(311)

$y=\cos x \ (0\leqq x\leqq \pi)$ の逆関数

は $x=\cos y \ (0\leqq y\leqq \pi)$ …①

①の両辺を x で微分して

$$\frac{d}{dx}x=\frac{d}{dx}\cos y$$

$$1=\frac{dy}{dx}\times\frac{d}{dy}\cos y$$

$$1=\frac{dy}{dx}\times(-\sin y)$$

$0<y<\pi$ より $\sin y>0$ よって

両辺 $\sin y$ で割って

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y} \quad \cdots ②$$

ここで①より $\sin^2 y+\cos^2 y=1$

よって $\sin^2 y=1-\cos^2 y$

$\sin y>0$ より $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}$

②を代入して $\sin y=\sqrt{1-x^2}$

標
底
守
活動
違い

$0<y<\pi$ より $\sin y>0$

両辺 $\sin y$ で割って

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}\quad\cdots②$$

逆関数

$\pi)\cdots①$

ここで①より $\sin^2 y+\cos^2 y=1$

よって $\sin^2 y=1-\cos^2 y$

$\sin y>0$ より $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}$

①を代入して $\sin y=\sqrt{1-x^2}$

よって②に代入して

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

さらに x で微分して

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left\{-\frac{(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^2}\times\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2)'$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^2}\times\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times(-2x)$$

y は x の式にならないが
y' は x の式になる

$$=-\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

商の微分

よって $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\sqrt{1-\frac{3}{4}})^3}$$

$$=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2})^3}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{8}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{8}{1}=-4\sqrt{3}$$