第４回定期考査(数学Ⅲ)Ｒ４．１２．９　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ $2x^2-6y^2-xy+10x+y+12$ を因数分解せよ。

$\boxed{2}$ 連立不等式 $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5} \geqq \dfrac{5-x}{3} \\ 3x-5 \leqq 2x-6+a \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど4個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ a を定数とする関数 $f(x)=x^2+2x-a^2+5$ を考える。すべての x について $f(x)>0$ であるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ と $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$ $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ を展開したときの x^3 の係数を求めよ。

$\boxed{6}$ $\dfrac{5561}{6059}$ をこれ以上約分できない分数に直せ。

$\boxed{7}$ 10人の学生を4人，3人，3人の3つのグループに分ける方法は何通りあるか答えよ。

$\boxed{8}$ $a>0$ とする。3辺の長さが a，a^2，a^3 となる三角形が存在する a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{9}$ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ の値を求めよ。

10 関数 $f(x)=x^2+ax-2a+6$ の $x \geqq 0$ における最小値が 1 であるとき，a の値を求めよ。

11 次の□に入る数を答えよ。

$$1+1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{16}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{21}{2^{20}}=\boxed{\text{ア}}-\frac{\boxed{\text{イ}}}{2^{20}}$$

12 t は $0<t<1$ を満たす定数とする。三角形OABにおいて，辺OAを $2:3$ に内分する点をC，辺OBを $t:(1-t)$ に内分する点をD，線分ADと線分BCの交点をEとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

13 k を正の定数とする。円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ と直線 $y=-\frac{1}{2}x+k$ が共有点を持たないような定数 k の値の範囲を求めよ。

14 平面上に3つの定点O，A，Bを△OABの面積が 1 であるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ を満たす実数 s，t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ で点Pを定める。

(1) s，t が $1 \leqq s+t \leqq 2$ を満たすとき，Pが存在する領域 D の面積を求めよ。

(2) s，t が $1 \leqq s+2t \leqq 3$ を満たすとき，Pが存在する領域 E の面積を求めよ。

第４回定期考査(数学Ⅲ)Ｒ４．１２．９　　　　　　　　(　　　)組(　　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1 $2x^2-6y^2-xy+10x+y+12$ を因数分解せよ。

ここで符号まちがえる

$2x^2-6y^2-xy+10x+y+12$

$=2x^2+(-y+10)x-(6y^2-y-12)$

$=2x^2+(-y+10)x-(3y+4)(2y-3)$

$=\{2x+(3y+4)\}\{1\cdot x-(2y-3)\}$

$=(2x+3y+4)(x-2y+3)$

2　2　6

2 連立不等式 $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{5}\geqq\dfrac{5-x}{3}\\ 3x-5\leqq 2x-6+a\end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど４個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\dfrac{2x+1}{5}\geqq\dfrac{5-x}{3}$

$\times 15$

$3(2x+1)\geqq 5(5-x)$

$6x+3\geqq 25-5x$

$11x\geqq 22$

$x\geqq 2$ …①　2

$3x-5\leqq 2x-6+a$

$x\leqq -1+a$ …②　2

xの範囲に等号があることも考えると

$5\leqq a-1<6$

よって

$6\leqq a<7$　6

$a=6$となるときaは含まれると思う者　イコール　-1

3 a を定数とする関数 $f(x)=x^2+2x-a^2+5$ を考える。すべての x について $f(x)>0$ であるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$y=f(x)$のグラフは

$y=x^2+2x-a^2+5$

$=(x+1)^2-1^2-a^2+5$

$=(x+1)^2-a^2+4$　2

頂点 $(-1,\ -a^2+4)$

よって（頂点のy座標）>0 ならばよい

$-a^2+4>0$　2

$\times(-1)$

$a^2-4<0$

$(a-2)(a+2)<0$

$-2<a<2$　6

(別) 判別式

$D/4=1^2-1\cdot(-a^2+5)$

$=a^2-4$　2

$D/4<0$ ならばよい

$a^2-4<0$　2

$-2<a<2$

D>0となる者多し　イコール　-1

4 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ と $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ。

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}$　2

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}$　2

$=(\sqrt{5})^2-2=3$　5

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$　3

$=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}$

$=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

直接計算している　5

5 $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ を展開したときの x^3 の係数を求めよ。

一般項

${}_5C_r(2x)^r\left(-\dfrac{1}{x}\right)^{5-r}$　2

$={}_5C_r\cdot 2^r\cdot x^r\cdot(-1)^{5-r}\dfrac{1}{x^{5-r}}$

$={}_5C_r\cdot 2^r(-1)^{5-r}\cdot x^{r-(5-r)}$

$={}_5C_r\cdot 2^r(-1)^{5-r}\cdot x^{2r-5}$

$(0\leqq r\leqq 5)$

x^3の係数は $2r-5=3$

よって $2r=8$ より $r=4$　2

であるから

${}_5C_4\cdot 2^4(-1)^{5-4}$

$=5\cdot 2^4\cdot(-1)$

$=5\cdot 16\cdot(-1)$

$=-80$　6

かっこつけ忘し　-1

80 や ${}_5C_3\cdot 2^3\cdot(-1)^2=80$　2

（これは x の係数）

6 $\dfrac{5561}{6059}$ をこれ以上約分できない分数に直せ。

ユークリッドの互除法より

5561と6059の最大公約数は83である。　3

$\dfrac{5561}{6059}=\dfrac{83\times 67}{83\times 73}=\dfrac{67}{73}$　6

$6059=5561\times 1+498$, $5561=498\times 11+83$, $498=83\times 6$

$6059\div 83=73$, $5561\div 83=67$

1　1

互除法まちがっている

7 10人の学生を4人，3人，3人の3つのグループに分ける方法は何通りあるか答えよ。

A(4人) B(3人) C(3人) とすると，分け方は

${}_{10}C_4\times{}_6C_3\times{}_3C_3$ 通りである。部屋A，B，Cの区別をなくすと，B，Cの並べ方の2！通りずつ同じものが現れるので　2

$\dfrac{{}_{10}C_4\times{}_6C_3\times{}_3C_3}{2!}=\dfrac{\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}}{2!}=\dfrac{10\cdot 3\cdot 7\cdot 5\cdot 4}{2!}$　2

$=10\cdot 3\cdot 7\cdot 5\cdot 2$

$=2100$ 通り　6

式は正しいが答えがちがう

${}_{10}C_4\times{}_6C_3\times\dfrac{3!}{2!}$ ミス多し

場合分けしていない　3つ考えていない　余計な定理分かっていて解けるが大変

8 $a>0$ とする。3辺の長さが a，a^2，a^3 となる三角形が存在する a の値の範囲を求めよ。

不等号逆の者多し

2辺の和が残り1辺より長ければいいので

$a+a^2>a^3$ …①

$a^2+a^3>a$ …②

$a^3+a>a^2$ …③

①より aで割って

$1+a>a^2$

$a^2-a-1<0$，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　1

②より aで割って

$a+a^2>1$

$a^2+a-1>0$　$a<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a$　1

③より aで割って

$a^2+1>a$

$a^2-a+1>0$ すべての実数

共通範囲より

$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　6

9 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ の値を求めよ。

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

両辺2乗して　2乗忘れる者多し

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$　2

$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$　2で割る者多し

ここで

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}$　2

$=1\div\left(-\dfrac{3}{8}\right)=1\times\left(-\dfrac{8}{3}\right)$

$=-\dfrac{8}{3}$　6

58

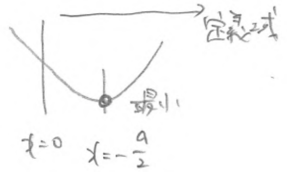
10 関数 $f(x)=x^2+ax-2a+6$ の $x\geqq 0$ における最小値が1であるとき，a の値を求めよ。

$f(x)=x^2+ax-2a+6$

$=(x+\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2-2a+6$ 2

頂点$(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}-2a+6)$

・$-\frac{a}{2}\geqq 0$ $(a\leqq 0)$ のとき



$x=-\frac{a}{2}$で最小

最小値 $-\frac{a^2}{4}-2a+6$

これが1より

$-\frac{a^2}{4}-2a+6=1$

$-\frac{a^2}{4}-2a+5=0$ 1

$\times(-4)$ $a^2+8a-20=0$

$(a+10)(a-2)=0$

$a=-10,\ 2$

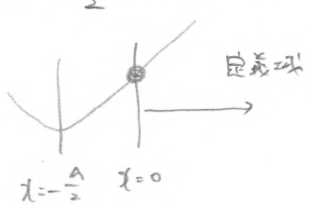
$a\leqq 0$より$a=2$は不適

よって $a=-10$ 1

場合分けをしていない

軸が $x=\frac{a}{2}$ 多し

・$-\frac{a}{2}<0$ $(a>0)$ のとき



$\frac{a}{2}<0 \to a<2$?

$x=0$で最小

最小値 $f(0)=-2a+6$ 1

これが1より

$-2a+6=1$

$-2a=-5$, $a=\frac{5}{2}$ $(a>0$を満たす$)$ 1

以上より

$a=-10,\ \frac{5}{2}$ 6

11 次の□に入る数を答えよ。

$$1+1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{16}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{21}{2^{20}}=\boxed{ア}-\frac{\boxed{イ}}{2^{20}}$$

$\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{21}{2^{20}}=S$とおく。

解法を知らない者が多い

$S=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{21}{2^{20}}$

$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{20}{2^{20}}+\frac{21}{2^{21}}$ 2 (−

$\frac{1}{2}S=\underbrace{\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{20}}}_{21個}-\frac{21}{2^{21}}$

← 20個の者多し

1 1

$=\frac{\frac{1}{2^0}\{1-(\frac{1}{2})^{21}\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{21}{2^{21}}$ 2

$=\frac{1}{2^0}\{1-(\frac{1}{2})^{21}\}\div(\frac{1}{2})-\frac{21}{2^{21}}$

$=\frac{1}{1}(1-\frac{1}{2^{21}})\times 2-\frac{21}{2^{21}}$

$=2-\frac{2}{2^{21}}-\frac{21}{2^{21}}=2-\frac{23}{2^{21}}$

$\frac{1}{2}S=2-\frac{23}{2^{21}}$ より両辺2倍して

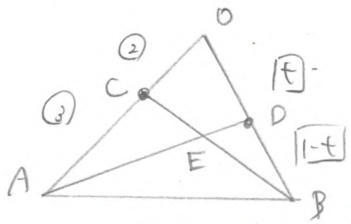
$S=4-\frac{23}{2^{20}}$ 6

12 tは$0<t<1$を満たす定数とする。三角形OABにおいて，辺OAを2：3に内分する点をC，辺OBを$t:(1-t)$に内分する点をD，線分ADと線分BCの交点をEとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AD}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，tを用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{BC}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{OE}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，tを用いて表せ。



(1)

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=t\vec{b}-\vec{a}$ 4

内分の公式で間違える
$(\overrightarrow{AO}=-\vec{a})$

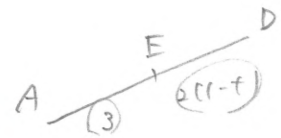
(2)

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\frac{2}{5}\vec{a}-\vec{b}$ 4

(3)

△OADと直線BCについてメネラウスの定理から

$\frac{OC}{CA}\times\frac{AE}{ED}\times\frac{DB}{BO}=1$



$\frac{2}{3}\times\frac{AE}{ED}\times\frac{1-t}{1}=1$ 3

$\frac{2(1-t)}{3}\times\frac{AE}{ED}=1$ より $\frac{AE}{ED}=\frac{3}{2(1-t)}$

したがって AE：ED$=3:2(1-t)$

内分の公式より

$\overrightarrow{OE}=\frac{2(1-t)\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OD}}{3+2(1-t)}$

$=\frac{2(1-t)\overrightarrow{OA}+3\times t\overrightarrow{OB}}{5-2t}=\frac{2(1-t)\vec{a}+3t\vec{b}}{5-2t}$ 6

$\begin{cases}1-m=\frac{2}{5}n\\ tm=1-n\end{cases}$ 3 ← この方程式が解けない

△OABでチェバを用いている 3

13 kを正の定数とする。円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ と直線 $y=-\frac{1}{2}x+k$ が共有点を持たないような定数kの値の範囲を求めよ。

代入すると大変

$(2y=-x+2k)$

$k^2-4k-1>0$ ならばよいから 4

2kになっていない者がいる

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$

$(x^2-4x)+(y^2-2y)+1=0$

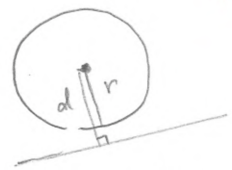
$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+1=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 2

中心$(2,1)$，半径2

半径4の者がいる

読んでいない



中心$(2,1)$と直線$x+2y-2k=0$

との距離dは

$d=\frac{|2+2\cdot 1-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|4-2k|}{\sqrt{5}}$

よって共有点をもたないので $d>r$

不等号逆の者多し

$\frac{|4-2k|}{\sqrt{5}}>2$ 2

絶対値がない者あり

$\times\sqrt{5}$

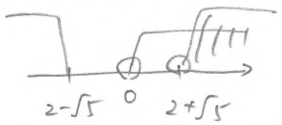
$|2k-4|>2\sqrt{5}$

$2k-4<-2\sqrt{5}$，$2\sqrt{5}<2k-4$

$2k<4-2\sqrt{5}$，$4+2\sqrt{5}<2k$

$k<2-\sqrt{5}$，$2+\sqrt{5}<k$

$k>0$との共通範囲より



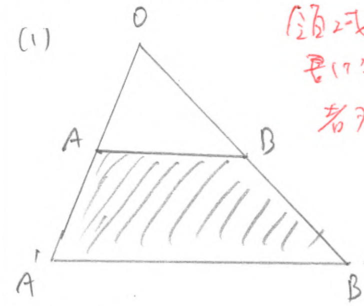
$2+\sqrt{5}<k$ 6

14 平面上に3つの定点O，A，Bを△OABの面積が1であるようにとる。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とおき，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$を満たす実数$s$，$t$に対して，$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$で点Pを定める。

(1) s，tが$1\leqq s+t\leqq 2$を満たすとき，Pが存在する領域Dの面積を求めよ。

(2) s，tが$1\leqq s+2t\leqq 3$を満たすとき，Pが存在する領域Eの面積を求めよ。

(1)



3

領域を書けない者多し

$D=3$ 1

$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$とすると領域Dは

台形AA'B'Bの内部（境界含む）

△OAB∽△OA'B'より

△OAB：△OA'B'$=1^2:2^2$

よって△OA'B'$=4$

ゆえに台形AA'B'Bの面積は3 2 5

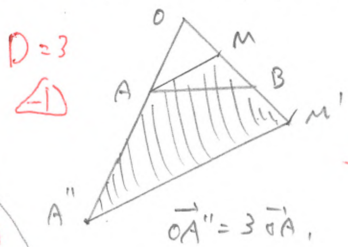
(2)

$1\leqq s+2t\leqq 3$

$2t=t'$，$\frac{1}{2}\vec{b}=\overrightarrow{OM}$とおくと

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}=s\vec{a}+(2t)(\frac{1}{2}\vec{b})$

$=s\vec{a}+t'\overrightarrow{OM}$，$2t\geqq 0$より$t'\geqq 0$



3

$\overrightarrow{OA''}=3\overrightarrow{OA}$，

$\overrightarrow{OM'}=3\overrightarrow{OM}$とすると

領域Eは

台形AA''M'Mの内部

（境界含む）

△OAMの面積は$\frac{1}{2}$

△OAM：△OA''M'$=1^2:3^2$

よって△OA''M'$=\frac{9}{2}$

台形AA''M'Mの

面積は$\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$ 2

5