

2次方程式クイズ

1 2次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ を解く。

左辺を因数分解すると $(x+1)(x-3) = 0$

よって $x+1=0$ または $x-3=0$

すなわち $x=-1$ または $x=3$

ゆえに、解は $x=-1, 3$

(解説)

2 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 - 6x + 5 = 0$

(2) $x^2 - 5x - 24 = 0$

(3) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

(4) $3x^2 + 7x - 6 = 0$

(解答) (1) $x=1, 5$ (2) $x=-3, 8$ (3) $x=-2, -\frac{1}{2}$ (4) $x=-3, \frac{2}{3}$

(解説)

(1) 左辺を因数分解すると $(x-1)(x-5) = 0$

よって $x-1=0$ または $x-5=0$

すなわち $x=1$ または $x=5$

ゆえに、解は $x=1, 5$

(2) 左辺を因数分解すると $(x+3)(x-8) = 0$

よって $x+3=0$ または $x-8=0$

すなわち $x=-3$ または $x=8$

ゆえに、解は $x=-3, 8$

(3) 左辺を因数分解すると $(x+2)(2x+1) = 0$

よって $x+2=0$ または $2x+1=0$

すなわち $x=-2$ または $x=-\frac{1}{2}$

ゆえに、解は $x=-2, -\frac{1}{2}$

(4) 左辺を因数分解すると $(x+3)(3x-2) = 0$

よって $x+3=0$ または $3x-2=0$

すなわち $x=-3$ または $x=\frac{2}{3}$

ゆえに、解は $x=-3, \frac{2}{3}$

3 (1) 2次方程式 $3x^2 - 9x + 2 = 0$ を解く。

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$$

(2) 2次方程式 $5x^2 + 6x - 1 = 0$ を解く。

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 5 \cdot (-1)}}{5} = \frac{-3 \pm \sqrt{14}}{5}$$

(解説)

4 次の2次方程式を解け。

(1) $3x^2 + 7x + 1 = 0$

(3) $x^2 + 2x - 1 = 0$

(5) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

(2) $x^2 - 3x - 2 = 0$

(4) $2x^2 - 4x - 7 = 0$

(6) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

(解答) (1) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$ (2) $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ (3) $x = -1 \pm \sqrt{2}$
(4) $x = \frac{2 \pm 3\sqrt{2}}{2}$ (5) $x = \frac{2}{3}$ (6) $x = \sqrt{3} \pm 1$

(解説)

$$(1) x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

$$(2) x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(3) x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-1)}}{1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$(4) x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2 \cdot (-7)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{2 \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

$$(5) x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 9 \cdot 4}}{9} = \frac{6 \pm 0}{9} = \frac{2}{3}$$

$$(6) x = \frac{-(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 2}}{1} = \sqrt{3} \pm 1$$

5 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 + 10x - 11 = 0$

(2) $4x^2 - 49 = 0$

(3) $x^2 - 3x + 1 = 0$

(解答) (1) $x=1, -11$ (2) $x = \pm \frac{7}{2}$ (3) $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

(解説)

(1) 左辺を因数分解して $(x-1)(x+11) = 0$

したがって $x=1, -11$

(2) 左辺を因数分解して $(2x+7)(2x-7) = 0$

したがって $x = \pm \frac{7}{2}$

(3) 2次方程式の解の公式から

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

6 次の2次方程式を解け。

(1) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

(2) $20x + 30x^2 = 5x^2 - 4$

$$(3) \frac{x^2}{5} - \frac{x}{3} + \frac{1}{15} = 0$$

$$(4) x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$$

(解答) (1) $x = -2, \frac{1}{2}$ (2) $x = -\frac{2}{5}$ (3) $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ (4) $x = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

(解説)

(1) 左辺を因数分解して $(x+2)(2x-1) = 0$

よって $x+2=0$ または $2x-1=0$

したがって $x = -2, \frac{1}{2}$

(別解) 解の公式により $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$

したがって $x = \frac{1}{2}, -2$

(2) 与式を整理すると $25x^2 + 20x + 4 = 0$

左辺を因数分解して $(5x+2)^2 = 0$

ゆえに $x = -\frac{2}{5}$

(3) 両辺に 15 を掛けて $3x^2 - 5x + 1 = 0$

解の公式により $x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$

(4) 解の公式により $x = -(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 1} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

7 次の2次方程式を解け。

(1) $-7x^2 + 13x + 2 = 0$

(2) $3x^2 + 9x + 2 = 2x - 1$

(3) $0.3x^2 + 1.2x + 1 = 0$

(4) $2x^2 + 2\sqrt{6}x - 5 = 0$

(解答) (1) $x=2, -\frac{1}{7}$ (2) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{13}}{6}$ (3) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6}}{3}$

$$(4) x = \frac{-\sqrt{6} \pm 4}{2}$$

(解説)

(1) 両辺に -1 を掛けて $7x^2 - 13x - 2 = 0$

左辺を因数分解して $(x-2)(7x+1) = 0$

よって $x-2=0$ または $7x+1=0$

したがって $x=2, -\frac{1}{7}$

(別解) $7x^2 - 13x - 2 = 0$ において、解の公式により

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-2)}}{2 \cdot 7}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{225}}{14} = \frac{13 \pm 15}{14}$$

したがって $x=2, -\frac{1}{7}$

(2) 与式を整理すると $3x^2 + 7x + 3 = 0$

解の公式により $x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{13}}{6}$

(3) 両辺に 10 を掛けて $3x^2 + 12x + 10 = 0$

解の公式により $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 3 \cdot 10}}{3} = \frac{-6 \pm \sqrt{6}}{3}$

(4) 解の公式により $x = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{6 - 2 \cdot (-5)}}{2} = \frac{-\sqrt{6} \pm 4}{2}$

8 次の方程式を解け。

(1) $2(x+2)^2 - 7(x+2) + 3 = 0$

(2) $x^2 + 2|x-1| - 5 = 0$

(3) $x^2 + 4x = 3\sqrt{(x+2)^2}$

解答 (1) $x=1, -\frac{3}{2}$ (2) $x=-1, -1+2\sqrt{2}$ (3) $x=2, -6$

解説

(1) $x+2=t$ とおくと、方程式は $2t^2-7t+3=0$
ゆえに $(t-3)(2t-1)=0$ よって $t=3, \frac{1}{2}$

ゆえに $x+2=3, \frac{1}{2}$ よって $x=1, -\frac{3}{2}$

(2) [1] $x \geq 1$ のとき、方程式は $x^2+2(x-1)-5=0$
ゆえに $x^2+2x-7=0$ よって $x=-1 \pm \sqrt{1^2-1 \cdot (-7)}=-1 \pm 2\sqrt{2}$
 $x \geq 1$ を満たすものは $x=-1+2\sqrt{2}$

[2] $x < 1$ のとき、方程式は $x^2-2(x-1)-5=0$

ゆえに $x^2-2x-3=0$
よって $(x+1)(x-3)=0$ ゆえに $x=-1, 3$
 $x < 1$ を満たすものは $x=-1$

[1], [2] から、解は $x=-1, -1+2\sqrt{2}$

(3) 方程式は $x^2+4x=3|x+2|$ …… ①

[1] $x \geq -2$ のとき、①は $x^2+4x=3(x+2)$

ゆえに $x^2+x-6=0$
よって $(x-2)(x+3)=0$ ゆえに $x=2, -3$

$x \geq -2$ を満たすものは $x=2$

[2] $x < -2$ のとき、①は $x^2+4x=-3(x+2)$

ゆえに $x^2+7x+6=0$
よって $(x+1)(x+6)=0$ ゆえに $x=-1, -6$
 $x < -2$ を満たすものは $x=-6$

[1], [2] から、解は $x=2, -6$

9 次の方程式を解け。

(1) $2(x-2)^2+5(x-2)+1=0$ (2) $6(x+1)^2+5(x+1)-14=0$
(3) $(x+3)|x-4|+2x+6=0$ (4) $x^2+2\sqrt{x^2}-1=0$

解答 (1) $x=\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (2) $x=-3, \frac{1}{6}$ (3) $x=-3$
(4) $x=-1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$

解説

(1) $x-2=t$ とおくと、方程式は $2t^2+5t+1=0$
よって $t=\frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}=\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$

$x=t+2$ であるから $x=\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}+2=\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

(2) $x+1=t$ とおくと、方程式は $6t^2+5t-14=0$
よって $(t+2)(6t-7)=0$ ゆえに $t=-2, \frac{7}{6}$

これらを $x=t-1$ に代入して $x=-3, \frac{1}{6}$

(3) 方程式から $(x+3)|x-4|+2(x+3)=0$
よって $(x+3)(|x-4|+2)=0$ …… ①

[1] $x \geq 4$ のとき、①は $(x+3)(x-4+2)=0$

すなわち $(x+3)(x-2)=0$

これを解くと $x=-3, 2$ これらはいずれも $x \geq 4$ を満たさない。

[2] $x < 4$ のとき、①は $(x+3)(-(x-4)+2)=0$

すなわち $(x+3)(-x+6)=0$

これを解くと $x=-3, 6$ $x < 4$ を満たすものは $x=-3$

[1], [2] から、解は $x=-3$

(4) 方程式は $x^2+2|x|-1=0$ …… ①

[1] $x \geq 0$ のとき、①は $x^2+2x-1=0$

よって $x=-1 \pm \sqrt{1^2-1 \cdot (-1)}=-1 \pm \sqrt{2}$

$x \geq 0$ を満たすものは $x=-1+\sqrt{2}$

[2] $x < 0$ のとき、①は $x^2-2x-1=0$

よって $x=-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-1 \cdot (-1)}=1 \pm \sqrt{2}$

$x < 0$ を満たすものは $x=1-\sqrt{2}$

[1], [2] から、解は $x=-1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$

別解 ①から $|x|^2+2|x|-1=0$

ゆえに $|x|=-1 \pm \sqrt{1^2-1 \cdot (-1)}=-1 \pm \sqrt{2}$

$|x| \geq 0$ であるから $|x|=-1+\sqrt{2}$

よって $x=\pm(-1+\sqrt{2})$ すなわち $x=-1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$

10 次の2次方程式を解け。

(1) $(x+1)x=(x+1)(2x-1)$ (2) $8x^2-14x+3=0$ (3) $5x^2-7x+1=0$

(4) $24x-6x^2=10x^2+9$ (5) $2x-x^2=6(2x-1)$

解答 (1) $x=\pm 1$ (2) $x=\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$ (3) $x=\frac{7 \pm \sqrt{29}}{10}$ (4) $x=\frac{3}{4}$
(5) $x=-5 \pm \sqrt{31}$

解説

(1) $(x+1)x=(x+1)(2x-1)$ から

$(x+1)(2x-1)-(x+1)x=0$

ゆえに $(x+1)(2x-1)-x=0$

すなわち $(x+1)(x-1)=0$

したがって $x=\pm 1$

(2) 左辺を因数分解して $(2x-3)(4x-1)=0$

よって $2x-3=0$ または $4x-1=0$

したがって $x=\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$

(3) 解の公式により $x=\frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2-4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}=\frac{7 \pm \sqrt{29}}{10}$

(4) 与式を整理すると $16x^2-24x+9=0$

ゆえに $(4x-3)^2=0$ よって $x=\frac{3}{4}$

(5) 与式を整理すると $x^2+10x-6=0$

解の公式により

$$x=\frac{-10 \pm \sqrt{10^2-4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}=\frac{-10 \pm \sqrt{124}}{2}=-5 \pm \sqrt{31}$$

別解 与式を整理すると $x^2+2 \cdot 5x-6=0$

よって $x=\frac{-5 \pm \sqrt{5^2-1 \cdot (-6)}}{1}=-5 \pm \sqrt{31}$

11 次の2次方程式を解け。

(1) $2x(2x+1)=x(x+1)$ (2) $6x^2-x-1=0$ (3) $4x^2-12x+9=0$

(4) $5x=3(1-x^2)$ (5) $12x^2+7x-12=0$ (6) $x^2+14x-67=0$

解答 (1) $x=0, -\frac{1}{3}$ (2) $x=\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ (3) $x=\frac{3}{2}$ (4) $x=\frac{-5 \pm \sqrt{61}}{6}$
(5) $x=-\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$ (6) $x=-7 \pm 2\sqrt{29}$

解説

(1) 与式を展開して整理すると $3x^2+x=0$

ゆえに $x(3x+1)=0$ よって $x=0, -\frac{1}{3}$

(2) 左辺を因数分解して $(2x-1)(3x+1)=0$

ゆえに $2x-1=0$ または $3x+1=0$

よって $x=\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

(3) 左辺を因数分解して $(2x-3)^2=0$

ゆえに $2x-3=0$ よって $x=\frac{3}{2}$

(4) 与式を整理すると $3x^2+5x-3=0$

解の公式により $x=\frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3}=\frac{-5 \pm \sqrt{61}}{6}$

(5) 左辺を因数分解して $(3x+4)(4x-3)=0$

ゆえに $3x+4=0$ または $4x-3=0$

よって $x=-\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

(6) 与式は $x^2+2 \cdot 7x-67=0$

解の公式により $x=\frac{-7 \pm \sqrt{7^2-1 \cdot (-67)}}{1}=-7 \pm \sqrt{116}$
 $=-7 \pm 2\sqrt{29}$

12 (1) 次の2次方程式を解け。

(ア) $-0.5x^2-\frac{3}{2}x+10=0$ (イ) $\sqrt{2}x^2-5x+2\sqrt{2}=0$

(2) 方程式 $3(x+1)^2+5(x+1)-2=0$ を、おき換えを利用して解け。

(3) 方程式 $x^2+x+|x-1|=5$ を解け。

解答 (1) (ア) $x=\frac{-3 \pm \sqrt{89}}{2}$ (イ) $x=2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $x=-3, -\frac{2}{3}$
(3) $x=-2, -1+\sqrt{7}$

解説

(1) (ア) 両辺に -2 を掛けて $x^2+3x-20=0$

よって $x=\frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}=\frac{-3 \pm \sqrt{89}}{2}$

(イ) 両辺に $\sqrt{2}$ を掛けて $2x^2-5\sqrt{2}x+4=0$

よって $x=\frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{(-5\sqrt{2})^2-4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}=\frac{5\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{4}$

したがって $x=2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

[1] $x \geq 4$ のとき、①は $(x+3)(x-4+2)=0$

すなわち $(x+3)(x-2)=0$

(2) $x+1=X$ とおくと $3X^2+5X-2=0$
ゆえに $(X+2)(3X-1)=0$

よって $X=-2, \frac{1}{3}$ すなわち $x+1=-2, \frac{1}{3}$

ゆえに $x=-3, -\frac{2}{3}$

(3) [1] $x \geq 1$ のとき, 方程式は $x^2+x+x-1=5$
整理すると $x^2+2x-6=0$ よって $x=-1 \pm \sqrt{7}$

$x \geq 1$ を満たすものは $x=-1+\sqrt{7}$

[2] $x < 1$ のとき, 方程式は $x^2+x-(x-1)=5$

整理すると $x^2=4$ よって $x=\pm 2$

$x < 1$ を満たすものは $x=-2$

[1], [2] から, 求める解は $x=-2, -1+\sqrt{7}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & \times & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline 3 & & -2 & & 5 \end{array}$$

[1], [2] から, 求める解は $x=4, 1-\sqrt{5}$

[13] 次の方程式を解け。

(1) $\frac{x^2}{15} - \frac{x}{3} = \frac{1}{5}(x+1)$

(2) $-\sqrt{3}x^2 - 2x + 5\sqrt{3} = 0$

(3) $4(x-2)^2 + 10(x-2) + 5 = 0$

(4) $x^2 - 3x - |x-2| - 2 = 0$

解答 (1) $x=4 \pm \sqrt{19}$ (2) $x=\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (3) $x=\frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$
(4) $x=4, 1-\sqrt{5}$

解説

(1) 両辺に 15 を掛けて $x^2 - 5x = 3(x+1)$

整理すると $x^2 - 8x - 3 = 0$

よって $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \cdot (-3)}}{1} = 4 \pm \sqrt{19}$

(2) 両辺に $-\sqrt{3}$ を掛けて $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 15 = 0$

よって $x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 3 \cdot (-15)}}{3} = \frac{-\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{3}$

したがって $x = \sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}$

別解 両辺に -1 を掛けて $\sqrt{3}x^2 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$

左辺を因数分解して $(x-\sqrt{3})(\sqrt{3}x+5)=0$

よって $x=\sqrt{3}, -\frac{5}{\sqrt{3}}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -\sqrt{3} & \longrightarrow & -3 \\ \sqrt{3} & \times & 5 & \longrightarrow & 5 \\ \hline \sqrt{3} & & -5\sqrt{3} & & 2 \end{array}$$

すなわち $x=\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(3) $x-2=X$ とおくと $4X^2+10X+5=0$

ゆえに $X=\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5}}{4}=\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{4}$

よって $x=X+2=\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{4}+2=\frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$

(4) [1] $x \geq 2$ のとき, 方程式は $x^2 - 3x - (x-2) - 2 = 0$

ゆえに $x^2 - 4x = 0$ よって $x(x-4) = 0$

ゆえに $x=0, 4$ $x \geq 2$ を満たすものは $x=4$

[2] $x < 2$ のとき, 方程式は $x^2 - 3x + (x-2) - 2 = 0$

ゆえに $x^2 - 2x - 4 = 0$

よって $x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-4)} = 1 \pm \sqrt{5}$

$x < 2$ を満たすものは $x=1-\sqrt{5}$

[14] 次の方程式を解け。

(1) $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}x)$ (2) $3(x+2)^2 + 12(x+2) + 10 = 0$
(3) $(2+\sqrt{3})x^2 + 2(\sqrt{3}+1)x + 2 = 0$ (4) $2x^2 - 5|x| + 3 = 0$

解答 (1) $x=-1, \frac{1}{3}$ (2) $x=\frac{-12 \pm \sqrt{6}}{3}$ (3) $x=1-\sqrt{3}$
(4) $x=\pm 1, \pm \frac{3}{2}$

解説

(1) 方程式から $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}x$

両辺に 6 を掛けて $6x^2 + 3x = 2 - x$

ゆえに $3x^2 + 2x - 1 = 0$

よって $(x+1)(3x-1) = 0$

したがって $x = -1, \frac{1}{3}$

(2) $x+2=X$ とおくと $3X^2 + 12X + 10 = 0$

解の公式により $X = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 3 \cdot 10}}{3} = -2 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

よって $x = X - 2 = -2 \pm \frac{\sqrt{6}}{3} - 2 = -4 \pm \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{-12 \pm \sqrt{6}}{3}$

(3) 両辺に $(2-\sqrt{3})$ を掛けて

$$[2^2 - (\sqrt{3})^2]x^2 + 2(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})x + 2(2-\sqrt{3}) = 0$$

整理すると $x^2 - 2(1-\sqrt{3})x + 2(2-\sqrt{3}) = 0$

解の公式により $x = 1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 - 2(2-\sqrt{3})}$
 $= 1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(4-2\sqrt{3})-4+2\sqrt{3}}$
 $= 1 - \sqrt{3}$

(4) [1] $x \geq 0$ のとき, 方程式は $2x^2 - 5x + 3 = 0$

ゆえに $(x-1)(2x-3) = 0$ よって $x=1, \frac{3}{2}$

これらはともに $x \geq 0$ を満たす。

[2] $x < 0$ のとき, 方程式は $2x^2 + 5x + 3 = 0$

ゆえに $(x+1)(2x+3) = 0$ よって $x=-1, -\frac{3}{2}$

これらはともに $x < 0$ を満たす。

以上から, 求める解は $x=\pm 1, \pm \frac{3}{2}$

別解 $x^2 = |x|^2$ であるから, 方程式は $2|x|^2 - 5|x| + 3 = 0$

ゆえに $(|x|-1)(2|x|-3) = 0$

よって $|x|=1, \frac{3}{2}$ すなわち $x=\pm 1, \pm \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -1 & \longrightarrow & -2 \\ 2 & \times & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \hline 2 & & 3 & & -5 \end{array}$$

解答 (1) $x=0, 4$ (2) $x=1, 2$ (3) $x=1, -5$ (4) $x=-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

(5) $x=-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$ (6) $x=\frac{5}{3}$

解説

(1) 左辺を因数分解すると $x(x-4) = 0$

よって $x=0$ または $x-4=0$

したがって $x=0, 4$

(2) 左辺を因数分解すると $(x-1)(x-2) = 0$

よって $x-1=0$ または $x-2=0$

したがって $x=1, 2$

(3) 左辺を因数分解すると $(x-1)(x+5) = 0$

よって $x-1=0$ または $x+5=0$

したがって $x=1, -5$

(4) 左辺を因数分解すると $(2x+1)(2x+3) = 0$

よって $2x+1=0$ または $2x+3=0$

したがって $x=-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

(5) 左辺を因数分解すると $(2x+7)(2x-7) = 0$

よって $2x+7=0$ または $2x-7=0$

したがって $x=-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$

(6) 左辺を因数分解すると $(3x-5)^2 = 0$

よって $3x-5=0$

したがって $x=\frac{5}{3}$

[16] 次の 2 次方程式を平方根を利用して解け。

(1) $9x^2 = 16$ (2) $25x^2 - 7 = 0$ (3) $(x+1)^2 - 3 = 0$

解答 (1) $x = \pm \frac{4}{3}$ (2) $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{5}$ (3) $x = -1 \pm \sqrt{3}$

解説

(1) 両辺を 9 で割ると $x^2 = \frac{16}{9}$

よって $x = \pm \sqrt{\frac{16}{9}} = \pm \frac{4}{3}$

(2) 移項すると $25x^2 = 7$

両辺を 25 で割ると $x^2 = \frac{7}{25}$

よって $x = \pm \sqrt{\frac{7}{25}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{5}$

(3) 移項すると $(x+1)^2 = 3$

よって $x+1 = \pm \sqrt{3}$

ゆえに $x = -1 \pm \sqrt{3}$

[17] 次の 2 次方程式を解の公式を利用して解け。

(1) $x^2 + 5x + 2 = 0$ (2) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ (3) $-2x^2 + 11x - 5 = 0$

(4) $x^2 + 14x - 3 = 0$ (5) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ (6) $3x^2 - 15\sqrt{3}x + 54 = 0$

- 解答 (1) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$ (2) $x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$ (3) $x = 5, \frac{1}{2}$
 (4) $x = -7 \pm 2\sqrt{13}$ (5) $x = \frac{3}{2}$ (6) $x = 3\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$

解説

$$(1) x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(2) x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 12}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

(3) 両辺に -1 を掛けると $2x^2 - 11x + 5 = 0$

$$x = \frac{-(11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{11 \pm 9}{4}$$

よって $x = \frac{20}{4}$ または $x = \frac{2}{4}$

ゆえに $x = 5, \frac{1}{2}$

$$(4) x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 1 \cdot (-3)}}{1} = -7 \pm \sqrt{49 + 3} = -7 \pm \sqrt{52} = -7 \pm 2\sqrt{13}$$

$$(5) x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(6) 両辺を 3 で割ると $x^2 - 5\sqrt{3}x + 18 = 0$

$$x = \frac{-(5\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{75 - 72}}{2} = \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2}$$

よって $x = \frac{6\sqrt{3}}{2}$ または $x = \frac{4\sqrt{3}}{2}$

ゆえに $x = 3\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$

18 次の 2 次方程式を解け。

- (1) $-x^2 - 2x + 1 = 0$ (2) $(x+2)(x+3) = 2$
 (3) $0.2x^2 - 0.5x - 1.2 = 0$ (4) $2(x+1)^2 = (x+2)(x-1) + 2$
 (5) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = 0$ (6) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$
 (7) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ (8) $x^2 - 9|x| + 18 = 0$

- 解答 (1) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ (2) $x = -1, -4$ (3) $x = 4, -\frac{3}{2}$ (4) $x = -1, -2$
 (5) $x = -3, \frac{3}{2}$ (6) $x = \frac{15 \pm \sqrt{177}}{4}$ (7) $x = \pm 1$ (8) $x = \pm 3, \pm 6$

解説

$$(1) 両辺に -1 を掛けると $x^2 + 2x - 1 = 0$
 よって $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-1)}}{1} = -1 \pm \sqrt{2}$$$

(2) 左辺を展開すると $x^2 + 5x + 6 = 2$

移項すると $x^2 + 5x + 4 = 0$

左辺を因数分解して $(x+1)(x+4) = 0$

よって $x = -1, -4$

(3) 両辺に 10 を掛けると $2x^2 - 5x - 12 = 0$

左辺を因数分解して $(x-4)(2x+3) = 0$

よって $x = 4, -\frac{3}{2}$

(4) 両辺を展開すると $2x^2 + 4x + 2 = x^2 + x - 2 + 2$

移項して整理すると $x^2 + 3x + 2 = 0$
 左辺を因数分解して $(x+1)(x+2) = 0$

よって $x = -1, -2$

(5) 両辺に 12 を掛けると $2x^2 + 3x - 9 = 0$

左辺を因数分解して $(x+3)(2x-3) = 0$

よって $x = -3, \frac{3}{2}$

(6) 両辺に 6 を掛けると $2x^2 - 15x + 6 = 0$

よって $x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 48}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{177}}{4}$

(7) [1] $x \geq 0$ のとき $|x| = x$ であるから方程式は $x^2 + 2x - 3 = 0$

左辺を因数分解して $(x-1)(x+3) = 0$

よって $x = 1, -3$

$x \geq 0$ であるから $x = 1$

[2] $x < 0$ のとき $|x| = -x$ であるから方程式は $x^2 - 2x - 3 = 0$

左辺を因数分解して $(x+1)(x-3) = 0$

よって $x = -1, 3$

$x < 0$ であるから $x = -1$

[1], [2] から、求める解は $x = \pm 1$

(8) [1] $x \geq 0$ のとき $|x| = x$ であるから方程式は $x^2 - 9x + 18 = 0$

左辺を因数分解して $(x-3)(x-6) = 0$

よって $x = 3, 6$

これらは $x \geq 0$ を満たす。

[2] $x < 0$ のとき $|x| = -x$ であるから方程式は $x^2 + 9x + 18 = 0$

左辺を因数分解して $(x+3)(x+6) = 0$

よって $x = -3, -6$

これらは $x < 0$ を満たす。

[1], [2] から、求める解は $x = \pm 3, \pm 6$

19 次の 2 次方程式を解け。

- (1) $(2x-1)^2 = 6$ (2) $x^2 + 3x - 28 = 0$ (3) $x^2 + 7x + 3 = 0$
 (4) $x^2 - 14x + 49 = 0$ (5) $4x^2 - 7x - 15 = 0$ (6) $3(x-1)^2 = 2x+1$

- 解答 (1) $x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}$ (2) $x = -7, 4$ (3) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{2}$
 (4) $x = 7$ (5) $x = 3, -\frac{5}{4}$ (6) $x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$

解説

(1) $(2x-1)^2 = 6$ から $2x-1 = \pm \sqrt{6}$

よって $2x = 1 \pm \sqrt{6}$ ゆえに $x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}$

(2) 左辺を因数分解して $(x+7)(x-4) = 0$

よって $x = -7, 4$

(3) 解の公式により

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{2}$$

(4) 左辺を因数分解して $(x-7)^2 = 0$ よって $x = 7$

(5) 左辺を因数分解して

$$(x-3)(4x+5) = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ \times \end{array} \begin{array}{r} -3 \\ 5 \\ \hline -12 \\ 5 \end{array}$$

よって $x = 3, -\frac{5}{4}$

(6) $3(x-1)^2 = 2x+1$ から $3(x^2 - 2x + 1) = 2x+1$

よって $3x^2 - 8x + 2 = 0$

解の公式により $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 3 \cdot 2}}{3} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$

20 次の 2 次方程式を解け。

- (1) $x^2 = 7$ (2) $4x^2 - 5 = 0$ (3) $(x+1)^2 = 2$
 (4) $x^2 + x - 6 = 0$ (5) $x^2 + 8x + 15 = 0$ (6) $16x^2 - 24x + 9 = 0$
 (7) $2x^2 - 13x + 15 = 0$ (8) $6x^2 + 7x - 5 = 0$ (9) $4x^2 - 3x - 27 = 0$

- 解答 (1) $x = \pm \sqrt{7}$ (2) $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ (3) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ (4) $x = -3, 2$
 (5) $x = -3, -5$ (6) $x = \frac{3}{4}$ (7) $x = 5, \frac{3}{2}$ (8) $x = \frac{1}{2}, -\frac{5}{3}$
 (9) $x = 3, -\frac{9}{4}$

解説

(1) $x^2 = 7$ から $x = \pm \sqrt{7}$

(2) $4x^2 - 5 = 0$ から $4x^2 = 5$ よって $x^2 = \frac{5}{4}$

ゆえに $x = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $(x+1)^2 = 2$ から $x+1 = \pm \sqrt{2}$ よって $x = -1 \pm \sqrt{2}$

(4) 左辺を因数分解して $(x+3)(x-2) = 0$

よって $x = -3, 2$

(5) 左辺を因数分解して $(x+3)(x+5) = 0$

よって $x = -3, -5$

(6) 左辺を因数分解して $(4x-3)^2 = 0$

よって $x = \frac{3}{4}$

(7) 左辺を因数分解して

$$(x-5)(2x-3) = 0$$

よって $x = 5, \frac{3}{2}$

(8) 左辺を因数分解して

$$(2x-1)(3x+5) = 0$$

よって $x = \frac{1}{2}, -\frac{5}{3}$

(9) 左辺を因数分解して

$$(x-3)(4x+9) = 0$$

よって $x = 3, -\frac{9}{4}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \times \\ 2 \\ \hline -5 \\ -3 \\ \hline -10 \\ -3 \end{array}$$

21 次の 2 次方程式を解け。

- (1) $2x^2 + 5x - 1 = 0$ (2) $3x^2 + x - 3 = 0$ (3) $x^2 - 7x + 4 = 0$
 (4) $x^2 - 2x - 5 = 0$ (5) $2(x+1)^2 = 2x+5$ (6) $x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 = 0$

- 解答 (1) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$ (2) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}$ (3) $x = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$
 (4) $x = 1 \pm \sqrt{6}$ (5) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$ (6) $x = -2\sqrt{2}$

解説

- (1) 解の公式により $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$
 (2) 解の公式により $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}$
 (3) 解の公式により $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$
 (4) 解の公式により $x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-5)}}{1} = 1 \pm \sqrt{6}$
 (5) 左辺を展開して $2x^2 + 4x + 2 = 2x + 5$

整理すると $2x^2 + 2x - 3 = 0$

解の公式により $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 2 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

(6) 解の公式により $x = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 8}}{1} = -2\sqrt{2}$

別解 $x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 = 0$ から $x^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2}x + (2\sqrt{2})^2 = 0$

ゆえに $(x + 2\sqrt{2})^2 = 0$ よって $x = -2\sqrt{2}$

22 解の公式を利用して、次の2次方程式を解け。

- (1) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (2) $-5x^2 + 4x + 2 = 0$
 (3) $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6 = 0$ (4) $\sqrt{3}x^2 - 4x - 2 = 0$

- 解答 (1) $x = 1 \pm \sqrt{3}$ (2) $x = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$ (3) $x = \sqrt{3}$
 (4) $x = 1 + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} - 3}{3}$

解説

- (1) $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$
 (2) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 2}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-4 \pm \sqrt{56}}{-10} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{14}}{-10}$
 よって $x = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$

別解 両辺に -1 を掛けて $5x^2 - 4x - 2 = 0$

よって $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{10} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{10} = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$

(3) $x = \frac{-(-4\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

(4) $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot (-2)}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{4 \pm \sqrt{4(4+2\sqrt{3})}}{2\sqrt{3}} = \frac{2 \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$
 $= \frac{2 \pm \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \pm (\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}$

よって $x = 1 + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} - 3}{3}$

23 次の2次方程式を解け。

- (1) $2(x+1)^2 = (x+2)(x+3)$ (2) $2(x+2)^2 - (x+2) - 3 = 0$
 (3) $0.2x^2 - 0.5x - 1.2 = 0$ (4) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

- 解答 (1) $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ (2) $x = -3, -\frac{1}{2}$ (3) $x = 4, -\frac{3}{2}$
 (4) $x = \frac{15 \pm \sqrt{177}}{4}$

解説

- (1) 式を整理すると、 $2(x^2 + 2x + 1) = x^2 + 5x + 6$ から $x^2 - x - 4 = 0$
 よって $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

- (2) $x+2 = X$ とおくと $2X^2 - X - 3 = 0$

左辺を因数分解すると $(X+1)(2X-3) = 0$

よって $\{(x+2)+1\}[2(x+2)-3] = 0$

すなわち $(x+3)(2x+1) = 0$

したがって $x = -3, -\frac{1}{2}$

- (3) 両辺を 10 倍すると $2x^2 - 5x - 12 = 0$

左辺を因数分解すると $(x-4)(2x+3) = 0$

よって $x = 4, -\frac{3}{2}$

- (4) 両辺を 6 倍すると $2x^2 - 15x + 6 = 0$

よって $x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm \sqrt{177}}{4}$

24 次の2次方程式を解け。

- (1) $2x^2 - 3x = x^2 - 2$ (2) $(x+4)(x+5) = 3(x+1)(x+2) - 4$
 (3) $0.3x^2 + 0.7x + 0.2 = 0$ (4) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = 0$
 (5) $(x-2)^2 + 2(x-2) - 3 = 0$ (6) $(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 = 0$

- 解答 (1) $x = 1, 2$ (2) $x = \pm 3$ (3) $x = -2, -\frac{1}{3}$
 (4) $x = -3, \frac{3}{2}$ (5) $x = -1, 3$ (6) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

解説

- (1) 整理すると $x^2 - 3x + 2 = 0$

左辺を因数分解して $(x-1)(x-2) = 0$

よって $x = 1, 2$

- (2) 両辺を展開して $x^2 + 9x + 20 = 3x^2 + 9x + 6 - 4$

整理すると $2x^2 - 18 = 0$

すなわち $x^2 = 9$

よって $x = \pm 3$

- (3) 両辺に 10 を掛けると $3x^2 + 7x + 2 = 0$

左辺を因数分解して $(x+2)(3x+1) = 0$

よって $x = -2, -\frac{1}{3}$

- (4) 両辺に 12 を掛けると $2x^2 + 3x - 9 = 0$

左辺を因数分解して $(x+3)(2x-3) = 0$

よって $x = -3, \frac{3}{2}$

(5) 左辺を因数分解すると

$$\{(x-2)+3\}[(x-2)-1] = 0$$

よって $(x+1)(x-3) = 0$

したがって $x = -1, 3$

(6) $x-1 = A$ とおくと $A^2 + 3A - 1 = 0$

解の公式により

$$A = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{すなわち } x-1 = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{よって } x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

25 次の2次方程式を解け。

- (1) $x(x-5) = 0$ (2) $x^2 + 2x - 8 = 0$ (3) $x^2 + 6x + 9 = 0$
 (4) $x^2 - 9x + 14 = 0$ (5) $2x^2 + x = 0$ (6) $2x^2 + 5x + 2 = 0$
 (7) $3x^2 - 7x - 6 = 0$ (8) $6x^2 + x - 12 = 0$ (9) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

- 解答 (1) $x = 0, 5$ (2) $x = 2, -4$ (3) $x = -3$ (4) $x = 2, 7$

$$(5) x = 0, -\frac{1}{2} (6) x = -2, -\frac{1}{2} (7) x = 3, -\frac{2}{3} (8) x = -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$$

$$(9) x = \frac{1}{2}$$

解説

- (1) $x(x-5) = 0$ から $x = 0$ または $x-5 = 0$

したがって $x = 0, 5$

- (2) 左辺を因数分解すると $(x-2)(x+4) = 0$

よって $x-2 = 0$ または $x+4 = 0$

したがって $x = 2, -4$

- (3) 左辺を因数分解すると $(x+3)^2 = 0$

よって $x+3 = 0$

したがって $x = -3$

- (4) 左辺を因数分解すると $(x-2)(x-7) = 0$

よって $x-2 = 0$ または $x-7 = 0$

したがって $x = 2, 7$

- (5) 左辺を因数分解すると $x(2x+1) = 0$

よって $x = 0$ または $2x+1 = 0$

したがって $x = 0, -\frac{1}{2}$

- (6) 左辺を因数分解すると $(x+2)(2x+1) = 0$

よって $x+2 = 0$ または $2x+1 = 0$

したがって $x = -2, -\frac{1}{2}$

- (7) 左辺を因数分解すると $(x-3)(3x+2) = 0$

よって $x-3 = 0$ または $3x+2 = 0$

したがって $x = 3, -\frac{2}{3}$

- (8) 左辺を因数分解すると $(2x+3)(3x-4) = 0$

よって $2x+3 = 0$ または $3x-4 = 0$

したがって $x = -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

(9) 左辺を因数分解すると $(2x-1)^2=0$
よって $2x-1=0$

したがって $x = \frac{1}{2}$

26 次の2次方程式を解け。

(1) $25x^2=9$

(2) $(x-1)^2=2$

(3) $(3x-4)^2=25$

解答 (1) $x = \pm \frac{3}{5}$ (2) $x = 1 \pm \sqrt{2}$ (3) $x = 3, -\frac{1}{3}$

解説

(1) $25x^2=9$ から $x^2 = \frac{9}{25}$

よって $x = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}$

(2) $(x-1)^2=2$ から $x-1 = \pm \sqrt{2}$

よって $x = 1 \pm \sqrt{2}$

(3) $(3x-4)^2=25$ から $3x-4 = \pm 5$

よって $3x-4=5, 3x-4=-5$

したがって $x = 3, -\frac{1}{3}$

27 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2+x-3=0$

(2) $2x^2-5x+1=0$

(3) $x^2-4x-1=0$

(4) $4x^2+12x+7=0$

(5) $3x^2-9x+5=0$

(6) $8x^2+2x-1=0$

(7) $x^2-\sqrt{6}x-1=0$

(8) $x^2+2\sqrt{7}x+5=0$

解答 (1) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ (2) $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ (3) $x = 2 \pm \sqrt{5}$
(4) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{2}}{2}$ (5) $x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{6}$ (6) $x = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$
(7) $x = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{10}}{2}$ (8) $x = -\sqrt{7} \pm \sqrt{2}$

解説

(1) 解の公式により

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(2) 解の公式により

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

(3) 解の公式により

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

別解 $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot (-1)}}{1} = 2 \pm \sqrt{5}$

(4) 解の公式により

$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm \sqrt{32}}{8}$

$$= \frac{-12 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{2}}{2}$$

別解 $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 7}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{2}}{2}$

(5) 解の公式により

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{6}$$

(6) 解の公式により

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} = \frac{-2 \pm 6}{16}$$

$$= \frac{-2+6}{16} = \frac{1}{4}, \quad \frac{-2-6}{16} = \frac{-1}{2} \text{ であるから } x = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$$

別解 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 8 \cdot (-1)}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{8} = \frac{-1 \pm 3}{8}$

$$= \frac{-1+3}{8} = \frac{1}{4}, \quad \frac{-1-3}{8} = \frac{-1}{2} \text{ であるから } x = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$$

別解 左辺を因数分解して $(2x+1)(4x-1)=0$

よって $2x+1=0$ または $4x-1=0$

したがって $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

(7) 解の公式により

$$x = \frac{-(-\sqrt{6}) \pm \sqrt{(-\sqrt{6})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{10}}{2}$$

(8) 解の公式により

$$x = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2\sqrt{7} \pm 2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{7} \pm \sqrt{2}$$

別解 $x = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 1 \cdot 5}}{1} = -\sqrt{7} \pm \sqrt{2}$

28 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2-4x-2=0$

(2) $2x^2-10x+1=0$

(3) $4x^2+11x-3=0$

(4) $-2x^2+4x+3=0$

(5) $x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{2} = 0$

(6) $20x-25-4x^2=0$

(7) $(x+6)(x-1)=x(7-3x)$

(8) $(x+2)^2-5(x+2)+5=0$

(9) $1.5x(2-0.5x)=0.5x+2$

(10) $x^2-5\sqrt{3}x+18=0$

解答 (1) $x = 2 \pm \sqrt{6}$ (2) $x = \frac{5 \pm \sqrt{23}}{2}$ (3) $x = -3, \frac{1}{4}$ (4) $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

$$(5) x = \frac{3}{2}, -\frac{1}{3} \quad (6) x = \frac{5}{2} \quad (7) x = -1, \frac{3}{2} \quad (8) x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(9) x = 2, \frac{4}{3} \quad (10) x = 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$$

解説

(1) 解の公式により

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2}$$

したがって $x = -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

(9) 左辺を因数分解すると $(2x-1)^2=0$
よって $2x-1=0$

したがって $x = \frac{1}{2}$

26 次の2次方程式を解け。

(1) $25x^2=9$

(2) $(x-1)^2=2$

(3) $(3x-4)^2=25$

別解 $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 7}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{2}}{2}$

(5) 解の公式により

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{6}$$

(6) 解の公式により

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} = \frac{-2 \pm 6}{16}$$

$$= \frac{-2+6}{16} = \frac{1}{4}, \quad \frac{-2-6}{16} = \frac{-1}{2} \text{ であるから } x = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$$

別解 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 8 \cdot (-1)}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{8} = \frac{-1 \pm 3}{8}$

$$= \frac{-1+3}{8} = \frac{1}{4}, \quad \frac{-1-3}{8} = \frac{-1}{2} \text{ であるから } x = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$$

別解 左辺を因数分解して $(2x+1)(4x-1)=0$

よって $2x+1=0$ または $4x-1=0$

したがって $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

(7) 解の公式により

$$x = \frac{-(-\sqrt{6}) \pm \sqrt{(-\sqrt{6})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{10}}{2}$$

(8) 解の公式により

$$x = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2\sqrt{7} \pm 2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{7} \pm \sqrt{2}$$

別解 $x = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 1 \cdot 5}}{1} = -\sqrt{7} \pm \sqrt{2}$

$= \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$

別解 $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot (-2)}}{1} = 2 \pm \sqrt{6}$

(2) 解の公式により

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{4}$$

$$= \frac{10 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{23}}{2}$$

別解 $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 2 \cdot 1}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{23}}{2}$

(3) 左辺を因数分解すると $(x+3)(4x-1)=0$

よって $x+3=0$ または $4x-1=0$

したがって $x = -3, \frac{1}{4}$

(4) 両辺に -1 を掛けて $2x^2-4x-3=0$

解の公式により

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

別解 $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

(5) 両辺に 6 を掛けて $6x^2-7x-3=0$

左辺を因数分解して $(2x-3)(3x+1)=0$

よって $2x-3=0$ または $3x+1=0$

したがって $x = \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$

(6) 両辺に -1 を掛けて、整理すると $4x^2-20x+25=0$

左辺を因数分解して $(2x-5)^2=0$

すなわち $2x-5=0$

よって $x = \frac{5}{2}$

(7) 両辺を展開して $x^2+5x-6=7x-3x^2$

整理すると $4x^2-2x-6=0$

両辺を 2 で割って $2x^2-x-3=0$

左辺を因数分解して $(x+1)(2x-3)=0$

よって $x+1=0$ または $2x-3=0$

したがって $x = -1, \frac{3}{2}$

(8) $x+2=X$ とおくと $X^2-5X+5=0$

解の公式により

$$X = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$よって x+2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$したがって x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

別解 左辺を展開して整理すると $x^2-x-1=0$

解の公式により

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(9) 両辺に 100 を掛けて $15x(20-5x)=50x+200$

両辺を 5 で割って $3x(20-5x)=10x+40$
 両辺を 5 で割って $3x(4-x)=2x+8$
 展開して整理すると $3x^2-10x+8=0$
 左辺を因数分解して $(x-2)(3x-4)=0$
 よって $x-2=0$ または $3x-4=0$
 したがって $x=2, \frac{4}{3}$

参考 最初に両辺に 4 を掛けてもよい。

(10) 解の公式により

$$x = \frac{-(-5\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \quad \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ であるから } x = 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$$

29 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2 = x$ (2) $x^2 = 2x$
 (3) $x^2 = -x$ (4) $2x^2 = 3x$

解答 (1) $x=0, 1$ (2) $x=0, 2$ (3) $x=-1, 0$ (4) $x=0, \frac{3}{2}$

解説

(1) 左辺に移項して $x^2 - x = 0$ 因数分解して $x(x-1) = 0$

よって $x=0$ または $x-1=0$

すなわち $x=0$ または $x=1$

ゆえに, 解は $x=0, 1$

(2) 左辺に移項して $x^2 - 2x = 0$ 因数分解して $x(x-2) = 0$

よって $x=0$ または $x-2=0$

すなわち $x=0$ または $x=2$

ゆえに, 解は $x=0, 2$

(3) 左辺に移項して $x^2 + x = 0$ 因数分解して $x(x+1) = 0$

よって $x=0$ または $x+1=0$

すなわち $x=0$ または $x=-1$

ゆえに, 解は $x=0, -1$

(4) 左辺に移項して $2x^2 - 3x = 0$ 因数分解して $x(2x-3) = 0$

よって $x=0$ または $2x-3=0$

すなわち $x=0$ または $x=\frac{3}{2}$

ゆえに, 解は $x=0, \frac{3}{2}$