第４回定期考査(数学Ｉ演習)Ｒ４．１２．８　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ はじめに，点 A が座標平面上の原点 O にある。さいころを投げる試行を行い，出た目の数にしたがって点 A は座標平面上を次のように動く：

・1 または 2 の目が出れば x 軸の正の方向に 1 だけ進む

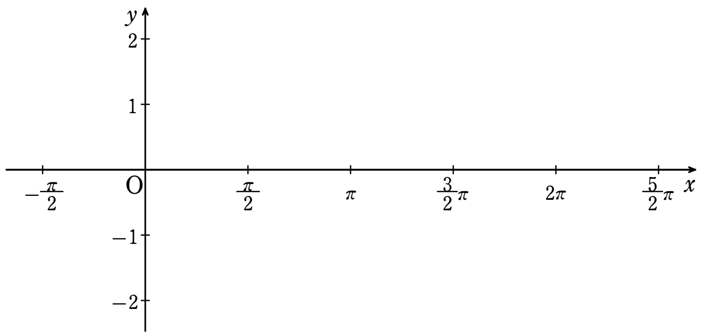
・3 または 4 の目が出れば y 軸の正の方向に 1 だけ進む

・それ以外の目が出れば動かずにその場にとどまる

(1) 3 回の試行の後に点 A が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。

(2) 4 回の試行の後に点 A が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。

$\boxed{2}$ $y=\sin x+\cos x$ のグラフを書け。



$\boxed{3}$ 正十二面体の頂点の数と辺の数を求めよ。

$\boxed{4}$ $1<x$ とする。不等式 $\log_x 2>\log_2 x$ を解け。

$\boxed{5}$ 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ 関数 $y=|x|+|x-3|$ の最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ $\sqrt[3]{2}$ を小数で表したときの小数第2位の数字を求めよ。

$\boxed{8}$ O を原点とする座標平面において，円 $x^2+y^2=4$ を C，円 $x^2+(y-5)^2=1$ を C' とし，C' の中心を O$'$ とする。C と C' の両方に接する直線のうち，C との接点と C' との接点がともに第 1 象限にある直線を ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。

$\boxed{9}$ 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$, $a_{n+1}=5a_n+3^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

$\boxed{10}$ a を定数とする。 x についての方程式 $4^x+4^{-x}-2^{x+3}-2^{-x+3}+20-a=0$ の異なる実数解の個数を， a の値の範囲によって場合分けして求めよ。

常用対数表

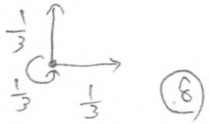
数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067

第４回定期考査(数学Ｉ演習)R４．１２．８　　ダメ $(\log_2 x)^2<1 \Rightarrow \log_2 x<1$　$\log_2 x=-1 \to x=-2$　ねーし -2　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 はじめに，点 A が座標平面上の原点 O にある。さいころを投げる試行を行い，出た目の数にしたがって点 A は座標平面上を次のように動く：

・1 または 2 の目が出れば x 軸の正の方向に 1 だけ進む
・3 または 4 の目が出れば y 軸の正の方向に 1 だけ進む
・それ以外の目が出れば動かずにその場にとどまる

(1) 3 回の試行の後に点 A が点 (1，2) にある確率を求めよ。
(2) 4 回の試行の後に点 A が点 (1，2) にある確率を求めよ。



⑥

(1) →1回 ↑2回 より ${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

${}_3C_1$ ない者ダメ

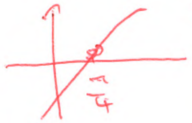
(2) →1回 ↑2回 ⟲1回より

$\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{4}{27}$　⑧

$4!$　${}_4C_1$ ダメ

${}_4C_2$.

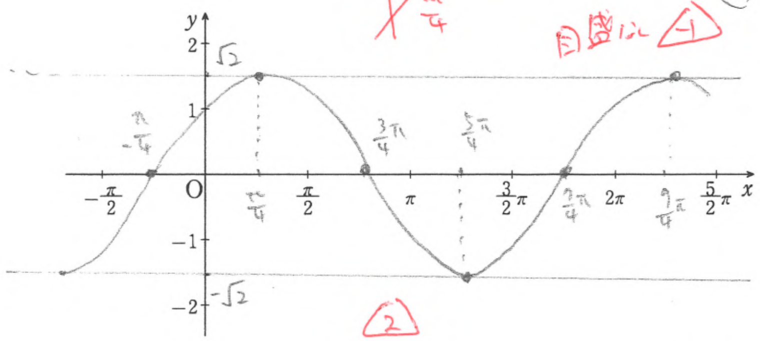
2 $y=\sin x+\cos x$ のグラフを書け。



ダメ　グラフ足りない -1

⑧

目盛に -1



②

$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ より $y=\sin x$ のグラフを x 軸をもとにして y 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍し，x 軸方向に $-\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したもの

3 正十二面体の頂点の数と辺の数を求めよ。

オイラーの多面体定理より $v-e+f=2$ (頂)(辺)(面)　(vertex edge face)

知らない者ダメ

1つの辺の両端に面がくるので，

12面 × 五角形 = 60 本．より，2回ずつ同じ辺を数えているので．$60\div2=30$ 本　つまり辺は 30 本　⑧ (7.4)

よって $v-30+12=2$ より $v=20$．つまり頂点 20 個

4 $1<x$ とする。不等式 $\log_x 2>\log_2 x$ を解け。ダメし

底の変換公式より

$\log_x 2=\frac{\log_2 2}{\log_2 x}=\frac{1}{\log_2 x}$

よって $\frac{1}{\log_2 x}>\log_2 x$ ……(＊)

ここで $x>1$ より $\log_2 x>\log_2 1=0$

(＊)の両辺に $\log_2 x$ をかけても不等号の向きは変わらない

$1>(\log_2 x)^2$

これが(分かってるなら)惜しい

よって $(\log_2 x)^2-1<0$

$(\log_2 x+1)(\log_2 x-1)<0$

底を

④

$-1<\log_2 x<1$

$\log_2 2^{-1}<\log_2 x<\log_2 2^1$

底 2 は 1 より大きいので

$2^{-1}<x<2^1$　②

よって $(0<\log_2 x<1)$

$\frac{1}{2}<x<2$　②

$x>1$ との共通範囲から

$1<x<2$

⑧

5 和 $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$ を求めよ。

底を 2 に 引き出す

n, 2 なし -1

k がん -1

$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$

④

$=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$

$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)$

$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{2}{4}n(n+1)(2n+1)+\frac{4}{4}n(n+1)$

$=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$

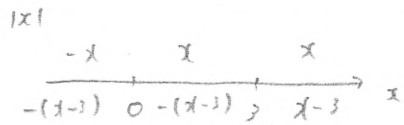
$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)$

$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$　⑧

Σk^3 を知らない。

因数分解 (つーないっダメ)

6 関数 $y=|x|+|x-3|$ の最小値を求めよ。



・$x<0$ のとき

$y=(-x)-(x-3)=-2x+3$

・$0\leqq x<3$ のとき

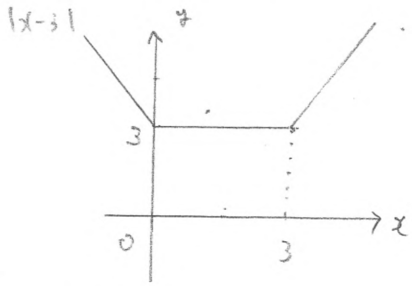
$y=x-(x-3)=3$

・$3\leqq x$ のとき

$y=x+(x-3)=2x-3$

グラフより，最小値 3

($0\leqq x\leqq3$ を満たすすべての x)



⑧

説明なしは -4

場合分けが違うのは -2

7 $\sqrt[4]{2}$ を小数で表したときの小数第2位の数字を求めよ。

$\log_{10}\sqrt[4]{2}=\log_{10}2^{\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{4}\log_{10}2$

$=\frac{1}{4}\times0.3010$ ← 常用対数表より

$=0.07525$　②

常用対数表より

$0.0719<0.07525<0.0755$

$\log_{10}1.18<\log_{10}\sqrt[4]{2}<\log_{10}1.19$　④

底 10 は 1 より大きいので

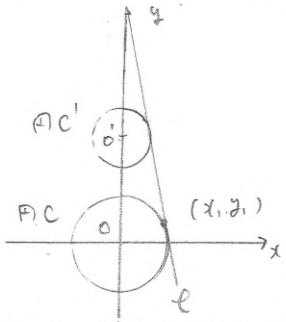
$1.18<\sqrt[4]{2}<1.19$

したがって $\sqrt[4]{2}$ を小数で表したときの小数第2位の数字は 8 である。

⑧

64

8 Oを原点とする座標平面において，円 $x^2+y^2=4$ を C，円 $x^2+(y-5)^2=1$ を C' とし，C' の中心を O' とする。C と C' の両方に接する直線のうち，C との接点と C' との接点がともに第1象限にある直線を ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。



円Cとℓの接点を(x_1, y_1)とする。
すると接線ℓは
$$x_1 x + y_1 y = 4$$
とおける。また点(x_1, y_1)は
円C上の点より
$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \cdots ①$$
を満たす。また円C'について
接線ℓと中心(0, 5)の距離
が半径1に等しいので
$$\frac{|x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = 1$$
①代入して
$$\frac{|5y_1 - 4|}{\sqrt{4}} = 1$$

$$|5y_1 - 4| = 2$$
$$5y_1 - 4 = \pm 2$$
$$y_1 = \frac{4 \pm 2}{5} \text{ より } y = \frac{6}{5}, \frac{2}{5}$$

6

$y_1 = \frac{6}{5}$ のとき ①より $x_1^2 = 4 - \frac{36}{25} = \frac{64}{25}$

$x_1 > 0$ より $x_1 = \frac{8}{5}$

$y = \frac{2}{5}$ のとき ①より $x_1^2 = 4 - \frac{4}{25} = \frac{96}{25}$

$x_1 > 0$ より $x_1 = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

$(x_1, y_1) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ のとき

$\ell: \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = 4$ より $y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$

y切片が O と O' の間にあるので
これでは円C'と第2象限で
接するため不適

$(x_1, y_1) = \left(\frac{4\sqrt{6}}{5}, \frac{2}{5}\right)$ のとき

$\ell: \frac{4\sqrt{6}}{5}x + \frac{2}{5}y = 4$

よって $y = -2\sqrt{6}x + 10$

12

y切片(0, 10)

6

傾き$-2\sqrt{6}$

4

9 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n + 3^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

与えられた漸化式が実数kを用いて
$$a_{n+1} - k \cdot 3^{n+1} = 5(a_n - k \cdot 3^n)$$
と変形できたとする。この式を展開して
$$a_{n+1} - k \cdot 3^{n+1} = 5a_n - 5k \cdot 3^n$$
$$a_{n+1} - 3k \cdot 3^n = 5a_n - 5k \cdot 3^n$$
$$a_{n+1} = 5a_n - 2k \cdot 3^n$$
よって比較して $-2k = 1$ つまり $k = -\frac{1}{2}$ ならばよい。

ゆえに
$$a_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} = 5\left(a_n + \frac{1}{2} \cdot 3^n\right) \quad \cdots\cdots (*)$$
と変形して，$a_n + \frac{1}{2} \cdot 3^n = b_n$ とおくと，$a_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1}$ は b_{n+1}
となるので $(*)$ は
$$b_{n+1} = 5b_n$$
となる。また $b_1 = a_1 + \frac{1}{2} \cdot 3^1 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$
よって数列$\{b_n\}$は初項$\frac{5}{2}$，公比5の等比数列
一般項 b_n は
$$b_n = \frac{5}{2} \cdot 5^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 5^n$$

12

よって
$$a_n + \frac{1}{2} \cdot 3^n = \frac{1}{2} \cdot 5^n \text{ より } a_n = \frac{5^n - 3^n}{2}$$

特性方程式で $c = 5c + 3^n$ とする者がいる

階差でいう2がない → -2　　kが n に -1

答えにつながる変形 → 4

a_n の手前の一般項 → 6

10 a を定数とする。x についての方程式 $4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20 - a = 0$ の異なる実数解の個数を，a の値の範囲によって場合分けして求めよ。

$t = 2^x + 2^{-x}$ とおく。
$$a = 4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20$$
$$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} - 2^x \cdot 2^3 - 2^{-x} \cdot 2^3 + 20$$
$$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^0 - 2^3(2^x + 2^{-x}) + 20$$
ここでミスする者多し
$$= t^2 - 2 - 8t + 20 = t^2 - 8t + 18$$

2

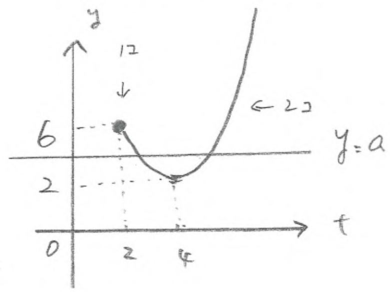
ここで $2^x > 0$，$2^{-x} > 0$ より相加・相乗平均の関係から
$$t = 2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} \quad \text{つまり } t \geqq 2$$

2

また，$t = 2^x + \frac{1}{2^x}$ より両辺に 2^x をかけて
$$t \cdot 2^x = (2^x)^2 + 1 \quad \text{よって } (2^x)^2 - t \cdot 2^x + 1 = 0$$
解の公式から $2^x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$

よって $t = 2$ となる x は1つだけ（$x = 0$ のみ）
$t > 2$ となる x は2つ存在する。

$t \geqq 2$ において $y = t^2 - 8t + 18$ のグラフを書くと
$$y = (t-4)^2 - 4^2 + 18$$
$$= (t-4)^2 + 2$$
頂点(4, 2) 下に凸



よって直線 $y = a$ と
$y = t^2 - 8t + 18$ のグラフの
共有点の個数と，その共有点において x が1個か2個かを
考えると，

$2 < a < 6$ … 実数解4個
$a = 6$ … 実数解3個
$a = 2$，$6 < a$ … 実数解2個
$a < 2$ … 実数解0個

値があっても考え方が正しい → 各1

各2

12

$t \geqq 2$ がない

0個の場合を書かない者あり