a \leqq \frac{5}{4}$

$a \leqq \frac{45}{4}$ かつ $a \leqq \frac{5}{4}$ より　　$a \leqq \frac{5}{4}$

$a>0$ であるから　　$0<a \leqq \frac{5}{4}$

よって，命題「$r \Longrightarrow q$」が真となるような a の最大値は $\dfrac{{}^{キ}5}{{}^{ク}4}$ である。

23 c，d をそれぞれ実数として，次の ${}^{ア}\boxed{}$，${}^{イ}\boxed{}$ に当てはまる選択肢を下の ①～④ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

$cd=0$ であることは，$c^2+d^2=0$ であるための ${}^{ア}\boxed{}$。

$c^2>d^2$ であることは，$c>d$ であるための ${}^{イ}\boxed{}$。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが，十分条件でない
③ 十分条件であるが，必要条件でない
④ 必要条件でも十分条件でもない

解答　(ア) ②　(イ) ④

$cd=0 \Longrightarrow c^2+d^2=0$　は偽　(反例：$c=1$，$d=0$)

$c^2+d^2=0 \Longleftrightarrow c=0$ かつ $d=0$ より，$c^2+d^2=0 \Longrightarrow cd=0$　は真

よって，$cd=0$ であることは，$c^2+d^2=0$ であるための，必要条件であるが，十分条件でない。

ゆえに　^{ア}②

次に　$c^2>d^2 \Longrightarrow c>d$　は偽　(反例：$c=-1$，$d=0$)

$c>d \Longrightarrow c^2>d^2$　は偽　(反例：$c=0$，$d=-1$)

よって，$c^2>d^2$ であることは，$c>d$ であるための，必要条件でも十分条件でもない。

ゆえに　^{イ}④

24 自然数 m，n に関する次の条件を考える。

p「$m \geqq 2$」，q「$n \geqq 2$」，r「$m+n \geqq 3$」，s「$mn \geqq 4$」

このとき，$\boxed{}$ にあてはまるものを A から D のうちから 1 つ選んで答えよ。
ただし同じものを繰り返し用いてもよい。

(1) p は r であるための $\boxed{}$

(2) q は s であるための $\boxed{}$

(3) s は「p かつ q」であるための $\boxed{}$

(4) r は「p または q」であるための $\boxed{}$

A．必要十分条件である。　　B．必要条件でも十分条件でもない。
C．必要条件であるが十分条件でない。
D．十分条件であるが必要条件でない。

解答　(1) D　(2) B　(3) C　(4) A

(1) n は自然数であるから　　$n \geqq 1$
よって，$m \geqq 2$ のとき　　$m+n \geqq 3$　　ゆえに「$p \Longrightarrow r$」は真。
「$r \Longrightarrow p$」は偽。(反例：$m=1$，$n=2$)
したがって　D

(2) 「$q \Longrightarrow s$」は偽。(反例：$m=1$，$n=2$)
「$s \Longrightarrow q$」は偽。(反例：$m=4$，$n=1$)
したがって　B

(3) 「$s \Longrightarrow p$ かつ q」は偽。(反例：$m=4$，$n=1$)
$m \geqq 2$ かつ $n \geqq 2$ のとき，$mn \geqq 4$ である。
よって，「p かつ $q \Longrightarrow s$」は真。
したがって　C

(4) 「$r \Longrightarrow p$ または q」の対偶は　「$\overline{p}$ かつ $\overline{q} \Longrightarrow \overline{r}$」
すなわち　「$m<2$ かつ $n<2$ ならば $m+n<3$」
m，n はともに自然数であるから，「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」すなわち $m<2$ かつ $n<2$ は
$m=n=1$ である。
このとき　$m+n=2<3$
ゆえに「$\overline{p}$ かつ $\overline{q} \Longrightarrow \overline{r}$」は真。
対偶が真であるから，「$r \Longrightarrow p$ または q」も真。
(1) から，「$p \Longrightarrow r$」は真。
同様に，「$q \Longrightarrow r$」も真。
ゆえに，「p または $q \Longrightarrow r$」は真。
したがって　A

25 $\boxed{}$ にあてはまる次の ①～④ のいずれかの番号を答えよ。

① 必要条件であるが，十分条件ではない
② 十分条件であるが，必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

a は実数とする。「$|a|^2=4$」は「$a=2$」であるための ${}^{ア}\boxed{}$，「$-a^2+5a-7<-1$」は「$2<a<3$」であるための ${}^{イ}\boxed{}$。

解答　(ア) ①　(イ) ④

(ア) 「$|a|^2=4 \Longrightarrow a=2$」は偽である。(反例：$a=-2$)
「$a=2 \Longrightarrow |a|^2=4$」は，$|2|^2=4$ であるから真である。
したがって，「$|a|^2=4$」は「$a=2$」であるための必要条件であるが，十分条件ではない。よって　^{ア}①

(イ) $-a^2+5a-7<-1$ から　　$a^2-5a+6>0$
すなわち　$(a-2)(a-3)>0$　　よって　$a<2$，$3<a$
したがって，「$-a^2+5a-7<-1$」は「$2<a<3$」であるための必要条件でも十分条件でもない。よって　^{イ}④

26 次の $\boxed{}$ に当てはまるものを下の ①～④ のうちから 1 つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(1) 実数 x，y について，$xy=0$ は $x^2+y^2=0$ であるための $\boxed{}$。

(2) 実数 x，y について，$x=2$ は $\sqrt{x^2}=2$ であるための $\boxed{}$。

(3) 集合 A，B について，$A \cap B=A$ は $A \cup B=B$ であるための $\boxed{}$。

(4) 整数 a，b について，ab が 5 の倍数であることは $2a+3b$ が 5 の倍数であるための $\boxed{}$。

① 必要十分条件である　　② 必要条件であるが，十分条件でない
③ 十分条件であるが，必要条件でない
④ 必要条件でも十分条件でもない

解答　(1) ②　(2) ③　(3) ①　(4) ④

(1) 「$xy=0 \Longrightarrow x^2+y^2=0$」は偽。(反例：$x=1$，$y=0$)
$x^2+y^2=0$ ならば $x=y=0$ である。
ゆえに「$x^2+y^2=0 \Longrightarrow xy=0$」は真。
よって　②

(2) $x=2$ ならば $\sqrt{x^2}=2$ である。
ゆえに「$x=2 \Longrightarrow \sqrt{x^2}=2$」は真。
「$\sqrt{x^2}=2 \Longrightarrow x=2$」は偽。(反例：$x=-2$)
よって　③

(3) $A \cap B=A$ ならば $A \subset B$ であるから　$A \cup B=B$
ゆえに「$A \cap B=A \Longrightarrow A \cup B=B$」は真。
$A \cup B=B$ ならば $A \subset B$ であるから　$A \cap B=A$
ゆえに「$A \cup B=B \Longrightarrow A \cap B=A$」は真。
よって　①

(4) 「ab が 5 の倍数 $\Longrightarrow 2a+3b$ が 5 の倍数」は偽。(反例：$a=5$，$b=1$)
「$2a+3b$ が 5 の倍数 $\Longrightarrow ab$ が 5 の倍数」は偽。(反例：$a=1$，$b=1$)
よって　④

27 以下の $\boxed{}$ にあてはまるものを，次の ①～④ のうちから 1 つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。また，a は実数である。

(1) $|a+1|=2$ は $a^2+2a-3=0$ であるための $\boxed{}$。

(2) $|a-1|<2$ は $a^2-1<0$ であるための $\boxed{}$。

(3) $1<|a|<2$ は $-1<a<2$ であるための $\boxed{}$。

① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

解答　(1) ③　(2) ①　(3) ④

(1) $|a+1|=2$　より　$a+1=\pm 2$　　よって　$a=1$，-3
$a^2+2a-3=0$　より　$(a-1)(a+3)=0$　　よって　$a=1$，-3
ゆえに，「$|a+1|=2 \Leftrightarrow a^2+2a-3=0$」が成り立つ。
よって，$|a+1|=2$ は $a^2+2a-3=0$ であるための必要十分条件である。③

(2) $|a-1|<2$　より　$-2<a-1<2$　　よって　$-1<a<3$

$a^2-1<0$ より $(a+1)(a-1)<0$ よって $-1<a<1$

ゆえに，「$|a-1|<2 \Longrightarrow a^2-1<0$」は成り立たないが，「$|a-1|<2 \Longleftarrow a^2-1<0$」は成り立つ。

よって，$|a-1|<2$ は $a^2-1<0$ であるための必要条件であるが，十分条件でない。

①

(3) $1<|a|<2$ について，$1<|a|$ を解くと $a<-1,\ 1<a$

$|a|<2$ を解くと $-2<a<2$

したがって，$1<|a|<2$ の解は $-2<a<-1,\ 1<a<2$

ゆえに，「$1<|a|<2 \Longrightarrow -1<a<2$」も「$1<|a|<2 \Longleftarrow -1<a<2$」も成り立たない。

よって，$1<|a|<2$ は $-1<a<2$ であるための必要条件でも十分条件でもない。④

28 x は実数，m は自然数とする。$\boxed{}$ にあてはまるものを下の ⓪～④ の中から選べ。

(1) $x=3$ は $x^2=3x$ であるための ア$\boxed{}$

(2) $x^2 \geqq 4$ であることは $x \geqq 2$ であるための イ$\boxed{}$

(3) m が素数であることは m が奇数であるための ウ$\boxed{}$

① 必要条件であるが，十分条件でない　② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (ア) ② (イ) ① (ウ) ④

(1) $x=3$ のとき，$x^2=3^2=9$，$3x=3\cdot3=9$ より $x^2=3x$

よって，「$x=3 \Longrightarrow x^2=3x$」は真である。

また，$x^2=3x$ のとき，$x(x-3)=0$ より $x=0$ または $x=3$

ゆえに，「$x^2=3x \Longrightarrow x=3$」は偽である。(反例：$x=0$)

したがって ア②

(2) $x^2 \geqq 4$ のとき，$x^2-4 \geqq 0$ より $x \leqq -2,\ 2 \leqq x$

よって，「$x^2 \geqq 4 \Longrightarrow x \geqq 2$」は偽である。(反例：$x=-2$)

また，$x \geqq 2$ のとき $x^2 \geqq 4$ ゆえに，「$x \geqq 2 \Longrightarrow x^2 \geqq 4$」は真である。

したがって イ①

(3) m が素数であっても，奇数であるとは限らない。

すなわち，「m が素数 $\Longrightarrow$ m が奇数」は偽である。(反例：$m=2$)

また，m が奇数であっても，素数であるとは限らない。

すなわち，「m が奇数 $\Longrightarrow$ m が素数」は偽である。(反例：$m=1$)

したがって ウ④

29 $x,\ y$ は実数とする。$\boxed{}$ にあてはまるものを下の ⓪ ～ ④ の中から選べ。

(1) $x(x-2)=0$ は $x=2$ であるための ア$\boxed{}$

(2) $x=5$ は，$x^3=25x$ であるための イ$\boxed{}$

(3) $x,\ y$ が無理数であることは，$\dfrac{x}{y}$ が無理数であるための ウ$\boxed{}$

① 必要条件であるが，十分条件でない　② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (ア) ① (イ) ② (ウ) ④

(1) $x(x-2)=0$ のとき $x=0$ または $x=2$

よって，「$x(x-2)=0 \Longrightarrow x=2$」は偽である。(反例：$x=0$)

また，「$x=2 \Longrightarrow x(x-2)=0$」は真である。

したがって ア①

(2) 「$x=5 \Longrightarrow x^3=25x$」は真である。

また，$x^3=25x$ のとき，$x(x+5)(x-5)=0$ であるから

$x=0$ または $x=-5$ または $x=5$

よって，「$x^3=25x \Longrightarrow x=5$」は偽である。(反例：$x=0$)

したがって イ②

(3) $x,\ y$ がともに無理数であっても，$\dfrac{x}{y}$ が無理数であるとは限らない。

すなわち，「$x,\ y$ がともに無理数 $\Longrightarrow$ $\dfrac{x}{y}$ が無理数」は偽である。

(反例：$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$)

また，$\dfrac{x}{y}$ が無理数であっても，$x,\ y$ がともに無理数であるとは限らない。

すなわち，「$\dfrac{x}{y}$ が無理数 $\Longrightarrow$ $x,\ y$ がともに無理数」は偽である。

(反例：$x=\sqrt{2}$，$y=1$)

したがって ウ④

30 $x,\ y$ は実数，$a,\ b$ は自然数とする。$\boxed{}$ にあてはまるものを下の ⓪～④ の中から選べ。

(1) $x>y$ は $x^2>y^2$ であるための ア$\boxed{}$

(2) $x>3$ かつ $y>3$ であることは $x+y>6$ かつ $xy>9$ であるための イ$\boxed{}$

(3) a^2+b^2 が 5 の倍数であることは $a,\ b$ がともに 5 の倍数であるための ウ$\boxed{}$

① 必要条件であるが，十分条件でない　② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (ア) ④ (イ) ② (ウ) ①

(1) 「$x>y \Longrightarrow x^2>y^2$」は偽である。(反例：$x=1$，$y=-2$)

また，「$x^2>y^2 \Longrightarrow x>y$」も偽である。(反例：$x=-2$，$y=1$)

したがって ア④

(2) 「$x>3$ かつ $y>3 \Longrightarrow x+y>6$ かつ $xy>9$」は真である。

また，「$x+y>6$ かつ $xy>9 \Longrightarrow x>3$ かつ $y>3$」は偽である。

(反例：$x=1$，$y=10$)

したがって イ②

(3) 「a^2+b^2 が 5 の倍数 $\Longrightarrow$ $a,\ b$ がともに 5 の倍数」は偽である。

(反例：$a=1$，$b=2$)

$a,\ b$ がともに 5 の倍数のとき，自然数 $k,\ l$ を用いて，$a=5k$，$b=5l$ と表される。

$a^2+b^2=5(5k^2+5l^2)$ であるから，a^2+b^2 は 5 の倍数である。

ゆえに，「$a,\ b$ がともに 5 の倍数 $\Longrightarrow$ a^2+b^2 が 5 の倍数」は真である。

したがって ウ①

31 $x,\ y$ は実数，$a,\ b$ は自然数とする。$\boxed{}$ にあてはまるものを下の ⓪ ～ ④ の中から選べ。

(1) $x^3<0$ は $x<0$ であるための ア$\boxed{}$

(2) $x+y>4$ かつ $xy>4$ であることは $x>2$ かつ $y>2$ であるための イ$\boxed{}$

(3) $a,\ b$ がともに奇数であることは，a^2+b^2 が偶数であるための ウ$\boxed{}$

① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (ア) ③ (イ) ① (ウ) ②

(1) $x^3<0$ とする。

両辺を $x^2>0$ で割ると $x<0$

よって，「$x^3<0 \Longrightarrow x<0$」は真である。

また，「$x<0 \Longrightarrow x^3<0$」も真である。

したがって ア③

(2) 「$x+y>4$ かつ $xy>4 \Longrightarrow x>2$ かつ $y>2$」は偽である。(反例：$x=1$，$y=5$)

また，「$x>2$ かつ $y>2 \Longrightarrow x+y>4$ かつ $xy>4$」は真である。

したがって イ①

(3) $a,\ b$ がともに奇数のとき，自然数 $k,\ l$ を用いて，$a=2k-1$，$b=2l-1$ と表される。

$a^2+b^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2=2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$

よって，a^2+b^2 は偶数である。

ゆえに，「$a,\ b$ がともに奇数 $\Longrightarrow$ a^2+b^2 が偶数」は真である。

また，「a^2+b^2 が偶数 $\Longrightarrow$ $a,\ b$ がともに奇数」は偽である。(反例：$a=2$，$b=2$)

したがって ウ②

32 x は実数とする。次の $\boxed{}$ にあてはまるものを下の ⓪ ～ ④ の中から選べ。

(1) $x=3$ は，$3x+5=14$ であるための ア$\boxed{}$。

(2) $x=\sqrt{2}$ は，$x^2=2$ であるための イ$\boxed{}$。

① 必要条件であるが，十分条件でない　② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (ア) ③ (イ) ②

(1) $x=3$ のとき $3x+5=3\cdot3+5=14$

よって，「$x=3 \Longrightarrow 3x+5=14$」は真である。

また，$3x+5=14$ のとき $x=3$

よって，「$3x+5=14 \Longrightarrow x=3$」も真である。

ゆえに，$x=3$ は，$3x+5=14$ であるための必要十分条件である。

したがって ア③

(2) $x=\sqrt{2}$ のとき $x^2=(\sqrt{2})^2=2$

よって，「$x=\sqrt{2} \Longrightarrow x^2=2$」は真である。

また，「$x^2=2 \Longrightarrow x=\sqrt{2}$」は偽である。(反例：$x=-\sqrt{2}$)

ゆえに，$x=\sqrt{2}$ は，$x^2=2$ であるための十分条件である。

したがって イ②

33 $x,\ y$ は実数とする。次の $\boxed{}$ にあてはまるものを下の ⓪ ～ ④ の中から選べ。

(1) $x=2$ は，$x^2-7x+10=0$ であるための ア$\boxed{}$。

(2) $x^4=y^4$ は，$x=y$ であるための イ$\boxed{}$。

① 必要条件であるが，十分条件でない　② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (ア) ② (イ) ①

(1) $x=2$ のとき $2^2-7\cdot2+10=0$

よって，「$x=2 \Longrightarrow x^2-7x+10=0$」は真である。

また，「$x^2-7x+10=0 \Longrightarrow x=2$」は偽である。(反例：$x=5$)

ゆえに，$x=2$ は $x^2-7x+10=0$ であるための十分条件である。

したがって　ア②

(2)　「$x^4=y^4 \Longrightarrow x=y$」は偽である。（反例：$x=1$，$y=-1$）

また，$x=y$ のとき，両辺を 4 乗すると　$x^4=y^4$

よって，「$x=y \Longrightarrow x^4=y^4$」は真である。

ゆえに，$x^4=y^4$ は $x=y$ であるための必要条件である。

したがって　イ①

34 次の $\boxed{}$ にあてはまるものを下の ① ～ ④ の中から選べ。

(1)　実数 a，b について，$a>0$ かつ $b>0$ は，$ab>0$ であるための ア$\boxed{}$。

(2)　2 つの三角形の面積が等しいことは，それらが合同であるための イ$\boxed{}$。

①　必要条件であるが十分条件でない　　②　十分条件であるが必要条件でない

③　必要十分条件である　　④　必要条件でも十分条件でもない

解答　（ア）②　（イ）①

(1)　$a>0$ かつ $b>0$ のとき　　$ab>0$

よって，「$a>0$ かつ $b>0 \Longrightarrow ab>0$」は真である。

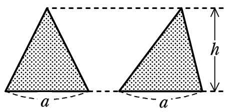
また，$ab>0$ のとき　($a>0$ かつ $b>0$) または ($a<0$ かつ $b<0$)

よって，「$ab>0 \Longrightarrow a>0$ かつ $b>0$」は偽である。　(反例：$a=-1$，$b=-2$)

ゆえに，$a>0$ かつ $b>0$ は，$ab>0$ であるための十分条件である。

したがって　ア②

(2)　2 つの三角形の面積が等しいとき，それらが合同とは限らない。　(反例：右図)



また，合同な 2 つの三角形は明らかに面積が等しい。

ゆえに，2 つの三角形の面積が等しいことは，それらが合同であるための必要条件である。

したがって　イ①

35 次の $\boxed{}$ にあてはまるものを下の ① ～ ④ の中から選べ。

(1)　実数 x，y について，$xy<0$ は，$x^2+y^2>0$ であるための ア$\boxed{}$。

(2)　$\triangle$ABC の 3 辺の長さを BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とする。c を最大辺とするとき，$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$ は，$\triangle$ABC が直角三角形であるための イ$\boxed{}$。

①　必要条件であるが十分条件でない　　②　十分条件であるが必要条件でない

③　必要十分条件である　　④　必要条件でも十分条件でもない

解答　（ア）②　（イ）①

(1)　$xy<0$ のとき

($x>0$ かつ $y<0$) または ($x<0$ かつ $y>0$)

いずれの場合も　　$x^2>0$，$y^2>0$　　　すなわち　　$x^2+y^2>0$

よって，「$xy<0 \Longrightarrow x^2+y^2>0$」は真である。

また，「$x^2+y^2>0 \Longrightarrow xy<0$」は偽である。　(反例：$x=2$，$y=3$)

ゆえに，$xy<0$ は，$x^2+y^2>0$ であるための十分条件である。

したがって　ア②

(2)　「$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0 \Longrightarrow \triangle$ABC が直角三角形である」は偽である。

(反例：$a=3$，$b=3$，$c=4$)

また，$\triangle$ABC が直角三角形であるとき，c が最大辺であるから，三平方の定理により

$a^2+b^2=c^2$　　　すなわち　　$a^2+b^2-c^2=0$

よって　　$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

したがって，

「$\triangle$ABC が直角三角形である $\Longrightarrow (a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$」は真である。

ゆえに，$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$ は，$\triangle$ABC が直角三角形であるための 必要条件である。

したがって　イ①