

2次不等式クイズ

1 2次不等式 $x^2 - 2x - 3 > 0$ などの解

2次関数 $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフは右の図のようになり、 x 軸と異なる 2 点で交わる。
2つの交点の x 座標は、2次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ の実数解で

$$x = -1, 3$$

右の図から

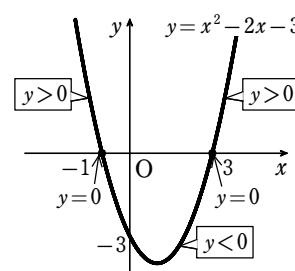
$y > 0$ となる x の値の範囲は $x < -1, 3 < x$
 $y < 0$ となる x の値の範囲は $-1 < x < 3$

ゆえに、次のことわざわかる。

2次不等式 $x^2 - 2x - 3 > 0$ の解は $x < -1, 3 < x$

2次不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ の解は $-1 < x < 3$

(解説)



1 2次方程式 $3x^2 + 4x - 4 = 0$ を解くと

$$x = -2, \frac{2}{3}$$

よって、この2次不等式の解は

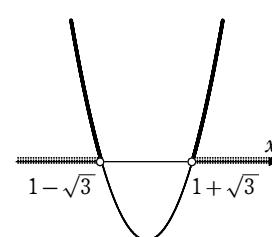
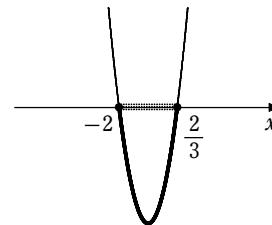
$$-2 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

1 2次方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

よって、この2次不等式の解は

$$x < 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} < x$$



両辺に -1 を掛けて $x^2 - 3x + 2 > 0$

2次方程式 $x^2 - 3x + 2 = 0$ を解くと $x = 1, 2$
よって、2次不等式 $x^2 - 3x + 2 > 0$ の解は

$$x < 1, 2 < x$$

6 次の2次不等式を解け。

$$(1) -x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$(2) -2x^2 + 6x - 1 \leq 0$$

(解答) (1) $\frac{3 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

(2) $x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2}, \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \leq x$

(解説)

(1) 両辺に -1 を掛けて $x^2 - 3x - 1 < 0$

2次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ を解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

よって、2次不等式 $x^2 - 3x - 1 < 0$ の解は

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

(2) 両辺に -1 を掛けて $2x^2 - 6x + 1 \geq 0$

2次方程式 $2x^2 - 6x + 1 = 0$ を解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$

よって、2次不等式 $2x^2 - 6x + 1 \geq 0$ の解は

$$x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2}, \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \leq x$$

2 次の2次不等式を解け。

- (1) $(x-3)(x-5) > 0$ (2) $(x+3)(x-2) \leq 0$
(3) $x^2 - 7x + 12 < 0$ (4) $x^2 + 3x - 4 \geq 0$
(5) $x^2 + 5x + 6 \leq 0$ (6) $x^2 - 4 \geq 0$

(解答) (1) $x < 3, 5 < x$ (2) $-3 \leq x \leq 2$ (3) $3 < x < 4$ (4) $x \leq -4, 1 \leq x$
(5) $-3 \leq x \leq -2$ (6) $x \leq -2, 2 \leq x$

(解説)

- (1) 2次方程式 $(x-3)(x-5) = 0$ を解くと $x = 3, 5$
よって、2次不等式 $(x-3)(x-5) > 0$ の解は $x < 3, 5 < x$
(2) 2次方程式 $(x+3)(x-2) = 0$ を解くと $x = -3, 2$
よって、2次不等式 $(x+3)(x-2) \leq 0$ の解は $-3 \leq x \leq 2$
(3) 2次方程式 $x^2 - 7x + 12 = 0$ を解くと $x = 3, 4$
よって、2次不等式 $x^2 - 7x + 12 < 0$ の解は $3 < x < 4$
(4) 2次方程式 $x^2 + 3x - 4 = 0$ を解くと $x = -4, 1$
よって、2次不等式 $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ の解は $x \leq -4, 1 \leq x$
(5) 2次方程式 $x^2 + 5x + 6 = 0$ を解くと $x = -3, -2$
よって、2次不等式 $x^2 + 5x + 6 \leq 0$ の解は $-3 \leq x \leq -2$
(6) 2次方程式 $x^2 - 4 = 0$ を解くと $x = \pm 2$
よって、2次不等式 $x^2 - 4 \geq 0$ の解は $x \leq -2, 2 \leq x$

3 次の2次不等式を解け。

- (1) $3x^2 + 4x - 4 \leq 0$ (2) $x^2 - 2x - 2 > 0$

(解答) (1) $-2 \leq x \leq \frac{2}{3}$ (2) $x < 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} < x$

(解説)

4 次の2次不等式を解け。

- (1) $2x^2 - 7x + 3 < 0$ (2) $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$
(3) $x^2 + 2x - 1 \leq 0$ (4) $3x^2 + x - 1 > 0$

(解答) (1) $\frac{1}{2} < x < 3$ (2) $x \leq -\frac{1}{2}, 2 \leq x$ (3) $-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$
(4) $x < \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} < x$

(解説)

- (1) 2次方程式 $2x^2 - 7x + 3 = 0$ を解くと $x = \frac{1}{2}, 3$

よって、2次不等式 $2x^2 - 7x + 3 < 0$ の解は

$$\frac{1}{2} < x < 3$$

- (2) 2次方程式 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ を解くと $x = -\frac{1}{2}, 2$

よって、2次不等式 $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$ の解は

$$x \leq -\frac{1}{2}, 2 \leq x$$

- (3) 2次方程式 $x^2 + 2x - 1 = 0$ を解くと $x = -1 \pm \sqrt{2}$

よって、2次不等式 $x^2 + 2x - 1 \leq 0$ の解は

$$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$$

- (4) 2次方程式 $3x^2 + x - 1 = 0$ を解くと $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$

よって、2次不等式 $3x^2 + x - 1 > 0$ の解は

$$x < \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} < x$$

5 2次不等式 $-x^2 + 3x - 2 < 0$ を解け。

(解答) $x < 1, 2 < x$

(解説)

両辺に -1 を掛けて $x^2 - 3x + 2 > 0$

2次方程式 $x^2 - 3x + 2 = 0$ を解くと $x = 1, 2$

よって、2次不等式 $x^2 - 3x + 2 > 0$ の解は

$$x < 1, 2 < x$$

6 次の2次不等式を解け。

$$(1) -x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$(2) -2x^2 + 6x - 1 \leq 0$$

(解答) (1) $\frac{3 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

(2) $x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2}, \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \leq x$

(解説)

(1) 両辺に -1 を掛けて $x^2 - 3x - 1 < 0$

2次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ を解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

よって、2次不等式 $x^2 - 3x - 1 < 0$ の解は

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

(2) 両辺に -1 を掛けて $2x^2 - 6x + 1 \geq 0$

2次方程式 $2x^2 - 6x + 1 = 0$ を解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$

よって、2次不等式 $2x^2 - 6x + 1 \geq 0$ の解は

$$x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2}, \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \leq x$$

7 2次不等式 $x^2 - 2x + 1 > 0$ などの解

2次関数 $y = x^2 - 2x + 1$

すなわち $y = (x-1)^2$

のグラフは右の図のようになり、 x 軸と点 $(1, 0)$

で接する。よって

$x \neq 1$ のとき $y > 0$

$x = 1$ のとき $y = 0$

ゆえに、次のことわざわかる。

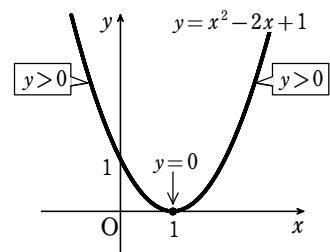
2次不等式 $x^2 - 2x + 1 > 0$ の解は 1 以外のすべての実数

2次不等式 $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ の解は すべての実数

2次不等式 $x^2 - 2x + 1 < 0$ の解は ない

2次不等式 $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ の解は $x = 1$

(解説)



8 次の2次不等式を解け。

$$(1) x^2 + 6x + 9 > 0$$

$$(2) x^2 - 8x + 16 \geq 0$$

$$(3) 4x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$(4) x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 \leq 0$$

(解答) (1) -3 以外のすべての実数

(2) すべての実数

(3) 解はない

(4) $x = \sqrt{3}$

解説

(1) 2次方程式 $x^2 + 6x + 9 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

2次方程式 $x^2 + 6x + 9 = 0$ は重解 $x = -3$ をもつ。

2次不等式 $x^2 + 6x + 9 > 0$ の x^2 の係数は正であるから、解は -3 以外のすべての実数

(2) 2次方程式 $x^2 - 8x + 16 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$$

2次不等式 $x^2 - 8x + 16 \geq 0$ の x^2 の係数は正であるから、解はすべての実数

(3) 2次方程式 $4x^2 - 4x + 1 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$$

2次不等式 $4x^2 - 4x + 1 < 0$ の x^2 の係数は正であるから、解はない。

(4) 2次方程式 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 0$$

2次方程式 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ は重解 $x = \sqrt{3}$ をもつ。

2次不等式 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 \leq 0$ の x^2 の係数は正であるから、解は

$$x = \sqrt{3}$$

別解 (1) 左辺を因数分解すると $(x+3)^2 > 0$

$$x+3 \neq 0 \text{ ならば } (x+3)^2 > 0$$

$$x+3 = 0 \text{ ならば } (x+3)^2 = 0$$

が成り立つ。

よって、解は -3 以外のすべての実数

(2) 左辺を因数分解すると $(x-4)^2 \geq 0$

この不等式は常に成り立つ。

よって、解は すべての実数

(3) 左辺を因数分解すると $(2x-1)^2 < 0$

常に $(2x-1)^2 \geq 0$ であるから、 $(2x-1)^2 < 0$ を成り立たせる実数 x は存在しない。

よって、解はない。

(4) 左辺を因数分解すると $(x-\sqrt{3})^2 \leq 0$

$$x - \sqrt{3} \neq 0 \text{ ならば } (x - \sqrt{3})^2 > 0$$

$$x - \sqrt{3} = 0 \text{ ならば } (x - \sqrt{3})^2 = 0$$

が成り立つ。

よって、解は $x = \sqrt{3}$

9 2次不等式 $x^2 - 2x + 2 > 0$ などの解

2次関数 $y = x^2 - 2x + 2$

すなわち $y = (x-1)^2 + 1$

のグラフは右の図のようになり、 x 軸より上側にある。

よって

常に $y > 0$

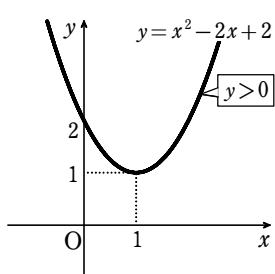
ゆえに、次のことがわかる。

2次不等式 $x^2 - 2x + 2 > 0$ の解は すべての実数

2次不等式 $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ の解は すべての実数

2次不等式 $x^2 - 2x + 2 < 0$ の解は ない

2次不等式 $x^2 - 2x + 2 \leq 0$ の解は ない



10 次の2次不等式を解け。

$$(1) x^2 + 6x + 10 > 0$$

$$(3) x^2 - 4x + 5 < 0$$

$$(2) 2x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$(4) 2x^2 + 3x + 4 \leq 0$$

解答 (1) すべての実数 (2) すべての実数 (3) 解はない (4) 解はない

解説

(1) 2次方程式 $x^2 + 6x + 10 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 < 0$$

2次不等式 $x^2 + 6x + 10 > 0$ の x^2 の係数は正であるから、解はすべての実数

(2) 2次方程式 $2x^2 - 4x + 3 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -8 < 0$$

2次不等式 $2x^2 - 4x + 3 \geq 0$ の x^2 の係数は正であるから、解はすべての実数

(3) 2次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$$

2次不等式 $x^2 - 4x + 5 < 0$ の x^2 の係数は正であるから、解はない。

(4) 2次方程式 $2x^2 + 3x + 4 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23 < 0$$

2次不等式 $2x^2 + 3x + 4 \leq 0$ の x^2 の係数は正であるから、解はない。

別解 (1) 左辺を変形すると $(x+3)^2 + 1 > 0$

この不等式は常に成り立つ。

よって、解は すべての実数

(2) 左辺を変形すると $2(x-1)^2 + 1 \geq 0$

この不等式は常に成り立つ。

よって、解は すべての実数

(3) 左辺を変形すると $(x-2)^2 + 1 < 0$

常に $(x-2)^2 + 1 > 0$ であるから、 $(x-2)^2 + 1 < 0$ を成り立たせる実数 x は存在しない。

よって、解はない。

(4) 左辺を変形すると $2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \leq 0$

常に $2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} > 0$ であるから、 $2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \leq 0$ を成り立たせる実数 x は存在しない。

よって、解はない。

11 次の2次不等式を解け。

$$(1) x(x+2) > 0$$

$$(4) x+6 < x^2$$

$$(2) 2x^2 - 5x - 3 \leq 0$$

$$(5) -x^2 + 5x - 6 > 0$$

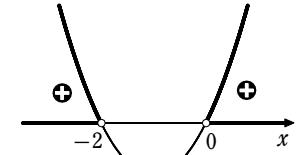
$$(3) x^2 - 6x - 1 \geq 0$$

解答 (1) $x < -2, 0 < x$ (2) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$ (3) $x \leq 3 - \sqrt{10}, 3 + \sqrt{10} \leq x$

(4) $x < -2, 3 < x$ (5) $2 < x < 3$

解説

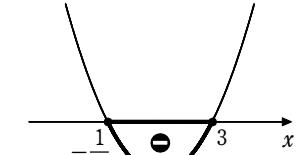
(1) $x(x+2) > 0$ から $x < -2, 0 < x$



(2) 不等式の左辺を因数分解して

$$(2x+1)(x-3) \leq 0$$

よって $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

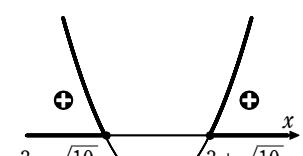


(3) $x^2 - 6x - 1 = 0$ を解くと

$$x = 3 \pm \sqrt{10}$$

よって、 $x^2 - 6x - 1 \geq 0$ の解は

$$x \leq 3 - \sqrt{10}, 3 + \sqrt{10} \leq x$$

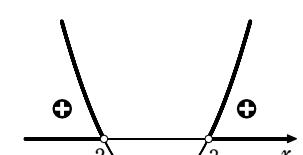


(4) 不等式を変形すると

$$x^2 - x - 6 > 0$$

ゆえに $(x+2)(x-3) > 0$

よって $x < -2, 3 < x$

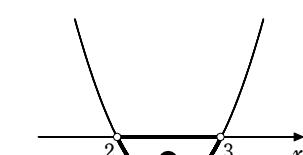


(5) 両辺に -1 を掛けて

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

ゆえに $(x-2)(x-3) < 0$

よって $2 < x < 3$



12 次の2次不等式を解け。

$$(1) x^2 - 3 < 0$$

$$(2) x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

$$(3) 3x^2 + 20x - 7 > 0$$

$$(4) x^2 - 7x + 5 \leq 0$$

$$(5) 5x > 3(4x^2 - 1)$$

$$(6) -5x^2 - 2x + 1 < 0$$

解答 (1) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ (2) $x \leq 2, 4 \leq x$ (3) $x < -7, \frac{1}{3} < x$

$$(4) \frac{7 - \sqrt{29}}{2} \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$$

$$(5) -\frac{1}{3} < x < \frac{3}{4}$$

$$(6) x < \frac{-1 - \sqrt{6}}{5}, \frac{-1 + \sqrt{6}}{5} < x$$

解説

(1) $x^2 - 3 = 0$ を解くと $x = \pm \sqrt{3}$

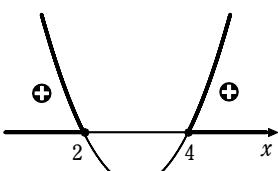
よって、解は $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

別解 不等式から $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) < 0$

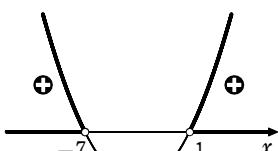
よって、解は $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$



(2) 不等式から $(x-2)(x-4) \geq 0$
よって、解は $x \leq 2, 4 \leq x$



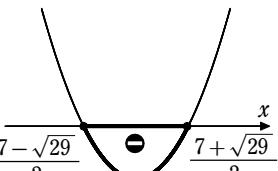
(3) 不等式は $(x+7)(3x-1) > 0$
よって、解は $x < -7, \frac{1}{3} < x$



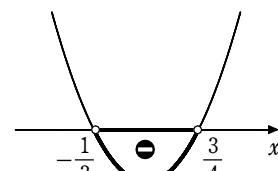
(4) $x^2 - 7x + 5 = 0$ を解くと

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}$$

よって、解は $\frac{7 - \sqrt{29}}{2} \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$



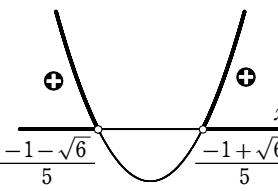
(5) 展開して整理すると $12x^2 - 5x - 3 < 0$
左辺を因数分解して $(3x+1)(4x-3) < 0$
よって、解は $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{4}$



(6) 両辺に -1 を掛けて $5x^2 + 2x - 1 > 0$
 $5x^2 + 2x - 1 = 0$ を解くと

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 5 \cdot (-1)}}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$$

よって、解は $x < \frac{-1 - \sqrt{6}}{5}, \frac{-1 + \sqrt{6}}{5} < x$



13 次の2次不等式を解け。

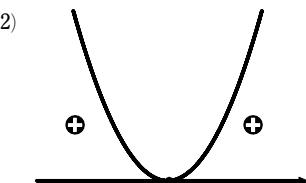
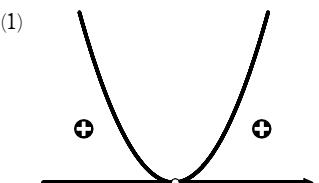
(1) $x^2 - 2x + 1 > 0$ (2) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$ (3) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
 (4) $4x^2 - 4x + 1 < 0$ (5) $3x^2 - 2x + 1 > 0$ (6) $-2x^2 - 3x - 7 \geq 0$

解答 (1) $x = 1$ 以外のすべての実数 (2) すべての実数 (3) $x = 3$
 (4) 解はない (5) すべての実数 (6) 解はない

解説

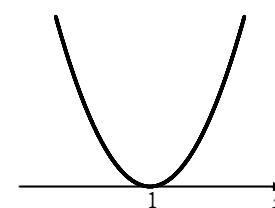
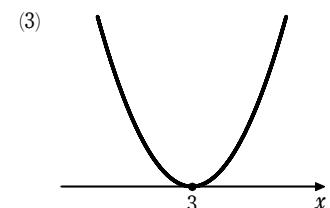
(1) $x^2 - 2x + 1 > 0$ $(x-1)^2 > 0$
よって、解は $x = 1$ 以外のすべての実数

(2) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$ $(x+2)^2 \geq 0$
よって、解は すべての実数

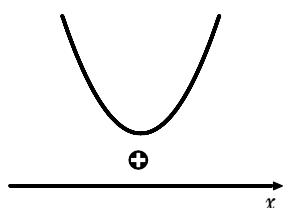


(3) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ $(x-3)^2 \leq 0$
 (4) $4x^2 - 4x + 1 < 0$ $(2x-1)^2 < 0$

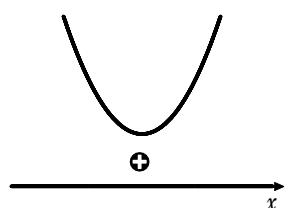
よって、解は $x = 3$
よって、解はない



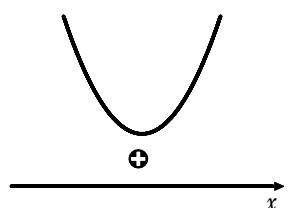
(3) $x^2 - 4x + 5 > 0$
 $(x-2)^2 + 1 > 0$
よって、解は すべての実数



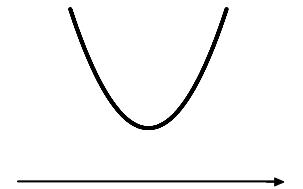
(4) $2x^2 + 8x + 9 > 0$
 $2(x+2)^2 + 1 > 0$
よって、解は すべての実数



(5) 両辺に -1 を掛けて $x^2 - 3x + 4 \geq 0$
 2次方程式 $x^2 - 3x + 4 = 0$ の判別式を D とすると
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7 < 0$
 x^2 の係数は正であるから、与えられた不等式の解は すべての実数



(6) 両辺に -1 を掛けて $3x^2 - 7x + 6 < 0$
 2次方程式 $3x^2 - 7x + 6 = 0$ の判別式を D とすると
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -23 < 0$
 x^2 の係数は正であるから、与えられた不等式の解はない



14 次の2次不等式を解け。

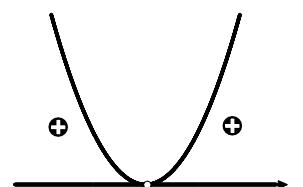
(1) $x^2 + 2x + 1 > 0$ (2) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ (3) $x^2 - 4x + 5 > 0$
 (4) $2x^2 + 8x + 9 > 0$ (5) $-x^2 + 3x - 4 \leq 0$ (6) $-3x^2 + 7x - 6 > 0$

解答 (1) $x = -1$ 以外のすべての実数 (2) $x = -2$ (3) すべての実数
 (4) すべての実数 (5) すべての実数 (6) 解はない

解説

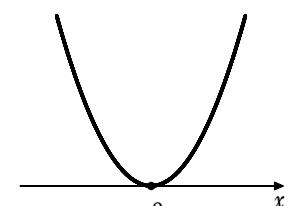
(1) $x^2 + 2x + 1 > 0$
 $(x+1)^2 > 0$

よって、解は
 $x = -1$ 以外のすべての実数



(2) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$
 $(x+2)^2 \leq 0$

よって、解は $x = -2$



15 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 - 7x + 10 > 0$ (2) $x^2 - 2x - 8 < 0$ (3) $x^2 + 5x \leq 0$

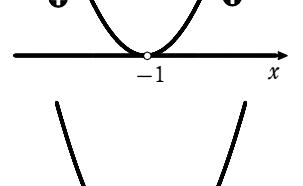
解答 (1) $x < 2, 5 < x$ (2) $-2 < x < 4$ (3) $-5 \leq x \leq 0$

解説 (1) $x^2 - 7x + 10 > 0$ から $(x-2)(x-5) > 0$

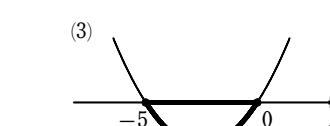
よって $x < 2, 5 < x$

(2) $x^2 - 2x - 8 < 0$ から $(x+2)(x-4) < 0$

よって $-2 < x < 4$



(3) $x^2 + 5x \leq 0$ から $x(x+5) \leq 0$
よって $-5 \leq x \leq 0$



(4) $4x^2 - 4x + 1 < 0$ $(2x-1)^2 < 0$

よって、解はない



16 次の2次不等式を解け。

- (1) $3x^2 - 7x + 2 < 0$ (2) $2x^2 - 7x - 4 \leq 0$ (3) $6x^2 - 7x - 3 > 0$
 (4) $x^2 - 4x + 2 > 0$ (5) $x^2 + 5x + 1 < 0$ (6) $2x^2 + 5x - 1 \geq 0$
 (7) $x^2 < 4$ (8) $x^2 - 18 > 0$ (9) $2x^2 - 9 \geq 0$

解答 (1) $\frac{1}{3} < x < 2$ (2) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ (3) $x < -\frac{1}{3}, \frac{3}{2} < x$
 (4) $x < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < x$ (5) $-\frac{5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$
 (6) $x \leq \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} \leq x$ (7) $-2 < x < 2$
 (8) $x < -3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} < x$ (9) $x \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x$

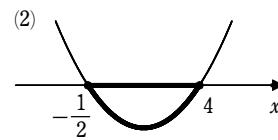
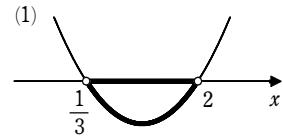
解説

(1) $3x^2 - 7x + 2 < 0$ から $(x-2)(3x-1) < 0$

よって $\frac{1}{3} < x < 2$

(2) $2x^2 - 7x - 4 \leq 0$ から $(x-4)(2x+1) \leq 0$

よって $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

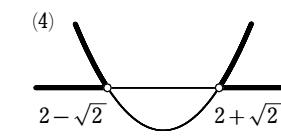
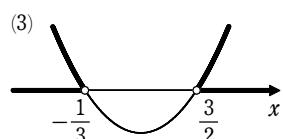


(3) $6x^2 - 7x - 3 > 0$ から $(2x-3)(3x+1) > 0$

よって $x < -\frac{1}{3}, \frac{3}{2} < x$

(4) $x^2 - 4x + 2 = 0$ を解くと $x = 2 \pm \sqrt{2}$

よって, $x^2 - 4x + 2 > 0$ の解は $x < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < x$

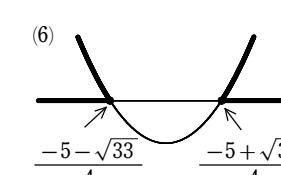
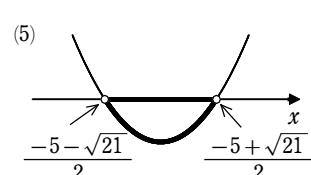


(5) $x^2 + 5x + 1 = 0$ を解くと $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

よって, $x^2 + 5x + 1 < 0$ の解は $\frac{-5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$

(6) $2x^2 + 5x - 1 = 0$ を解くと $x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$

よって, $2x^2 + 5x - 1 \geq 0$ の解は $x \leq \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} \leq x$



(7) 移項すると $x^2 - 4 < 0$

よって $(x+2)(x-2) < 0$

ゆえに $-2 < x < 2$

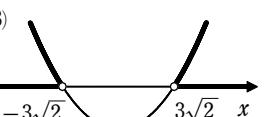
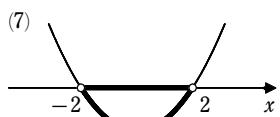
(8) $x^2 - 18 = 0$ から $x^2 = 18$

これを解くと $x = \pm 3\sqrt{2}$

よって, $x^2 - 18 > 0$ の解は $x < -3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} < x$

別解 $x^2 - 18 > 0$ から $(x+3\sqrt{2})(x-3\sqrt{2}) > 0$

よって $x < -3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} < x$



(9) $2x^2 - 9 = 0$ から $x^2 = \frac{9}{2}$

これを解くと $x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$

よって, $2x^2 - 9 \geq 0$ の解は

$x \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x$

別解 $2x^2 - 9 \geq 0$ から $2\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \geq 0$

よって $x \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x$

17 次の2次不等式を解け。

- (1) $-x^2 + 3x + 10 < 0$ (2) $3x - x^2 \geq 0$ (3) $-3x^2 + 6x - 2 \geq 0$

解答 (1) $x < -2, 5 < x$ (2) $0 \leq x \leq 3$ (3) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$

解説

(1) 両辺に -1 を掛けて $x^2 - 3x - 10 > 0$

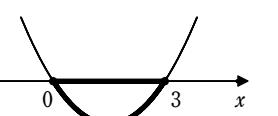
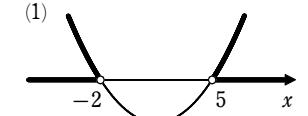
すなわち $(x+2)(x-5) > 0$

よって $x < -2, 5 < x$

(2) 両辺に -1 を掛けて $-3x + x^2 \leq 0$

すなわち $x(x-3) \leq 0$

よって $0 \leq x \leq 3$

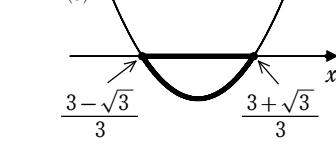


(3) 両辺に -1 を掛けて $3x^2 - 6x + 2 \leq 0$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$ を解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

よって, $3x^2 - 6x + 2 \leq 0$ の解は

$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$



18 次の2次不等式を解け。

- (1) $(x-1)^2 \leq 0$ (2) $(x+4)^2 \geq 0$ (3) $x^2 + 4x + 4 < 0$
 (4) $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ (5) $4x^2 - 12x + 9 > 0$ (6) $-x^2 - 8x - 16 > 0$
 (7) $-2\sqrt{2}x \geq x^2 + 2$ (8) $3(x-1)^2 - 12 \leq 6x^2 - (3+x)^2$

解答 (1) $x = 1$ (2) すべての実数 (3) 解はない (4) すべての実数

(5) $\frac{3}{2}$ 以外のすべての実数 (6) 解はない (7) $x = -\sqrt{2}$

(8) すべての実数

解説

(1) $(x-1)^2 \leq 0$ の解は $x = 1$

(2) $(x+4)^2 \geq 0$ の解は すべての実数



(3) $x^2 + 4x + 4 < 0$ から $(x+2)^2 < 0$

よって, 解はない。

(4) $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ から $(x-5)^2 \geq 0$

よって, 解は すべての実数



(5) $4x^2 - 12x + 9 > 0$ から $(2x-3)^2 > 0$

よって, 解は $\frac{3}{2}$ 以外のすべての実数

(6) 両辺に -1 を掛けて $x^2 + 8x + 16 < 0$

ゆえに $(x+4)^2 < 0$

よって, 解はない。



(7) 整理すると $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 \leq 0$

ゆえに $(x + \sqrt{2})^2 \leq 0$

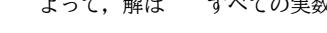
よって, 解は $x = -\sqrt{2}$

(8) 両辺を展開すると $3x^2 - 6x + 3 - 12 \leq 6x^2 - 9 - 6x - x^2$

整理すると $-2x^2 \leq 0$

両辺に $-\frac{1}{2}$ を掛けて $x^2 \geq 0$

よって, 解は すべての実数



19 次の2次不等式を解け。

- (1) $x^2 - 2x + 3 < 0$ (2) $2x^2 + 5x + 4 \geq 0$
 (3) $-x^2 + 3x - 5 < 0$ (4) $-2x \geq 3x^2 + 1$

解答 (1) 解はない (2) すべての実数 (3) すべての実数 (4) 解はない

解説

(1) $x^2 - 2x + 3 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$

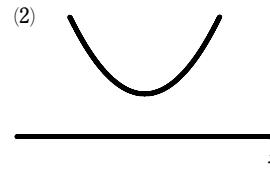
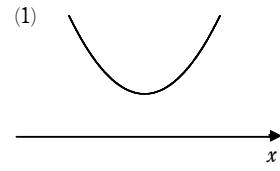
$x^2 - 2x + 3 < 0$ の x^2 の係数は正である。

よって、解はない。

(2) $2x^2 + 5x + 4 = 0$ の判別式を D とすると $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -7 < 0$

$2x^2 + 5x + 4 \geq 0$ の x^2 の係数は正である。

よって、解は すべての実数



(3) 両辺に -1 を掛けて $x^2 - 3x + 5 > 0$

$x^2 - 3x + 5 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$

$x^2 - 3x + 5 > 0$ の x^2 の係数は正である。

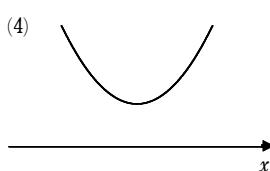
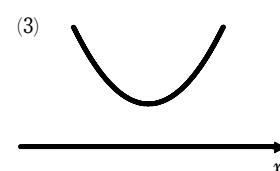
よって、解は すべての実数

(4) 整理すると $3x^2 + 2x + 1 \leq 0$

$3x^2 + 2x + 1 = 0$ の判別式を D とすると $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8 < 0$

$3x^2 + 2x + 1 \leq 0$ の x^2 の係数は正である。

よって、解はない。



20 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 + 7x + 6 \leq 0$

(2) $x^2 - 2x - 15 > 0$

(3) $2x^2 + x - 6 < 0$

(4) $-x^2 + 2x + 4 \leq 0$

(5) $x^2 - 12x + 36 > 0$

(6) $9x^2 + 24x + 16 \leq 0$

(7) $x^2 - x + 3 \geq 0$

(8) $-2x^2 - 6x - 5 > 0$

解説 (1) $-6 \leq x \leq -1$ (2) $x < -3, 5 < x$ (3) $-2 < x < \frac{3}{2}$

(4) $x \leq 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5} \leq x$ (5) 6以外のすべての実数 (6) $x = -\frac{4}{3}$

(7) すべての実数 (8) 解はない

解説

(1) $x^2 + 7x + 6 = 0$ を解くと $x = -6, -1$

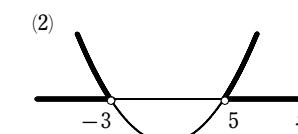
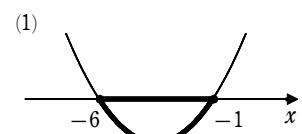
よって、 $x^2 + 7x + 6 \leq 0$ の解は $-6 \leq x \leq -1$

別解 $x^2 + 7x + 6 \leq 0$ から $(x+6)(x+1) \leq 0$ よって $-6 \leq x \leq -1$

(2) $x^2 - 2x - 15 = 0$ を解くと $x = -3, 5$

よって、 $x^2 - 2x - 15 > 0$ の解は $x < -3, 5 < x$

別解 $x^2 - 2x - 15 > 0$ から $(x+3)(x-5) > 0$ よって $x < -3, 5 < x$



(3) $2x^2 + x - 6 = 0$ を解くと $x = -2, \frac{3}{2}$

よって、 $2x^2 + x - 6 < 0$ の解は $-2 < x < \frac{3}{2}$

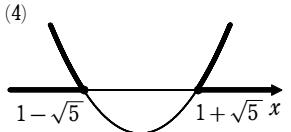
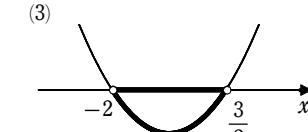
別解 $2x^2 + x - 6 < 0$ から $(x+2)(2x-3) < 0$

すなわち $2(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0$ よって $-2 < x < \frac{3}{2}$

(4) 両辺に -1 を掛けて $x^2 - 2x - 4 \geq 0$

$x^2 - 2x - 4 = 0$ を解くと $x = 1 \pm \sqrt{5}$

よって、与えられた不等式の解は $x \leq 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5} \leq x$

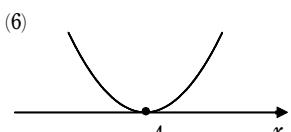
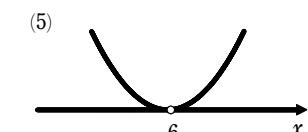


(5) $x^2 - 12x + 36 = 0$ を解くと $x = 6$ (重解)

よって、 $x^2 - 12x + 36 > 0$ の解は 6以外のすべての実数

(6) $9x^2 + 24x + 16 = 0$ を解くと $x = -\frac{4}{3}$ (重解)

よって、 $9x^2 + 24x + 16 \leq 0$ の解は $x = -\frac{4}{3}$



(7) $x^2 - x + 3 \geq 0$

2次方程式 $x^2 - x + 3 = 0$ の判別式を D とすると

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 < 0$

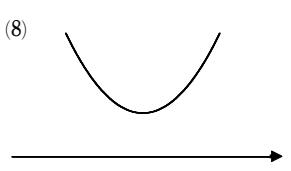
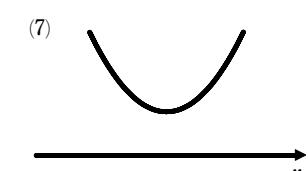
よって、与えられた不等式の解は、すべての実数。

(8) 両辺に -1 を掛けて $2x^2 + 6x + 5 < 0$

2次方程式 $2x^2 + 6x + 5 = 0$ の判別式を D とすると

$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -4 < 0$

よって、与えられた不等式の解はない。



参考 一般に、次のことが成り立つ。

$(x - \alpha)^2 > 0$ の解は α 以外のすべての実数

$(x - \alpha)^2 \geq 0$ の解は すべての実数

$(x - \alpha)^2 < 0$ の解は ない

$(x - \alpha)^2 \leq 0$ の解は $x = \alpha$

このことを利用して、(5), (6)を解いてよい。ただし、この場合もグラフを頭に思い浮かべて、解を考える。

(5) $x^2 - 12x + 36 > 0$ から $(x-6)^2 > 0$

よって、解は 6以外のすべての実数

(6) $9x^2 + 24x + 16 \leq 0$ から $(3x+4)^2 \leq 0$ すなわち $9\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 \leq 0$

よって、解は $x = -\frac{4}{3}$

21 次の2次不等式を解け。

(1) $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

(2) $6x^2 + x - 2 > 0$

(3) $x^2 - 4x + 1 \geq 0$

(4) $x^2 + 5x + 3 < 0$

(5) $2x^2 - 9 > 0$

(6) $-3x^2 + 6x - 2 \geq 0$

解説 (1) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

(2) $x < -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} < x$

(3) $x \leq 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} \leq x$

(4) $\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$

(5) $x < -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} < x$

(6) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$

解説

(1) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ を解くと $x = -\frac{1}{2}, 3$

よって、 $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$ の解は $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

別解 $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$ から $(2x+1)(x-3) \leq 0$

すなわち $2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3) \leq 0$ よって $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

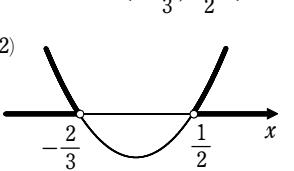
(2) $6x^2 + x - 2 = 0$ を解くと $x = -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

よって、 $6x^2 + x - 2 > 0$ の解は $x < -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} < x$

別解 $6x^2 + x - 2 > 0$ から $(3x+2)(2x-1) > 0$

すなわち $6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0$ よって $x < -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} < x$

(1)



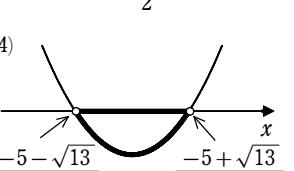
(3) $x^2 - 4x + 1 = 0$ を解くと $x = 2 \pm \sqrt{3}$

よって、 $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ の解は $x \leq 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} \leq x$

(4) $x^2 + 5x + 3 = 0$ を解くと $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

よって、 $x^2 + 5x + 3 < 0$ の解は $\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$

(3)



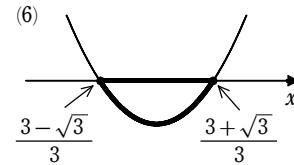
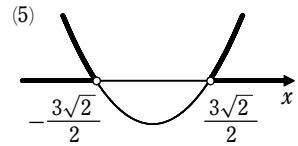
(5) $2x^2 - 9 = 0$ を解くと $x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$

よって、 $2x^2 - 9 > 0$ の解は $x < -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} < x$

(6) 両辺に -1 を掛けて $3x^2 - 6x + 2 \leq 0$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{よって, 与えられた不等式の解は } \frac{3-\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$



22 次の不等式を解け。

$$(1) (x-2)^2 > 2x-5$$

$$(2) 2(x^2+3) \leq x(x-4)$$

$$(3) (2x+1)^2 + 24 > (x+5)^2$$

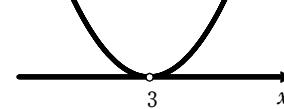
$$(4) \frac{(x-1)^2}{3} \geq \frac{(x-2)^2}{2} - 1$$

解答 (1) 3以外のすべての実数 (2) 解はない (3) $x < 0, 2 < x$
(4) $4-2\sqrt{3} \leq x \leq 4+2\sqrt{3}$

解説

$$(1) \text{ 左辺を展開すると } x^2 - 4x + 4 > 2x - 5$$

(1)



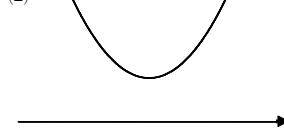
$$\text{整理すると } x^2 - 6x + 9 > 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \text{ を解くと } x = 3 \text{ (重解)}$$

よって, 与えられた不等式の解は
3以外のすべての実数

$$(2) \text{ 両辺を展開すると } 2x^2 + 6 \leq x^2 - 4x$$

(2)



$$\text{整理すると } x^2 + 4x + 6 \leq 0$$

$$\text{2次方程式 } x^2 + 4x + 6 = 0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると}$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -8 < 0$$

よって, 与えられた不等式の解はない。

$$(3) \text{ 両辺を展開すると } 4x^2 + 4x + 1 + 24 > x^2 + 10x + 25$$



$$\text{整理すると } 3x^2 - 6x > 0 \text{ すなわち } 3x(x-2) > 0$$

よって, 与えられた不等式の解は $x < 0, 2 < x$

$$(4) \text{ 両辺に } 6 \text{ を掛けて } 2(x-1)^2 \geq 3(x-2)^2 - 6$$

(4)

$$\text{よって } 2(x^2 - 2x + 1) \geq 3(x^2 - 4x + 4) - 6$$

$$\text{整理すると } x^2 - 8x + 4 \leq 0$$

$$x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ を解くと } x = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

よって, 与えられた不等式の解は

$$4-2\sqrt{3} \leq x \leq 4+2\sqrt{3}$$

23 次の2次不等式を解け。

$$(1) 7x - 13 - x^2 \leq 0$$

$$(2) 12(x-3) < x^2$$

$$(3) -x(3x-4) > 7$$

$$(4) 6(x^2-1) > 5x$$

$$(5) 3x^2 + x \geq 2x^2 + 1$$

$$(6) x^2 + 2\sqrt{6}x \leq -6$$

解答 (1) すべての実数 (2) 6以外のすべての実数 (3) 解はない

$$(4) x < -\frac{2}{3}, \frac{3}{2} < x \quad (5) x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x \quad (6) x = -\sqrt{6}$$

解説

$$(1) \text{ 整理すると } -x^2 + 7x - 13 \leq 0$$

$$\text{両辺に } -1 \text{ を掛けて } x^2 - 7x + 13 \geq 0$$

2次方程式 $x^2 - 7x + 13 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -3 < 0$$

x^2 の係数が正であるから, この2次不等式の解は すべての実数

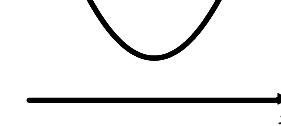
$$(2) \text{ 整理すると } -x^2 + 12x - 36 < 0$$

$$\text{両辺に } -1 \text{ を掛けて } x^2 - 12x + 36 > 0$$

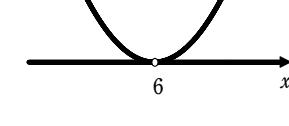
$$\text{ゆえに } (x-6)^2 > 0$$

よって, この2次不等式の解は 6以外のすべての実数

(1)



(2)



$$(3) \text{ 整理すると } -3x^2 + 4x - 7 > 0$$

$$\text{両辺に } -1 \text{ を掛けて } 3x^2 - 4x + 7 < 0$$

$$\text{2次方程式 } 3x^2 - 4x + 7 = 0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると}$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -68 < 0$$

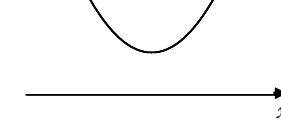
x^2 の係数が正であるから, この2次不等式の解はない。

$$(4) \text{ 整理すると } 6x^2 - 5x - 6 > 0$$

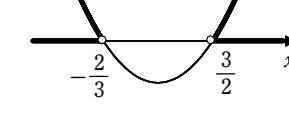
$$6x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ を解くと } x = -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$$

よって, この2次不等式の解は $x < -\frac{2}{3}, \frac{3}{2} < x$

(3)



(4)



$$(5) \text{ 整理すると } x^2 + x - 1 \geq 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

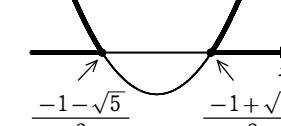
よって, この2次不等式の解は $x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x$

$$(6) \text{ 整理すると } x^2 + 2\sqrt{6}x + 6 \leq 0$$

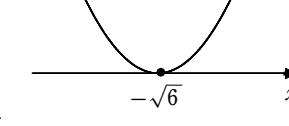
$$\text{ゆえに } (x+\sqrt{6})^2 \leq 0$$

よって, この2次不等式の解は $x = -\sqrt{6}$

(5)



(6)



解答 (1) $\frac{1}{2}$ 以外のすべての実数 (2) すべての実数 (3) 解はない

$$(4) x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5) 3 + \sqrt{6} < x \leq 7 \quad (6) \text{ 解はない}$$

解説

$$(1) \text{ 整理すると } 4x^2 - 4x + 1 > 0$$

$$\text{ゆえに } (2x-1)^2 > 0$$

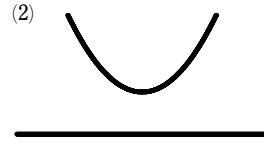
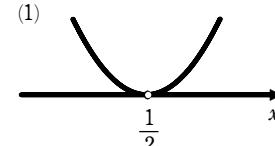
よって, この2次不等式の解は $\frac{1}{2}$ 以外のすべての実数

$$(2) \text{ 整理すると } 3x^2 - 6x + 10 > 0$$

$$\text{2次方程式 } 3x^2 - 6x + 10 = 0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると}$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = -84 < 0$$

x^2 の係数が正であるから, この2次不等式の解は すべての実数



$$(3) \text{ 整理すると } x^2 - \sqrt{5}x + 2 \leq 0$$

$$\text{2次方程式 } x^2 - \sqrt{5}x + 2 = 0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると}$$

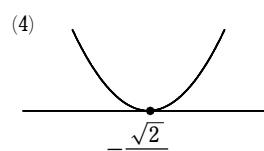
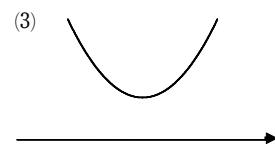
$$D = (-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -3 < 0$$

x^2 の係数が正であるから, この2次不等式の解はない。

$$(4) \text{ 整理すると } 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \leq 0$$

$$\text{ゆえに } (\sqrt{2}x+1)^2 \leq 0$$

よって, この2次不等式の解は $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$(5) x^2 - 8x + 7 \leq 0 \text{ から } (x-1)(x-7) \leq 0$$

よって $1 \leq x \leq 7 \dots \text{ ①}$

$$x^2 - 6x + 3 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 1 \cdot 3}}{1} = 3 \pm \sqrt{6}$$

よって, $x^2 - 6x + 3 > 0$ の解は

$$x < 3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6} < x \dots \text{ ②}$$

$3 - \sqrt{6} < 1 < 3 + \sqrt{6} < 7$ であるから, ①と②の共通範囲を求める

$$3 + \sqrt{6} < x \leq 7$$

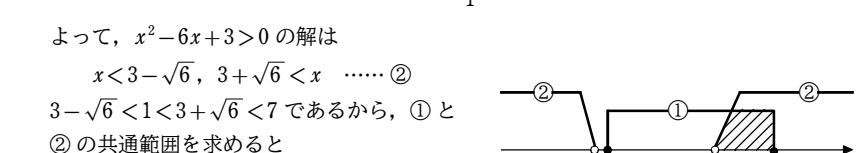
$$(6) 3 < x(4-x) \leq -x \text{ から } \begin{cases} 3 < x(4-x) \\ x(4-x) \leq -x \end{cases} \dots \text{ ①} \quad \dots \text{ ②}$$

$$\text{①から } x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$\text{ゆえに } (x-1)(x-3) < 0$$

よって $1 < x < 3 \dots \text{ ③}$

$$\text{②から } x^2 - 5x \geq 0$$



24 次の不等式を解け。

$$(1) -4x^2 < -4x + 1$$

$$(2) 3x(x-2) > -10$$

$$(3) \sqrt{5}x \geq x^2 + 2$$

$$(4) 2\sqrt{2}x + 1 \leq -2x^2$$

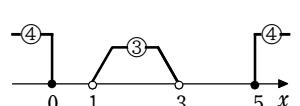
$$(5) \begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$(6) 3 < x(4-x) \leq -x$$

$$(1) \text{ 整理すると } -x^2 + 7x - 13 \leq 0$$

$$\text{両辺に } -1 \text{ を掛けて } x^2 - 7x + 13 \geq 0$$

ゆえに $x(x-5) \geq 0$
よって $x \leq 0, 5 \leq x \dots \dots \text{④}$
③と④の共通範囲はない。
したがって、この不等式の解はない。



25 次の2次不等式を解け。

$$(1) \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 > \frac{2x-5}{4} \quad (2) \frac{(x-1)^2}{3} \geq \frac{(x-2)^2}{2} - 1$$

解答 (1) 3以外のすべての実数 (2) $4-2\sqrt{3} \leq x \leq 4+2\sqrt{3}$

解説

$$(1) \text{ 左辺を展開すると } \frac{x^2}{4} - x + 1 > \frac{2x-5}{4}$$

$$\text{両辺を4倍して } x^2 - 4x + 4 > 2x - 5$$

$$\text{整理して } x^2 - 6x + 9 > 0$$

$$\text{ゆえに } (x-3)^2 > 0$$

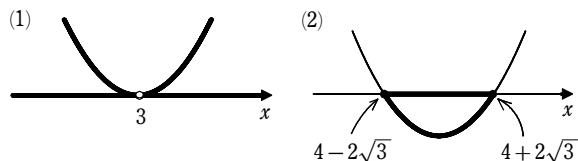
よって、この2次不等式の解は 3以外のすべての実数

$$(2) \text{ 両辺に6を掛けると } 2(x-1)^2 \geq 3(x-2)^2 - 6$$

$$\text{整理して } x^2 - 8x + 4 \leq 0$$

$$x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ を解くと } x = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

よって、この2次不等式の解は $4-2\sqrt{3} \leq x \leq 4+2\sqrt{3}$



26 次の2次不等式を解け。

$$(1) x^2 - 4x + 3 \leq 0 \quad (2) 4x^2 - 6x - 3 > 0 \quad (3) x^2 - 2x + 1 < 0$$

解答 (1) $1 \leq x \leq 3$ (2) $x < \frac{3-\sqrt{21}}{4}, \frac{3+\sqrt{21}}{4} < x$ (3) ない

解説

$$(1) \text{ 2次方程式 } x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ を解く。} (x-1)(x-3) = 0 \text{ から } x=1, 3$$

よって、この2次不等式の解は $1 \leq x \leq 3$

$$(2) \text{ 2次方程式 } 4x^2 - 6x - 3 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{4}$$

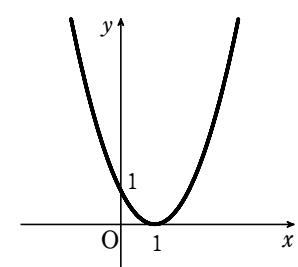
よって、この2次不等式の解は $x < \frac{3-\sqrt{21}}{4}, \frac{3+\sqrt{21}}{4} < x$

(3) 2次関数 $y = x^2 - 2x + 1$ すなわち $y = (x-1)^2$ のグラフは右の図のようになり、 x 軸と点(1, 0)で接している。

よって $x \neq 1$ のとき $y > 0$

$x = 1$ のとき $y = 0$

したがって、この2次不等式の解は ない



27 次の2次不等式を解け。

$$(1) 3x^2 - 17x + 10 \leq 0 \quad (2) 3x^2 - 5x + 1 < 0 \quad (3) 64x^2 - 176x + 121 > 0$$

解答 (1) $\frac{2}{3} \leq x \leq 5$ (2) $\frac{5-\sqrt{13}}{6} < x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}$ (3) $\frac{11}{8}$ 以外のすべての実数

解説

$$(1) \text{ 2次方程式 } 3x^2 - 17x + 10 = 0 \text{ を解く。} (3x-2)(x-5) = 0 \text{ から } x = \frac{2}{3}, 5$$

したがって、この2次不等式の解は $\frac{2}{3} \leq x \leq 5$

$$(2) \text{ 2次方程式 } 3x^2 - 5x + 1 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

よって、この2次不等式の解は $\frac{5-\sqrt{13}}{6} < x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}$

$$(3) \text{ 2次関数 } y = 64x^2 - 176x + 121$$

すなわち $y = (8x-11)^2$ のグラフは右の図のよう

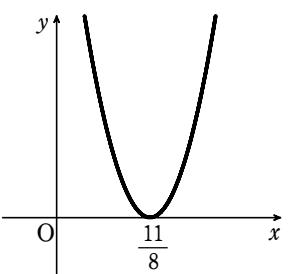
なり、 x 軸と点 $\left(\frac{11}{8}, 0\right)$ で接している。

よって $x \neq \frac{11}{8}$ のとき $y > 0$

$x = \frac{11}{8}$ のとき $y = 0$

したがって、この2次不等式の解は

$\frac{11}{8}$ 以外のすべての実数



28 次の2次不等式、連立不等式を解け。

$$(1) x^2 - 6x + 2 < 0 \quad (2) 2x^2 + 12x < 11x^2 + 4 \quad (3) \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ 3x^2 - 2x > 1 \end{cases}$$

解答 (1) $3 - \sqrt{7} < x < 3 + \sqrt{7}$ (2) $\frac{2}{3}$ 以外のすべての実数

(3) $-2 \leq x < -\frac{1}{3}, 1 < x \leq 2$

解説

$$(1) \text{ 2次方程式 } x^2 - 6x + 2 = 0 \text{ を解くと } x = 3 \pm \sqrt{7}$$

よって、この2次不等式の解は $3 - \sqrt{7} < x < 3 + \sqrt{7}$

$$(2) 2x^2 + 12x < 11x^2 + 4 \text{ から } 9x^2 - 12x + 4 > 0$$

2次関数 $y = 9x^2 - 12x + 4$ すなわち $y = (3x-2)^2$

グラフは右の図のようになり、 x 軸と点 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ で接している。

よって、 $x \neq \frac{2}{3}$ のとき $y > 0$,

$x = \frac{2}{3}$ のとき $y = 0$

したがって、この2次不等式の解は $\frac{2}{3}$ 以外のすべての実数

$$(3) x^2 \leq 4 \text{ から } x^2 - 4 \leq 0 \text{ すなわち } (x+2)(x-2) \leq 0$$

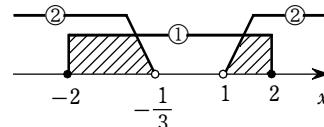
よって $-2 \leq x \leq 2 \dots \dots \text{①}$

$$3x^2 - 2x > 1 \text{ から } 3x^2 - 2x - 1 > 0 \text{ すなわち } (3x+1)(x-1) > 0$$

よって $x < -\frac{1}{3}, 1 < x \dots \dots \text{②}$

①と②の共通範囲を求めて

$$-2 \leq x < -\frac{1}{3}, 1 < x \leq 2$$



29 次の2次不等式、連立不等式を解け。

$$(1) 2x^2 > x + 6 \quad (2) \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq 0 \quad (3) \begin{cases} x^2 - 2x - 8 < 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}$$

解答 (1) $x < -\frac{3}{2}, 2 < x$ (2) $x = \frac{3}{2}$ (3) $-2 < x < -1, 2 < x < 4$

解説

$$(1) 2x^2 > x + 6 \text{ から } 2x^2 - x - 6 > 0$$

$$2 \text{次方程式 } 2x^2 - x - 6 = 0 \text{ を解くと } x = -\frac{3}{2}, 2$$

よって、この2次不等式の解は $x < -\frac{3}{2}, 2 < x$

$$(2) \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq 0 \text{ から } 4x^2 - 12x + 9 \leq 0$$

2次関数 $y = 4x^2 - 12x + 9$ すなわち $y = (2x-3)^2$ のグラフは右の図のようになり、 x 軸と点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ で接している。

よって $x \neq \frac{3}{2}$ のとき $y > 0$

$x = \frac{3}{2}$ のとき $y = 0$

したがって、この2次不等式の解は $x = \frac{3}{2}$

$$(3) x^2 - 2x - 8 < 0 \text{ から } (x+2)(x-4) < 0$$

よって $-2 < x < 4 \dots \dots \text{①}$

$$x^2 - x - 2 > 0 \text{ から } (x+1)(x-2) > 0$$

よって $x < -1, 2 < x \dots \dots \text{②}$

①と②の共通範囲を求めて $-2 < x < -1, 2 < x < 4$

