

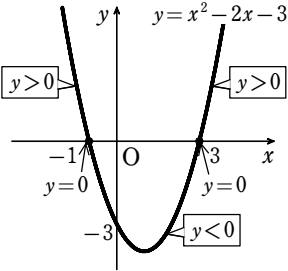
2次不等式クイズ

1 2次不等式 $x^2-2x-3>0$ などの解

2次関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフは右の図のようになり、 x 軸と異なる2点で交わる。

2つの交点の x 座標は、2次方程式 $x^2-2x-3=0$ の実数解で

$x=-1, 3$



右の図から

$y>0$ となる x の値の範囲は $x<-1, 3<x$

$y<0$ となる x の値の範囲は $-1<x<3$

ゆえに、次のことがわかる。

2次不等式 $x^2-2x-3>0$ の解は $x<-1, 3<x$

2次不等式 $x^2-2x-3<0$ の解は $-1<x<3$

解説

2 次の2次不等式を解け。

- (1) $(x-3)(x-5)>0$

(3) $x^2-7x+12<0$

(5) $x^2+5x+6\leq 0$
- (2) $(x+3)(x-2)\leq 0$

(4) $x^2+3x-4\geq 0$

(6) $x^2-4\geq 0$

解答 (1) $x<3, 5<x$ (2) $-3\leq x\leq 2$ (3) $3<x<4$ (4) $x\leq -4, 1\leq x$
(5) $-3\leq x\leq -2$ (6) $x\leq -2, 2\leq x$

解説

- (1) 2次方程式 $(x-3)(x-5)=0$ を解くと $x=3, 5$

よって、2次不等式 $(x-3)(x-5)>0$ の解は $x<3, 5<x$

(2) 2次方程式 $(x+3)(x-2)=0$ を解くと $x=-3, 2$

よって、2次不等式 $(x+3)(x-2)\leq 0$ の解は $-3\leq x\leq 2$

(3) 2次方程式 $x^2-7x+12=0$ を解くと $x=3, 4$

よって、2次不等式 $x^2-7x+12<0$ の解は $3<x<4$

(4) 2次方程式 $x^2+3x-4=0$ を解くと $x=-4, 1$

よって、2次不等式 $x^2+3x-4\geq 0$ の解は $x\leq -4, 1\leq x$

(5) 2次方程式 $x^2+5x+6=0$ を解くと $x=-3, -2$

よって、2次不等式 $x^2+5x+6\leq 0$ の解は $-3\leq x\leq -2$

(6) 2次方程式 $x^2-4=0$ を解くと $x=\pm 2$

よって、2次不等式 $x^2-4\geq 0$ の解は $x\leq -2, 2\leq x$

3 次の2次不等式を解け。

- (1) $3x^2+4x-4\leq 0$
- (2) $x^2-2x-2>0$

解答 (1) $-2\leq x\leq \frac{2}{3}$ (2) $x<1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}<x$

解説

(1) 2次方程式

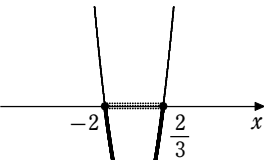
$3x^2+4x-4=0$

を解くと

$x=-2, \frac{2}{3}$

よって、この2次不等式の解は

$-2\leq x\leq \frac{2}{3}$



(2) 2次方程式

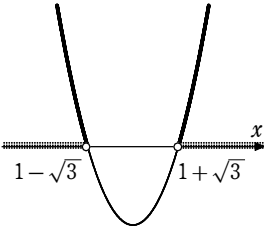
$x^2-2x-2=0$

を解くと

$x=1\pm\sqrt{3}$

よって、この2次不等式の解は

$x<1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}<x$



4 次の2次不等式を解け。

- (1) $2x^2-7x+3<0$

(3) $x^2+2x-1\leq 0$
- (2) $2x^2-3x-2\geq 0$

(4) $3x^2+x-1>0$

解答 (1) $\frac{1}{2}<x<3$ (2) $x\leq -\frac{1}{2}, 2\leq x$ (3) $-1-\sqrt{2}\leq x\leq -1+\sqrt{2}$
(4) $x<\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, \frac{-1+\sqrt{13}}{6}<x$

解説

- (1) 2次方程式 $2x^2-7x+3=0$ を解くと $x=\frac{1}{2}, 3$

よって、2次不等式 $2x^2-7x+3<0$ の解は

$\frac{1}{2}<x<3$

(2) 2次方程式 $2x^2-3x-2=0$ を解くと $x=-\frac{1}{2}, 2$

よって、2次不等式 $2x^2-3x-2\geq 0$ の解は

$x\leq -\frac{1}{2}, 2\leq x$

(3) 2次方程式 $x^2+2x-1=0$ を解くと $x=-1\pm\sqrt{2}$

よって、2次不等式 $x^2+2x-1\leq 0$ の解は

$-1-\sqrt{2}\leq x\leq -1+\sqrt{2}$

(4) 2次方程式 $3x^2+x-1=0$ を解くと $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$

よって、2次不等式 $3x^2+x-1>0$ の解は

$x<\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, \frac{-1+\sqrt{13}}{6}<x$

5 2次不等式 $-x^2+3x-2<0$ を解け。

解答 $x<1, 2<x$

解説

両辺に -1 を掛けて $x^2-3x+2>0$

2次方程式 $x^2-3x+2=0$ を解くと $x=1, 2$

よって、2次不等式 $x^2-3x+2>0$ の解は

$x<1, 2<x$

6 次の2次不等式を解け。

- (1) $-x^2+3x+1>0$
- (2) $-2x^2+6x-1\leq 0$

解答 (1) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (2) $x\leq \frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}\leq x$

解説

- (1) 両辺に -1 を掛けて $x^2-3x-1<0$

2次方程式 $x^2-3x-1=0$ を解くと $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

よって、2次不等式 $x^2-3x-1<0$ の解は

$\frac{3-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

(2) 両辺に -1 を掛けて $2x^2-6x+1\geq 0$

2次方程式 $2x^2-6x+1=0$ を解くと $x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$

よって、2次不等式 $2x^2-6x+1\geq 0$ の解は

$x\leq \frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}\leq x$

7 2次不等式 $x^2-2x+1>0$ などの解

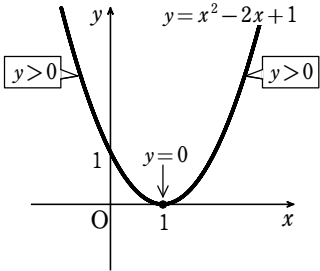
2次関数 $y=x^2-2x+1$

すなわち $y=(x-1)^2$

のグラフは右の図のようになり、 x 軸と点(1, 0)で接する。よって

$x\neq 1$ のとき $y>0$

$x=1$ のとき $y=0$



ゆえに、次のことがわかる。

2次不等式 $x^2-2x+1>0$ の解は 1以外のすべての実数

2次不等式 $x^2-2x+1\geq 0$ の解は すべての実数

2次不等式 $x^2-2x+1<0$ の解は ない

2次不等式 $x^2-2x+1\leq 0$ の解は $x=1$

解説

8 次の2次不等式を解け。

- (1) $x^2+6x+9>0$

(3) $4x^2-4x+1<0$
- (2) $x^2-8x+16\geq 0$

(4) $x^2-2\sqrt{3}x+3\leq 0$

解答 (1) -3 以外のすべての実数 (2) すべての実数 (3) 解はない
(4) $x=\sqrt{3}$

解説

- (1) 2次方程式 $x^2+6x+9=0$ の判別式を D とすると

$$D=6^2-4\cdot 1\cdot 9=0$$

2次方程式 $x^2+6x+9=0$ は重解 $x=-3$ をもつ。

2次不等式 $x^2+6x+9>0$ の x^2 の係数は正であるから、解は -3 以外のすべての実数

- (2) 2次方程式 $x^2-8x+16=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 16=0$$

2次不等式 $x^2-8x+16\geq 0$ の x^2 の係数は正であるから、解はすべての実数

- (3) 2次方程式 $4x^2-4x+1=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-4)^2-4\cdot 4\cdot 1=0$$

2次不等式 $4x^2-4x+1<0$ の x^2 の係数は正であるから、解はない。

- (4) 2次方程式 $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-2\sqrt{3})^2-4\cdot 1\cdot 3=0$$

2次方程式 $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$ は重解 $x=\sqrt{3}$ をもつ。

2次不等式 $x^2-2\sqrt{3}x+3\leq 0$ の x^2 の係数は正であるから、解は $x=\sqrt{3}$

- 別解 (1) 左辺を因数分解すると $(x+3)^2>0$

$$x+3\neq 0 \text{ ならば } (x+3)^2>0$$

$$x+3=0 \text{ ならば } (x+3)^2=0$$

が成り立つ。

よって、解は -3 以外のすべての実数

- (2) 左辺を因数分解すると $(x-4)^2\geq 0$

この不等式は常に成り立つ。

よって、解は すべての実数

- (3) 左辺を因数分解すると $(2x-1)^2<0$

常に $(2x-1)^2\geq 0$ であるから、 $(2x-1)^2<0$ を成り立たせる実数 x は存在しない。

よって、解はない。

- (4) 左辺を因数分解すると $(x-\sqrt{3})^2\leq 0$

$$x-\sqrt{3}\neq 0 \text{ ならば } (x-\sqrt{3})^2>0$$

$$x-\sqrt{3}=0 \text{ ならば } (x-\sqrt{3})^2=0$$

が成り立つ。

よって、解は $x=\sqrt{3}$

- 9 2次不等式 $x^2-2x+2>0$ などの解

2次関数 $y=x^2-2x+2$

すなわち $y=(x-1)^2+1$

のグラフは右の図のようになり、 x 軸より上側にある。

よって

$$\text{常に } y>0$$

ゆえに、次のことがわかる。

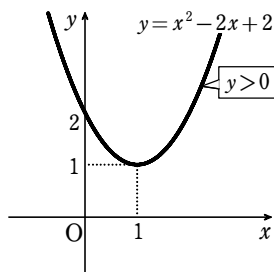
2次不等式 $x^2-2x+2>0$ の解は すべての実数

2次不等式 $x^2-2x+2\geq 0$ の解は すべての実数

2次不等式 $x^2-2x+2<0$ の解は ない

2次不等式 $x^2-2x+2\leq 0$ の解は ない

解説



- 10 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2+6x+10>0$

(2) $2x^2-4x+3\geq 0$

(3) $x^2-4x+5<0$

(4) $2x^2+3x+4\leq 0$

解答 (1) すべての実数 (2) すべての実数 (3) 解はない (4) 解はない

解説

- (1) 2次方程式 $x^2+6x+10=0$ の判別式を D とすると

$$D=6^2-4\cdot 1\cdot 10=-4<0$$

2次不等式 $x^2+6x+10>0$ の x^2 の係数は正であるから、解はすべての実数

- (2) 2次方程式 $2x^2-4x+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-4)^2-4\cdot 2\cdot 3=-8<0$$

2次不等式 $2x^2-4x+3\geq 0$ の x^2 の係数は正であるから、解はすべての実数

- (3) 2次方程式 $x^2-4x+5=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 5=-4<0$$

2次不等式 $x^2-4x+5<0$ の x^2 の係数は正であるから、解はない。

- (4) 2次方程式 $2x^2+3x+4=0$ の判別式を D とすると

$$D=3^2-4\cdot 2\cdot 4=-23<0$$

2次不等式 $2x^2+3x+4\leq 0$ の x^2 の係数は正であるから、解はない。

- 別解 (1) 左辺を変形すると $(x+3)^2+1>0$

この不等式は常に成り立つ。

よって、解は すべての実数

- (2) 左辺を変形すると $2(x-1)^2+1\geq 0$

この不等式は常に成り立つ。

よって、解は すべての実数

- (3) 左辺を変形すると $(x-2)^2+1<0$

常に $(x-2)^2+1>0$ であるから、 $(x-2)^2+1<0$ を成り立たせる実数 x は存在しない。

よって、解はない。

- (4) 左辺を変形すると $2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}\leq 0$

常に $2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}>0$ であるから、 $2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}\leq 0$ を成り立たせる実数 x は存在しない。

よって、解はない。

- 11 次の2次不等式を解け。

(1) $x(x+2)>0$

(2) $2x^2-5x-3\leq 0$

(3) $x^2-6x-1\geq 0$

(4) $x+6<x^2$

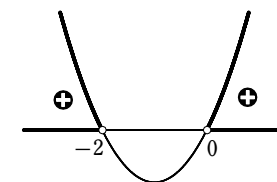
(5) $-x^2+5x-6>0$

解答 (1) $x<-2, 0<x$ (2) $-\frac{1}{2}\leq x\leq 3$ (3) $x\leq 3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}\leq x$

(4) $x<-2, 3<x$ (5) $2<x<3$

解説

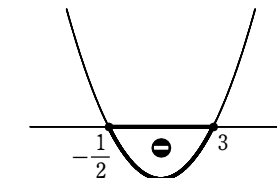
- (1) $x(x+2)>0$ から $x<-2, 0<x$



- (2) 不等式の左辺を因数分解して

$$(2x+1)(x-3)\leq 0$$

$$\text{よって } -\frac{1}{2}\leq x\leq 3$$

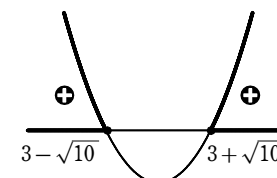


- (3) $x^2-6x-1=0$ を解くと

$$x=3\pm\sqrt{10}$$

よって、 $x^2-6x-1\geq 0$ の解は

$$x\leq 3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}\leq x$$

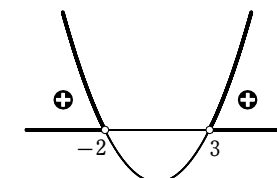


- (4) 不等式を変形すると

$$x^2-x-6>0$$

$$\text{ゆえに } (x+2)(x-3)>0$$

$$\text{よって } x<-2, 3<x$$

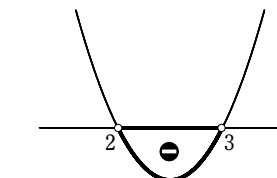


- (5) 両辺に -1 を掛けて

$$x^2-5x+6<0$$

$$\text{ゆえに } (x-2)(x-3)<0$$

$$\text{よって } 2<x<3$$



- 12 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2-3<0$

(2) $x^2-6x+8\geq 0$

(3) $3x^2+20x-7>0$

(4) $x^2-7x+5\leq 0$

(5) $5x>3(4x^2-1)$

(6) $-5x^2-2x+1<0$

解答 (1) $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ (2) $x\leq 2, 4\leq x$ (3) $x<-7, \frac{1}{3}<x$

(4) $\frac{7-\sqrt{29}}{2}\leq x\leq \frac{7+\sqrt{29}}{2}$ (5) $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{4}$

(6) $x<\frac{-1-\sqrt{6}}{5}, \frac{-1+\sqrt{6}}{5}<x$

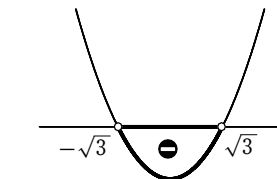
解説

- (1) $x^2-3=0$ を解くと $x=\pm\sqrt{3}$

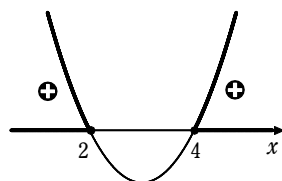
よって、解は $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

- 別解 不等式から $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})<0$

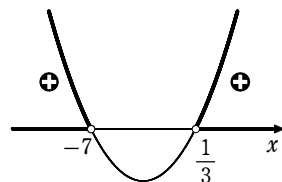
よって、解は $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$



(2) 不等式から $(x-2)(x-4) \geq 0$
 よって、解は $x \leq 2, 4 \leq x$



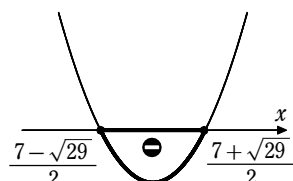
(3) 不等式は $(x+7)(3x-1) > 0$
 よって、解は $x < -7, \frac{1}{3} < x$



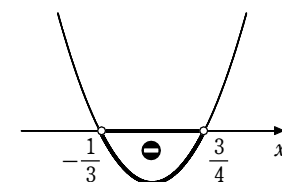
(4) $x^2 - 7x + 5 = 0$ を解くと

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}$$

 よって、解は $\frac{7 - \sqrt{29}}{2} \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$



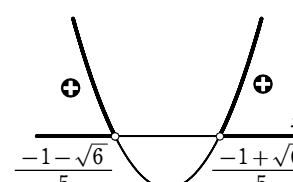
(5) 展開して整理すると $12x^2 - 5x - 3 < 0$
 左辺を因数分解して $(3x+1)(4x-3) < 0$
 よって、解は $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{4}$



(6) 両辺に -1 を掛けて $5x^2 + 2x - 1 > 0$
 $5x^2 + 2x - 1 = 0$ を解くと

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 5 \cdot (-1)}}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$$

 よって、解は $x < \frac{-1 - \sqrt{6}}{5}, \frac{-1 + \sqrt{6}}{5} < x$



[13] 次の2次不等式を解け。

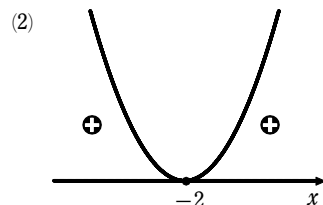
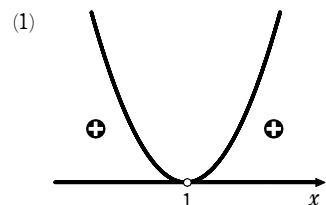
- (1) $x^2 - 2x + 1 > 0$ (2) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$ (3) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
 (4) $4x^2 - 4x + 1 < 0$ (5) $3x^2 - 2x + 1 > 0$ (6) $-2x^2 - 3x - 7 \geq 0$

解答 (1) $x=1$ 以外のすべての実数 (2) すべての実数 (3) $x=3$
 (4) 解はない (5) すべての実数 (6) 解はない

解説

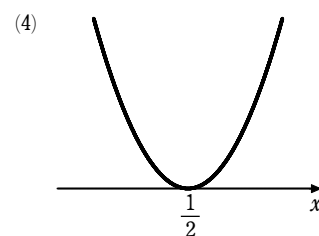
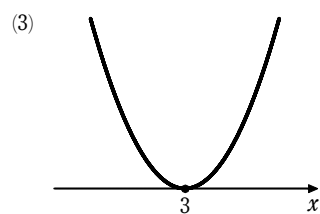
(1) $x^2 - 2x + 1 > 0$ $(x-1)^2 > 0$
 よって、解は $x=1$ 以外のすべての実数

(2) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$ $(x+2)^2 \geq 0$
 よって、解は すべての実数



(3) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ $(x-3)^2 \leq 0$
 (4) $4x^2 - 4x + 1 < 0$ $(2x-1)^2 < 0$

よって、解は $x=3$
 よって、解はない



(5) 2次方程式 $3x^2 - 2x + 1 = 0$ の判別式を D とすると $\frac{D}{4} = (-1)^2 - 3 \cdot 1 = -2 < 0$
 x^2 の係数は正であるから、与えられた不等式の解は すべての実数

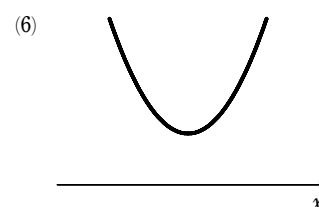
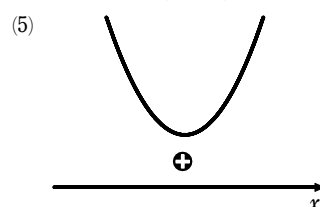
別解 $3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0$ となるから、解は すべての実数

(6) 不等式の両辺に -1 を掛けて $2x^2 + 3x + 7 \leq 0$ …… ①
 2次方程式 $2x^2 + 3x + 7 = 0$ の判別式を D とすると $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -47 < 0$

①の x^2 の係数は正であるから、与えられた不等式の解はない

別解 ①を導くまでは同じ)

$2x^2 + 3x + 7 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{47}{8} > 0$ となるから、解はない。



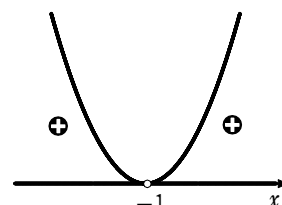
[14] 次の2次不等式を解け。

- (1) $x^2 + 2x + 1 > 0$ (2) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ (3) $x^2 - 4x + 5 > 0$
 (4) $2x^2 + 8x + 9 > 0$ (5) $-x^2 + 3x - 4 \leq 0$ (6) $-3x^2 + 7x - 6 > 0$

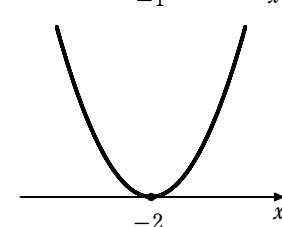
解答 (1) $x=-1$ 以外のすべての実数 (2) $x=-2$ (3) すべての実数
 (4) すべての実数 (5) すべての実数 (6) 解はない

解説

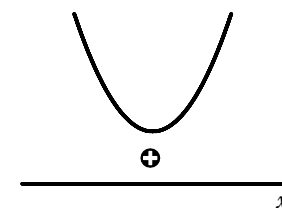
(1) $x^2 + 2x + 1 > 0$
 $(x+1)^2 > 0$
 よって、解は $x=-1$ 以外のすべての実数



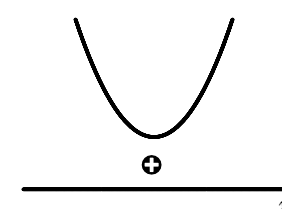
(2) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$
 $(x+2)^2 \leq 0$
 よって、解は $x=-2$



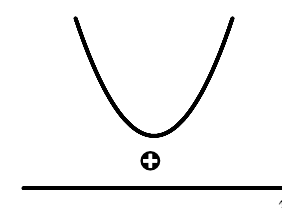
(3) $x^2 - 4x + 5 > 0$
 $(x-2)^2 + 1 > 0$
 よって、解は すべての実数



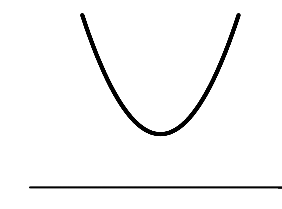
(4) $2x^2 + 8x + 9 > 0$
 $2(x+2)^2 + 1 > 0$
 よって、解は すべての実数



(5) 両辺に -1 を掛けて $x^2 - 3x + 4 \geq 0$
 2次方程式 $x^2 - 3x + 4 = 0$ の判別式を D とすると
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7 < 0$
 x^2 の係数は正であるから、与えられた不等式の解は すべての実数



(6) 両辺に -1 を掛けて $3x^2 - 7x + 6 < 0$
 2次方程式 $3x^2 - 7x + 6 = 0$ の判別式を D とすると
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -23 < 0$
 x^2 の係数は正であるから、与えられた不等式の解はない



[15] 次の2次不等式を解け。

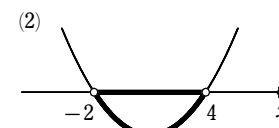
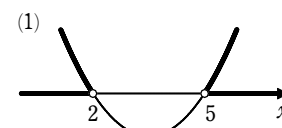
- (1) $x^2 - 7x + 10 > 0$ (2) $x^2 - 2x - 8 < 0$ (3) $x^2 + 5x \leq 0$

解答 (1) $x < 2, 5 < x$ (2) $-2 < x < 4$ (3) $-5 \leq x \leq 0$

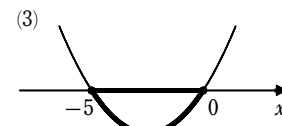
解説

(1) $x^2 - 7x + 10 > 0$ から $(x-2)(x-5) > 0$
 よって $x < 2, 5 < x$

(2) $x^2 - 2x - 8 < 0$ から $(x+2)(x-4) < 0$
 よって $-2 < x < 4$



(3) $x^2 + 5x \leq 0$ から $x(x+5) \leq 0$
 よって $-5 \leq x \leq 0$



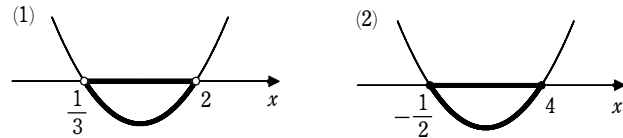
16 次の2次不等式を解け。

- (1) $3x^2 - 7x + 2 < 0$ (2) $2x^2 - 7x - 4 \leq 0$ (3) $6x^2 - 7x - 3 > 0$
 (4) $x^2 - 4x + 2 > 0$ (5) $x^2 + 5x + 1 < 0$ (6) $2x^2 + 5x - 1 \geq 0$
 (7) $x^2 < 4$ (8) $x^2 - 18 > 0$ (9) $2x^2 - 9 \geq 0$

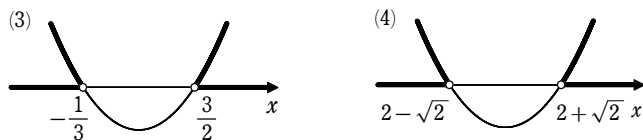
- 【解答】 (1) $\frac{1}{3} < x < 2$ (2) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ (3) $x < -\frac{1}{3}, \frac{3}{2} < x$
 (4) $x < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < x$ (5) $\frac{-5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$
 (6) $x \leq \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} \leq x$ (7) $-2 < x < 2$
 (8) $x < -3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} < x$ (9) $x \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x$

【解説】

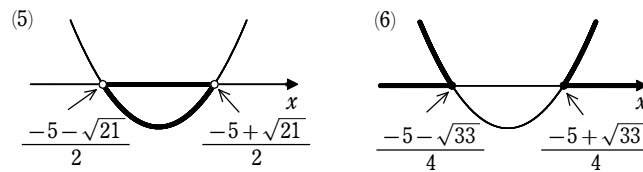
- (1) $3x^2 - 7x + 2 < 0$ から $(x-2)(3x-1) < 0$
 よって $\frac{1}{3} < x < 2$
 (2) $2x^2 - 7x - 4 \leq 0$ から $(x-4)(2x+1) \leq 0$
 よって $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$



- (3) $6x^2 - 7x - 3 > 0$ から $(2x-3)(3x+1) > 0$
 よって $x < -\frac{1}{3}, \frac{3}{2} < x$
 (4) $x^2 - 4x + 2 = 0$ を解くと $x = 2 \pm \sqrt{2}$
 よって、 $x^2 - 4x + 2 > 0$ の解は $x < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < x$

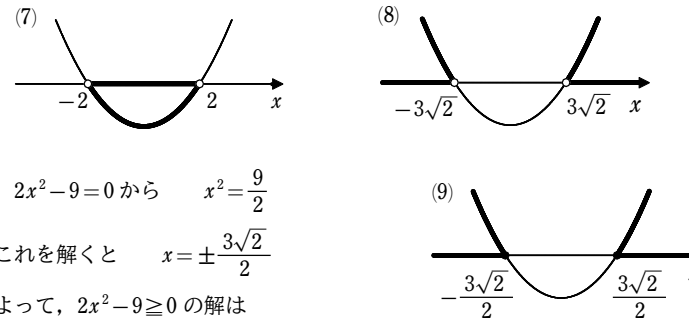


- (5) $x^2 + 5x + 1 = 0$ を解くと $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$
 よって、 $x^2 + 5x + 1 < 0$ の解は $\frac{-5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$
 (6) $2x^2 + 5x - 1 = 0$ を解くと $x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$
 よって、 $2x^2 + 5x - 1 \geq 0$ の解は $x \leq \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} \leq x$



- (7) 移項すると $x^2 - 4 < 0$
 よって $(x+2)(x-2) < 0$
 ゆえに $-2 < x < 2$
 (8) $x^2 - 18 = 0$ から $x^2 = 18$

これを解くと $x = \pm 3\sqrt{2}$
 よって、 $x^2 - 18 > 0$ の解は $x < -3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} < x$
 【別解】 $x^2 - 18 > 0$ から $(x+3\sqrt{2})(x-3\sqrt{2}) > 0$
 よって $x < -3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} < x$



- (9) $2x^2 - 9 = 0$ から $x^2 = \frac{9}{2}$
 これを解くと $x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$
 よって、 $2x^2 - 9 \geq 0$ の解は $x \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x$
 【別解】 $2x^2 - 9 \geq 0$ から $2\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \geq 0$
 よって $x \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x$

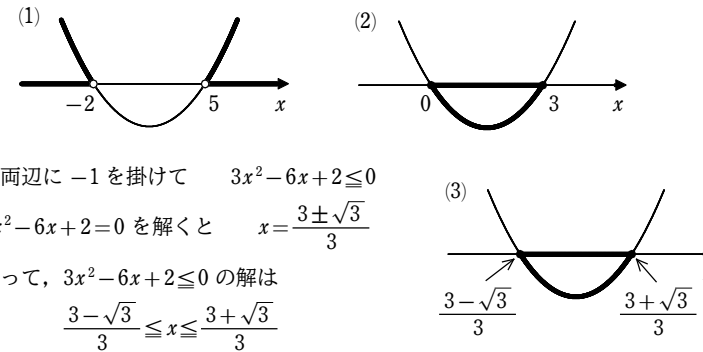
17 次の2次不等式を解け。

- (1) $-x^2 + 3x + 10 < 0$ (2) $3x - x^2 \geq 0$ (3) $-3x^2 + 6x - 2 \geq 0$

- 【解答】 (1) $x < -2, 5 < x$ (2) $0 \leq x \leq 3$ (3) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$

【解説】

- (1) 両辺に -1 を掛けて $x^2 - 3x - 10 > 0$
 すなわち $(x+2)(x-5) > 0$
 よって $x < -2, 5 < x$
 (2) 両辺に -1 を掛けて $-3x + x^2 \leq 0$
 すなわち $x(x-3) \leq 0$
 よって $0 \leq x \leq 3$



- (3) 両辺に -1 を掛けて $3x^2 - 6x + 2 \leq 0$
 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ を解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$
 よって、 $3x^2 - 6x + 2 \leq 0$ の解は $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$

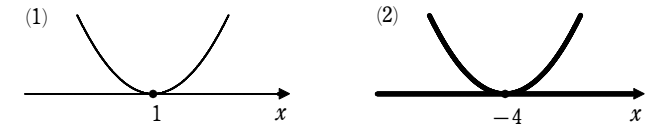
18 次の2次不等式を解け。

- (1) $(x-1)^2 \leq 0$ (2) $(x+4)^2 \geq 0$ (3) $x^2 + 4x + 4 < 0$
 (4) $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ (5) $4x^2 - 12x + 9 > 0$ (6) $-x^2 - 8x - 16 > 0$
 (7) $-2\sqrt{2}x \geq x^2 + 2$ (8) $3(x-1)^2 - 12 \leq 6x^2 - (3+x)^2$

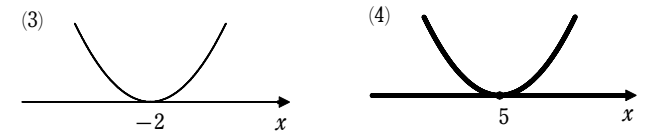
- 【解答】 (1) $x=1$ (2) すべての実数 (3) 解はない (4) すべての実数
 (5) $\frac{3}{2}$ 以外のすべての実数 (6) 解はない (7) $x = -\sqrt{2}$
 (8) すべての実数

【解説】

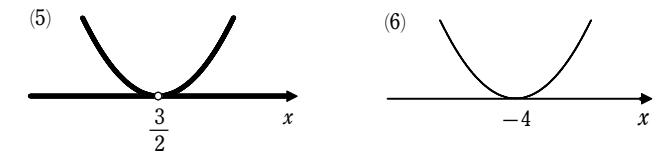
- (1) $(x-1)^2 \leq 0$ の解は $x=1$
 (2) $(x+4)^2 \geq 0$ の解は すべての実数



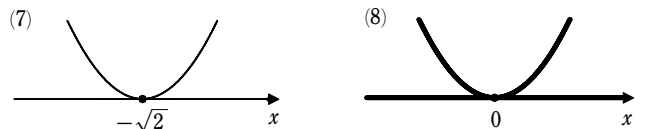
- (3) $x^2 + 4x + 4 < 0$ から $(x+2)^2 < 0$
 よって、解はない。
 (4) $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ から $(x-5)^2 \geq 0$
 よって、解は すべての実数



- (5) $4x^2 - 12x + 9 > 0$ から $(2x-3)^2 > 0$
 よって、解は $\frac{3}{2}$ 以外のすべての実数
 (6) 両辺に -1 を掛けて $x^2 + 8x + 16 < 0$
 ゆえに $(x+4)^2 < 0$
 よって、解はない。



- (7) 整理すると $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 \leq 0$
 ゆえに $(x + \sqrt{2})^2 \leq 0$
 よって、解は $x = -\sqrt{2}$
 (8) 両辺を展開すると $3x^2 - 6x + 3 - 12 \leq 6x^2 - 9 - 6x - x^2$
 整理すると $-2x^2 \leq 0$
 両辺に $-\frac{1}{2}$ を掛けて $x^2 \geq 0$
 よって、解は すべての実数



19 次の2次不等式を解け。

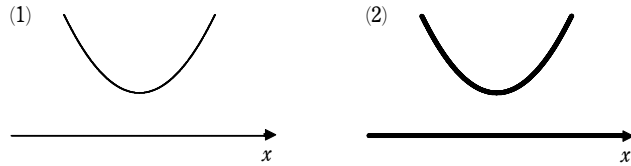
- (1) $x^2 - 2x + 3 < 0$ (2) $2x^2 + 5x + 4 \geq 0$
 (3) $-x^2 + 3x - 5 < 0$ (4) $-2x \geq 3x^2 + 1$

- 【解答】 (1) 解はない (2) すべての実数 (3) すべての実数 (4) 解はない

解説

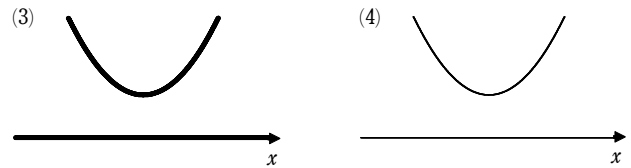
(1) $x^2-2x+3=0$ の判別式を D とすると $D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 3=-8<0$
 $x^2-2x+3<0$ の x^2 の係数は正である。
 よって、解はない。

(2) $2x^2+5x+4=0$ の判別式を D とすると $D=5^2-4\cdot 2\cdot 4=-7<0$
 $2x^2+5x+4\geq 0$ の x^2 の係数は正である。
 よって、解は すべての実数



(3) 両辺に -1 を掛けて $x^2-3x+5>0$
 $x^2-3x+5=0$ の判別式を D とすると $D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 5=-11<0$
 $x^2-3x+5>0$ の x^2 の係数は正である。
 よって、解は すべての実数

(4) 整理すると $3x^2+2x+1\leq 0$
 $3x^2+2x+1=0$ の判別式を D とすると $D=2^2-4\cdot 3\cdot 1=-8<0$
 $3x^2+2x+1\leq 0$ の x^2 の係数は正である。
 よって、解はない。



20 次の2次不等式を解け。

- (1) $x^2+7x+6\leq 0$ (2) $x^2-2x-15>0$ (3) $2x^2+x-6<0$
 (4) $-x^2+2x+4\leq 0$ (5) $x^2-12x+36>0$ (6) $9x^2+24x+16\leq 0$
 (7) $x^2-x+3\geq 0$ (8) $-2x^2-6x-5>0$

解答 (1) $-6\leq x\leq -1$ (2) $x<-3, 5<x$ (3) $-2<x<\frac{3}{2}$
 (4) $x\leq 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\leq x$ (5) 6 以外のすべての実数 (6) $x=-\frac{4}{3}$
 (7) すべての実数 (8) 解はない

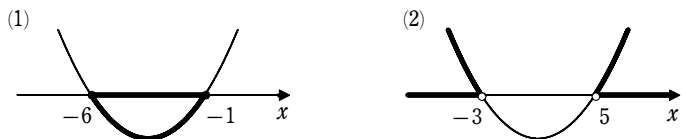
解説

(1) $x^2+7x+6=0$ を解くと $x=-6, -1$
 よって、 $x^2+7x+6\leq 0$ の解は $-6\leq x\leq -1$

別解 $x^2+7x+6\leq 0$ から $(x+6)(x+1)\leq 0$ よって $-6\leq x\leq -1$

(2) $x^2-2x-15=0$ を解くと $x=-3, 5$
 よって、 $x^2-2x-15>0$ の解は $x<-3, 5<x$

別解 $x^2-2x-15>0$ から $(x+3)(x-5)>0$ よって $x<-3, 5<x$



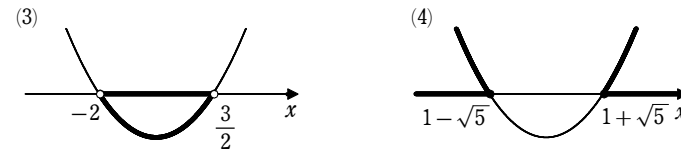
(3) $2x^2+x-6=0$ を解くと $x=-2, \frac{3}{2}$

よって、 $2x^2+x-6<0$ の解は $-2<x<\frac{3}{2}$

別解 $2x^2+x-6<0$ から $(x+2)(2x-3)<0$

すなわち $2(x+2)(x-\frac{3}{2})<0$ よって $-2<x<\frac{3}{2}$

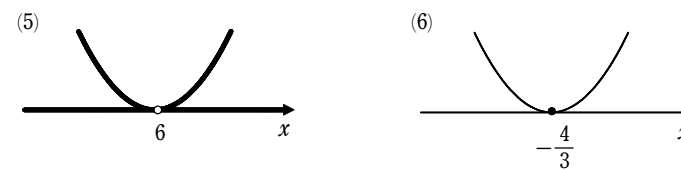
(4) 両辺に -1 を掛けて $x^2-2x-4\geq 0$
 $x^2-2x-4=0$ を解くと $x=1\pm\sqrt{5}$
 よって、与えられた不等式の解は $x\leq 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\leq x$



(5) $x^2-12x+36=0$ を解くと $x=6$ (重解)
 よって、 $x^2-12x+36>0$ の解は 6 以外のすべての実数

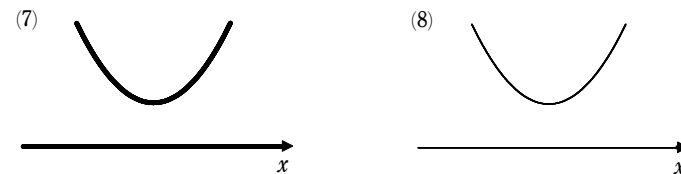
(6) $9x^2+24x+16=0$ を解くと $x=-\frac{4}{3}$ (重解)

よって、 $9x^2+24x+16\leq 0$ の解は $x=-\frac{4}{3}$



(7) $x^2-x+3\geq 0$
 2次方程式 $x^2-x+3=0$ の判別式を D とすると
 $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 3=-11<0$
 よって、与えられた不等式の解は、すべての実数。

(8) 両辺に -1 を掛けて $2x^2+6x+5<0$
 2次方程式 $2x^2+6x+5=0$ の判別式を D とすると
 $D=6^2-4\cdot 2\cdot 5=-4<0$
 よって、与えられた不等式の解はない。



参考 一般に、次のことが成り立つ。

$(x-\alpha)^2>0$ の解は α 以外のすべての実数

$(x-\alpha)^2\geq 0$ の解は すべての実数

$(x-\alpha)^2<0$ の解は ない

$(x-\alpha)^2\leq 0$ の解は $x=\alpha$

このことを利用して、(5)、(6)を解いてもよい。ただし、この場合もグラフを頭に思い浮かべて、解を考える。

(5) $x^2-12x+36>0$ から $(x-6)^2>0$
 よって、解は 6 以外のすべての実数

(6) $9x^2+24x+16\leq 0$ から $(3x+4)^2\leq 0$ すなわち $9(x+\frac{4}{3})^2\leq 0$

よって、解は $x=-\frac{4}{3}$

21 次の2次不等式を解け。

- (1) $2x^2-5x-3\leq 0$ (2) $6x^2+x-2>0$ (3) $x^2-4x+1\geq 0$
 (4) $x^2+5x+3<0$ (5) $2x^2-9>0$ (6) $-3x^2+6x-2\geq 0$

解答 (1) $-\frac{1}{2}\leq x\leq 3$ (2) $x<-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}<x$ (3) $x\leq 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\leq x$
 (4) $\frac{-5-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$ (5) $x<-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}<x$
 (6) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}\leq x\leq \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

解説

(1) $2x^2-5x-3=0$ を解くと $x=-\frac{1}{2}, 3$

よって、 $2x^2-5x-3\leq 0$ の解は $-\frac{1}{2}\leq x\leq 3$

別解 $2x^2-5x-3\leq 0$ から $(2x+1)(x-3)\leq 0$

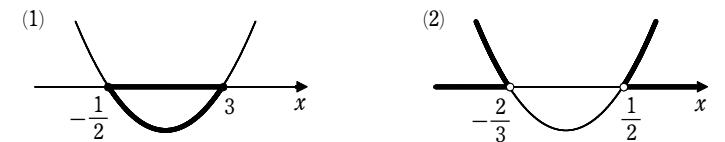
すなわち $2(x+\frac{1}{2})(x-3)\leq 0$ よって $-\frac{1}{2}\leq x\leq 3$

(2) $6x^2+x-2=0$ を解くと $x=-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

よって、 $6x^2+x-2>0$ の解は $x<-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}<x$

別解 $6x^2+x-2>0$ から $(3x+2)(2x-1)>0$

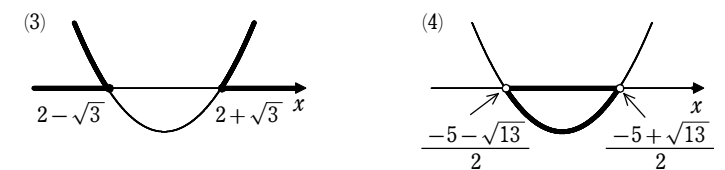
すなわち $6(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{2})>0$ よって $x<-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}<x$



(3) $x^2-4x+1=0$ を解くと $x=2\pm\sqrt{3}$
 よって、 $x^2-4x+1\geq 0$ の解は $x\leq 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\leq x$

(4) $x^2+5x+3=0$ を解くと $x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

よって、 $x^2+5x+3<0$ の解は $\frac{-5-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$



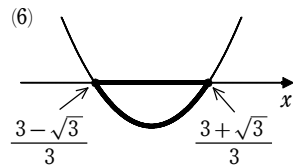
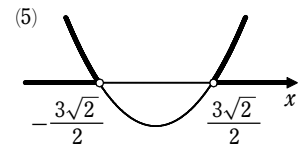
(5) $2x^2-9=0$ を解くと $x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

よって、 $2x^2-9>0$ の解は $x<-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}<x$

(6) 両辺に -1 を掛けて $3x^2-6x+2\leq 0$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{よって、与えられた不等式の解は } \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$



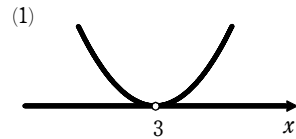
22 次の不等式を解け。

- (1) $(x-2)^2 > 2x-5$ (2) $2(x^2+3) \leq x(x-4)$
 (3) $(2x+1)^2 + 24 > (x+5)^2$ (4) $\frac{(x-1)^2}{3} \geq \frac{(x-2)^2}{2} - 1$

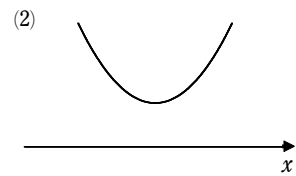
解答 (1) 3 以外のすべての実数 (2) 解はない (3) $x < 0, 2 < x$
 (4) $4 - 2\sqrt{3} \leq x \leq 4 + 2\sqrt{3}$

解説

- (1) 左辺を展開すると $x^2 - 4x + 4 > 2x - 5$
 整理すると $x^2 - 6x + 9 > 0$
 $x^2 - 6x + 9 = 0$ を解くと $x = 3$ (重解)
 よって、与えられた不等式の解は
 3 以外のすべての実数

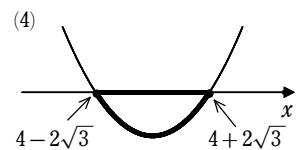


- (2) 両辺を展開すると $2x^2 + 6 \leq x^2 - 4x$
 整理すると $x^2 + 4x + 6 \leq 0$
 2 次方程式 $x^2 + 4x + 6 = 0$ の判別式を D とすると
 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -8 < 0$
 よって、与えられた不等式の解はない。



- (3) 両辺を展開すると $4x^2 + 4x + 1 + 24 > x^2 + 10x + 25$
 整理すると $3x^2 - 6x > 0$ すなわち $3x(x-2) > 0$
 よって、与えられた不等式の解は $x < 0, 2 < x$

- (4) 両辺に 6 を掛けて $2(x-1)^2 \geq 3(x-2)^2 - 6$
 よって $2(x^2 - 2x + 1) \geq 3(x^2 - 4x + 4) - 6$
 整理すると $x^2 - 8x + 4 \leq 0$
 $x^2 - 8x + 4 = 0$ を解くと $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$
 よって、与えられた不等式の解は
 $4 - 2\sqrt{3} \leq x \leq 4 + 2\sqrt{3}$



23 次の 2 次不等式を解け。

- (1) $7x - 13 - x^2 \leq 0$ (2) $12(x-3) < x^2$ (3) $-x(3x-4) > 7$
 (4) $6(x^2-1) > 5x$ (5) $3x^2 + x \geq 2x^2 + 1$ (6) $x^2 + 2\sqrt{6}x \leq -6$

解答 (1) すべての実数 (2) 6 以外のすべての実数 (3) 解はない
 (4) $x < -\frac{2}{3}, \frac{3}{2} < x$ (5) $x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x$ (6) $x = -\sqrt{6}$

解説

- (1) 整理すると $-x^2 + 7x - 13 \leq 0$
 両辺に -1 を掛けて $x^2 - 7x + 13 \geq 0$

2 次方程式 $x^2 - 7x + 13 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -3 < 0$$

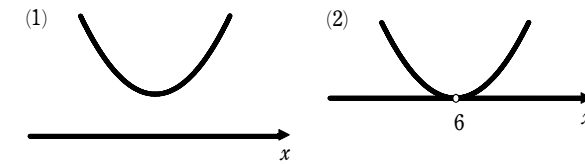
x^2 の係数が正であるから、この 2 次不等式の解は すべての実数

- (2) 整理すると $-x^2 + 12x - 36 < 0$

$$\text{両辺に } -1 \text{ を掛けて } x^2 - 12x + 36 > 0$$

$$\text{ゆえに } (x-6)^2 > 0$$

よって、この 2 次不等式の解は 6 以外のすべての実数



- (3) 整理すると $-3x^2 + 4x - 7 > 0$

$$\text{両辺に } -1 \text{ を掛けて } 3x^2 - 4x + 7 < 0$$

2 次方程式 $3x^2 - 4x + 7 = 0$ の判別式を D とすると

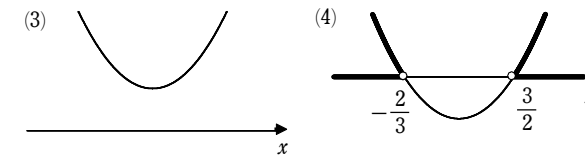
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -68 < 0$$

x^2 の係数が正であるから、この 2 次不等式の解はない。

- (4) 整理すると $6x^2 - 5x - 6 > 0$

$$6x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ を解くと } x = -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$$

よって、この 2 次不等式の解は $x < -\frac{2}{3}, \frac{3}{2} < x$



- (5) 整理すると $x^2 + x - 1 \geq 0$

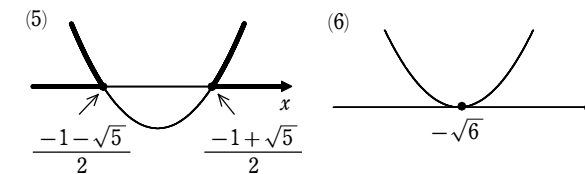
$$x^2 + x - 1 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

よって、この 2 次不等式の解は $x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x$

- (6) 整理すると $x^2 + 2\sqrt{6}x + 6 \leq 0$

$$\text{ゆえに } (x + \sqrt{6})^2 \leq 0$$

よって、この 2 次不等式の解は $x = -\sqrt{6}$



24 次の不等式を解け。

- (1) $-4x^2 < -4x + 1$ (2) $3x(x-2) > -10$
 (3) $\sqrt{5}x \geq x^2 + 2$ (4) $2\sqrt{2}x + 1 \leq -2x^2$
 (5) $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 3 > 0 \end{cases}$ (6) $3 < x(4-x) \leq -x$

解答 (1) $\frac{1}{2}$ 以外のすべての実数 (2) すべての実数 (3) 解はない

(4) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $3 + \sqrt{6} < x \leq 7$ (6) 解はない

解説

- (1) 整理すると $4x^2 - 4x + 1 > 0$

$$\text{ゆえに } (2x-1)^2 > 0$$

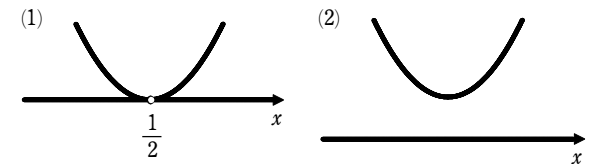
よって、この 2 次不等式の解は $\frac{1}{2}$ 以外のすべての実数

- (2) 整理すると $3x^2 - 6x + 10 > 0$

2 次方程式 $3x^2 - 6x + 10 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = -84 < 0$$

x^2 の係数が正であるから、この 2 次不等式の解は すべての実数



- (3) 整理すると $x^2 - \sqrt{5}x + 2 \leq 0$

2 次方程式 $x^2 - \sqrt{5}x + 2 = 0$ の判別式を D とすると

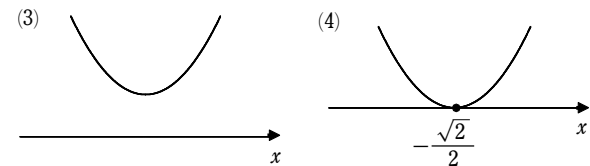
$$D = (-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -3 < 0$$

x^2 の係数が正であるから、この 2 次不等式の解はない。

- (4) 整理すると $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \leq 0$

$$\text{ゆえに } (\sqrt{2}x + 1)^2 \leq 0$$

よって、この 2 次不等式の解は $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



- (5) $x^2 - 8x + 7 \leq 0$ から $(x-1)(x-7) \leq 0$

よって $1 \leq x \leq 7$ …… ①

$$x^2 - 6x + 3 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 1 \cdot 3}}{1} = 3 \pm \sqrt{6}$$

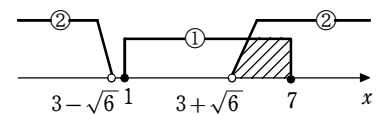
よって、 $x^2 - 6x + 3 > 0$ の解は

$$x < 3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6} < x \text{ …… ②}$$

$3 - \sqrt{6} < 1 < 3 + \sqrt{6} < 7$ であるから、① と

② の共通範囲を求めると

$$3 + \sqrt{6} < x \leq 7$$



- (6) $3 < x(4-x) \leq -x$ から $\begin{cases} 3 < x(4-x) \text{ …… ①} \\ x(4-x) \leq -x \text{ …… ②} \end{cases}$

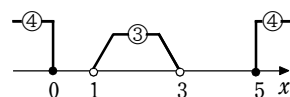
① から $x^2 - 4x + 3 < 0$

$$\text{ゆえに } (x-1)(x-3) < 0$$

よって $1 < x < 3$ …… ③

② から $x^2 - 5x \geq 0$

ゆえに $x(x-5) \geq 0$
 よって $x \leq 0, 5 \leq x \dots\dots ④$
 ③と④の共通範囲はない。
 したがって、この不等式の解はない。



25 次の2次不等式を解け。

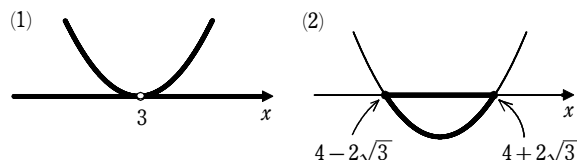
(1) $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 > \frac{2x-5}{4}$ (2) $\frac{(x-1)^2}{3} \geq \frac{(x-2)^2}{2} - 1$

【解答】 (1) 3以外のすべての実数 (2) $4-2\sqrt{3} \leq x \leq 4+2\sqrt{3}$

【解説】

(1) 左辺を展開すると $\frac{x^2}{4} - x + 1 > \frac{2x-5}{4}$
 両辺を4倍して $x^2 - 4x + 4 > 2x - 5$
 整理して $x^2 - 6x + 9 > 0$
 ゆえに $(x-3)^2 > 0$
 よって、この2次不等式の解は 3以外のすべての実数

(2) 両辺に6を掛けると $2(x-1)^2 \geq 3(x-2)^2 - 6$
 整理して $x^2 - 8x + 4 \leq 0$
 $x^2 - 8x + 4 = 0$ を解くと $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$
 よって、この2次不等式の解は $4-2\sqrt{3} \leq x \leq 4+2\sqrt{3}$



26 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ (2) $4x^2 - 6x - 3 > 0$ (3) $x^2 - 2x + 1 < 0$

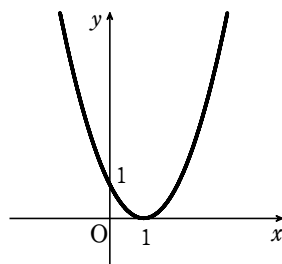
【解答】 (1) $1 \leq x \leq 3$ (2) $x < \frac{3-\sqrt{21}}{4}, \frac{3+\sqrt{21}}{4} < x$ (3) ない

【解説】

(1) 2次方程式 $x^2 - 4x + 3 = 0$ を解く。 $(x-1)(x-3) = 0$ から $x = 1, 3$
 よって、この2次不等式の解は $1 \leq x \leq 3$

(2) 2次方程式 $4x^2 - 6x - 3 = 0$ を解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{4}$
 よって、この2次不等式の解は $x < \frac{3-\sqrt{21}}{4}, \frac{3+\sqrt{21}}{4} < x$

(3) 2次関数 $y = x^2 - 2x + 1$ すなわち $y = (x-1)^2$ の
 グラフは右の図のようになり、 x 軸と点 $(1, 0)$ で
 接している。
 よって $x \neq 1$ のとき $y > 0$
 $x = 1$ のとき $y = 0$
 したがって、この2次不等式の解は ない



27 次の2次不等式を解け。

(1) $3x^2 - 17x + 10 \leq 0$ (2) $3x^2 - 5x + 1 < 0$ (3) $64x^2 - 176x + 121 > 0$

【解答】 (1) $\frac{2}{3} \leq x \leq 5$ (2) $\frac{5-\sqrt{13}}{6} < x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}$ (3) $\frac{11}{8}$ 以外のすべての実数

【解説】

(1) 2次方程式 $3x^2 - 17x + 10 = 0$ を解く。 $(3x-2)(x-5) = 0$ から $x = \frac{2}{3}, 5$

したがって、この2次不等式の解は $\frac{2}{3} \leq x \leq 5$

(2) 2次方程式 $3x^2 - 5x + 1 = 0$ を解くと $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$

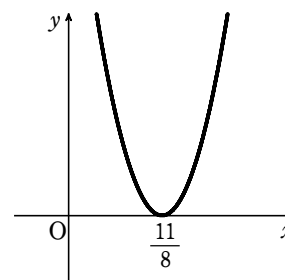
よって、この2次不等式の解は $\frac{5-\sqrt{13}}{6} < x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}$

(3) 2次関数 $y = 64x^2 - 176x + 121$
 すなわち $y = (8x-11)^2$ のグラフは右の図のよう
 なり、 x 軸と点 $\left(\frac{11}{8}, 0\right)$ で接している。

よって $x \neq \frac{11}{8}$ のとき $y > 0$

$x = \frac{11}{8}$ のとき $y = 0$

したがって、この2次不等式の解は
 $\frac{11}{8}$ 以外のすべての実数



28 次の2次不等式、連立不等式を解け。

(1) $x^2 - 6x + 2 < 0$ (2) $2x^2 + 12x < 11x^2 + 4$ (3) $\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ 3x^2 - 2x > 1 \end{cases}$

【解答】 (1) $3-\sqrt{7} < x < 3+\sqrt{7}$ (2) $\frac{2}{3}$ 以外のすべての実数

(3) $-2 \leq x < -\frac{1}{3}, 1 < x \leq 2$

【解説】

(1) 2次方程式 $x^2 - 6x + 2 = 0$ を解くと $x = 3 \pm \sqrt{7}$
 よって、この2次不等式の解は $3-\sqrt{7} < x < 3+\sqrt{7}$

(2) $2x^2 + 12x < 11x^2 + 4$ から $9x^2 - 12x + 4 > 0$
 2次関数 $y = 9x^2 - 12x + 4$ すなわち $y = (3x-2)^2$ の
 グラフは右の図のようになり、 x 軸と点 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ で
 接している。

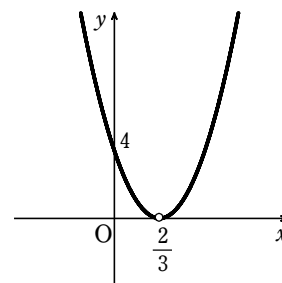
よって、 $x \neq \frac{2}{3}$ のとき $y > 0$,

$x = \frac{2}{3}$ のとき $y = 0$

したがって、この2次不等式の解は $\frac{2}{3}$ 以外のすべての実数

(3) $x^2 \leq 4$ から $x^2 - 4 \leq 0$ すなわち $(x+2)(x-2) \leq 0$
 よって $-2 \leq x \leq 2 \dots\dots ①$

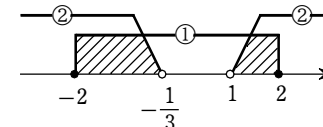
$3x^2 - 2x > 1$ から $3x^2 - 2x - 1 > 0$ すなわち $(3x+1)(x-1) > 0$



よって $x < -\frac{1}{3}, 1 < x \dots\dots ②$

①と②の共通範囲を求めて

$-2 \leq x < -\frac{1}{3}, 1 < x \leq 2$



29 次の2次不等式、連立不等式を解け。

(1) $2x^2 > x + 6$ (2) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq 0$ (3) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 < 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}$

【解答】 (1) $x < -\frac{3}{2}, 2 < x$ (2) $x = \frac{3}{2}$ (3) $-2 < x < -1, 2 < x < 4$

【解説】

(1) $2x^2 > x + 6$ から $2x^2 - x - 6 > 0$

2次方程式 $2x^2 - x - 6 = 0$ を解くと $x = -\frac{3}{2}, 2$

よって、この2次不等式の解は $x < -\frac{3}{2}, 2 < x$

(2) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq 0$ から $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

2次関数 $y = 4x^2 - 12x + 9$ すなわち $y = (2x-3)^2$ の
 グラフは右の図のようになり、 x 軸と点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ で
 接している。

よって $x \neq \frac{3}{2}$ のとき $y > 0$

$x = \frac{3}{2}$ のとき $y = 0$

したがって、この2次不等式の解は $x = \frac{3}{2}$

(3) $x^2 - 2x - 8 < 0$ から $(x+2)(x-4) < 0$

よって $-2 < x < 4 \dots\dots ①$

$x^2 - x - 2 > 0$ から $(x+1)(x-2) > 0$

よって $x < -1, 2 < x \dots\dots ②$

①と②の共通範囲を求めて $-2 < x < -1, 2 < x < 4$

