第３回定期考査(積分法とその応用)R４．９．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int\frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}dx$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。　(1) $\displaystyle\int(3x+1)^4dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{3x-1}dx$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\boxed{4}$ $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。また，不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{2x^2+1}{x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int\sin 3x\cos x\,dx$

$\boxed{6}$ 関数 $\displaystyle\int_0^{2x}\sin\theta\,d\theta$ を x で微分せよ。

$\boxed{7}$ a は正の定数とする。定積分 $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ。

$\boxed{8}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$ を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の極限値を求めよ。

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$\boxed{10}$ 曲線 $y=\log x$ と2直線 $x=e$，$y=0$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{11}$ 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=\dfrac{x}{2}$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{12}$ 放物線 $y=x^2-4$ と直線 $y=3x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{13}$ 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=10$ で囲まれる部分を，y 軸の周りに1回転させてできる容器に毎秒 v の水を入れる。

(1) 水の深さが h のときの，水の体積を求めよ。

(2) 水の深さが h のときの，水面の上昇速度を求めよ。

第３回定期考査(積分法とその応用)R４．９．２９　Cなし -1　かっこなし -1　、文字を戻していない -2　dxなし -1　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1 次の不定積分を求めよ。$\int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}dx$　6

解答　C は積分定数とする。$x+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^3}+C$

ここがマイナスの者多い

解説
C は積分定数とする。

$$\int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}dx=\int \frac{x^4-5x^2+6}{x^4}dx=\int\left(1-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^4}\right)dx=x+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^3}+C$$

2 次の不定積分を求めよ。　(1) $\int(3x+1)^4dx$　　(2) $\int e^{3x-1}dx$

解答　C は積分定数とする。(1) $\frac{1}{15}(3x+1)^5+C$　6　(2) $\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$　6

解説
C は積分定数とする。

(1) $\int(3x+1)^4dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x+1)^5+C=\frac{1}{15}(3x+1)^5+C$

$\frac{1}{12}(3x+1)^5$ ミス多し
$\frac{1}{5}(3x+1)^5$

(2) $\int e^{3x-1}dx=\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$

$\frac{81}{5}x^5+27x^4+18x^3+6x^2+x+C$ もO.K.

$\frac{1}{3}e^{3x}$ △2　$\frac{1}{3(3x-1)}e^{3x-1}$ ミス多し

3 次の不定積分を求めよ。
(1) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　(2) $\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$

解答　C は積分定数とする。　(1) $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$　6　(2) $\log(e^x+1)+C$　6

解説
C は積分定数とする。

(1) $x^2+1=u$ とおくと　$2xdx=du$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}\cdot 2xdx$$

$\frac{1}{2}\int u\,du$ にする者多し

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$　4

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$$

(2) $\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\log(e^x+1)+C$

$\log|e^x+1|+C$ △

問題文がルートなので
答えもルート。
$\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$ △1

4 $\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。また，不定積分 $\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ を求めよ。

解答　$a=-1$，$b=2$，$\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$　(C は積分定数)　6
2　4

解説
等式の両辺に $(x+1)(x+2)$ を掛けて　$x=a(x+2)+b(x+1)$
よって　$x=(a+b)x+(2a+b)$
これが x についての恒等式であるから，両辺の同じ次数の項の係数を比較して
$a+b=1$，$2a+b=0$
これを解いて　$a=-1$，$b=2$
したがって

$$\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$
$$=-\log|x+1|+2\log|x+2|+C$$　2
$$=\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$$　(C は積分定数)

$2\log\left|\frac{x+2}{x+1}\right|+C$ ミス多し

5 次の不定積分を求めよ。
(1) $\int\frac{2x^2+1}{x+1}dx$　　(2) $\int\sin 3x\cos x\,dx$

解答　C は積分定数とする。
(1) $x^2-2x+3\log|x+1|+C$　6　(2) $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$　6

解説
C は積分定数とする。　2

(1) $\frac{2x^2+1}{x+1}=2x-2+\frac{3}{x+1}$ であるから

$$\int\frac{2x^2+1}{x+1}dx=\int\left(2x-2+\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$=x^2-2x+3\log|x+1|+C$$

(2) $\int\sin 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$　2

$\frac{1}{2}$ がない

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$
$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

6 関数 $\int_0^{2x}\sin\theta\,d\theta$ を x で微分せよ。

ミス
$\frac{1}{2}\sin 2x$ 多し.

解答　$2\sin 2x$　6

解説
$F'(\theta)=\sin\theta$ とすると

$$\int_0^{2x}\sin\theta\,d\theta=\Big[F(\theta)\Big]_0^{2x}=F(2x)-F(0)$$

よって

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x}\sin\theta\,d\theta=\frac{d}{dx}\{F(2x)-F(0)\}=F'(2x)\cdot(2x)'$$
$$=2\sin 2x$$

7 a は正の定数とする。定積分 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ。

円の面積はダメ

解答　$\frac{1}{4}\pi a^2$　6

解説
$x=a\sin\theta$ とおくと　$dx=a\cos\theta\,d\theta$　← $dx=\cos\theta d\theta$ の者多し
x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\longrightarrow a$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

この範囲において $\cos\theta\geqq 0$ である。
また，$a>0$ であるから

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$

よって

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta)a\cos\theta\,d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$　3
$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}\pi a^2$$

$\frac{\pi}{2}+1$ も多し

8 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$ を求めよ。

$1-\frac{\pi}{2}$ 多し.

解答　$\frac{\pi}{2}-1$　6

$\frac{\pi}{2}\sin x-1$ も多し

解説

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x)'dx=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\sin x\,dx$$

ここがプラスになる

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-1$$

/66

$\boxed{9}$ 次の極限値を求めよ。

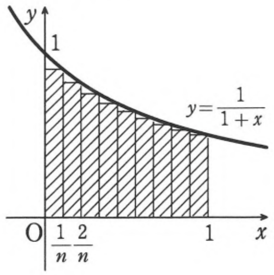
$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

解答　$\log 2$　(6)

解説

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$$



ここで，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とすると

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1$$

$$=\log 2$$

(3)

$\boxed{10}$ 曲線 $y=\log x$ と2直線 $x=e$，$y=0$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　1　(6)

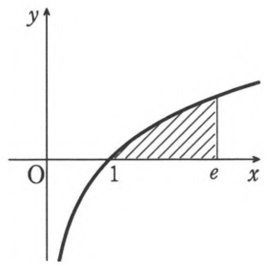
解説

$\log x=0$ を解くと　　$x=1$

$1\leqq x\leqq e$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_1^e\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^e=1$$

(3)



$\boxed{11}$ 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=\dfrac{x}{2}$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{4}{3}$　(6)

解説

曲線と直線の共有点の x 座標は，方程式 $\sqrt{x}=\dfrac{x}{2}$ の解である。

これを解くと　　$x=0,\ 4$

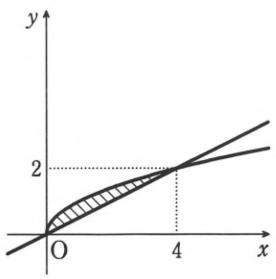
$x=0, 2$
多し

$0\leqq x\leqq 4$ では $\sqrt{x}\geqq\dfrac{x}{2}$ であるから

$$S=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{4}\right]_0^4$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2^3-4=\frac{4}{3}$$

(3)



$\boxed{12}$ 放物線 $y=x^2-4$ と直線 $y=3x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

面積を求めて
いる者がいる

解答　132π　(5)

解説

$x^2-4=3x$ を解くと　　$x=-1,\ 4$

$-(x^2-4)=3x$ を $x>0$ の範囲で解くと　　$x=1$

回転体は，図の斜線部分を x 軸の周りに1回転すると得られる。

したがって，求める体積は

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\{-(x^2-4)\}^2dx+\pi\int_1^4(3x)^2dx$$

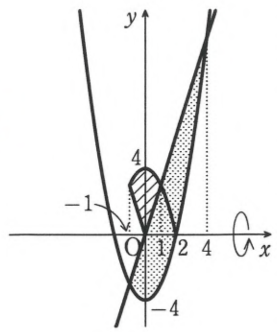
$$-\pi\int_{-1}^{0}(-3x)^2dx-\pi\int_2^4(x^2-4)^2dx$$

(3)

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^1+\pi\Big[3x^3\Big]_1^4$$

$$-\pi\Big[3x^3\Big]_{-1}^{0}-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_2^4$$

$$=\frac{406}{15}\pi+189\pi-3\pi-\frac{1216}{15}\pi=132\pi$$



πがない

体積の公式で

ちがう者多し

cf.　$\pi\int f^2dx-\pi\int g^2dx$

×　$\pi\int\{f-g\}^2dx$

$\boxed{13}$ 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=10$ で囲まれる部分を，y 軸の周りに1回転させてできる容器に毎秒 v の水を入れる。

(1)　水の深さが h のときの，水の体積を求めよ。

(2)　水の深さが h のときの，水面の上昇速度を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$　(5)　(2)　$\dfrac{v}{\pi e^{2h}}$　(5)

解説

t 秒後の水の深さを h，体積を V とする。

(1)　$y=\log x$ から　　$x=e^y$

よって　　$V=\pi\displaystyle\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^h=\frac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$

(2)　$V=\dfrac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$ の両辺を t で微分すると　　$\dfrac{dV}{dt}=\pi e^{2h}\cdot\dfrac{dh}{dt}$

$\dfrac{dV}{dt}=v$ であるから，求める水面の上昇速度は　　$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{v}{\pi e^{2h}}$