第３回定期考査(数学Ｉ演習)Ｒ４．９．２８　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}x+\cos\frac{2}{3}x\right)^2$ について考えよう。

(1)　$f(x)$ は $f(x)=\sin\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x-\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)+\boxed{\text{エ}}$

と変形できる。ア ～ エ を求めよ。ただし，ア ～ エ は一桁の自然数である。

(2)　$f(x)$ の正の周期のうち最小のものを答えよ。

$\boxed{2}$ (1) 1188 の正の約数うち，2 の倍数であるものの個数を求めよ。

(2) 1188 のすべての正の約数の積を 2 進法で表すと，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

$\boxed{3}$ 2 次関数 $y=-x^2+2x+2$ …… ① と2 次関数 $y=f(x)$ を考える。

$y=f(x)$ のグラフは，① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものであるとする。2 次不等式 $f(x)>0$ の解が $-2<x<3$ になるときの p, q の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ を　$a_1=3$，$a_{n+1}=-2a_n+8$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　で定める。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 自然数 n に対し $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。S_n を求めよ。

$\boxed{5}$ a を実数とし，x の整式 $P(x)$ を $P(x)=x^3+(a-1)x^2-(a+2)x-6a+8$ とする。

(1) 方程式 $P(x)=0$ の解がすべて実数となるような a の値の範囲を求めよ。

(2) (1)のとき，異なる実数解の個数がちょうど 2 個となるような a の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 大人 4 人，子ども 3 人の計 7 人を三つの部屋 A，B，C に分ける。ただし，各部屋は十分大きく，定員については考慮しなくてよい。

(1) どの部屋も大人が 1 人以上になる分け方は全部で何通りあるか。

(2) (1)のうち，三つの部屋に子ども 3 人が 1 人ずつ入る分け方は全部で何通りあるか。

$\boxed{7}$ 座標平面上に点 A(1，1) がある。直線 $y=2x-1$ を ℓ_1 とする。また，A を通り，ℓ_1 に垂直な直線を ℓ_2 とする。さらに，ℓ_1 と x 軸との交点を B，ℓ_2 と x 軸との交点を C とする。3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$ 白いボールが 3 個，黒いボールが 1 個入っている箱がある。この箱の中から 1 個のボールを取り出し，ボールの色を確認した後，ボールを箱に戻すという試行を 4 回行う。白いボールが取り出された回数を m とする。また，整数 n を次のように定義する。

- 白いボールが全く取り出されなかった場合は，$n=0$ とする。
- 白いボールは取り出されたが，2 回以上連続して白いボールが取り出されなかった場合は，$n=1$ とする。
- 白いボールが 2 回以上連続して取り出された場合は，白いボールが連続して取り出された回数の最大値を n とする。

例えば，

白，白，黒，白の順に取り出した場合は，$n=2$

白，白，白，白の順に取り出した場合は，$n=4$

である。

(1) $m=3$ となる確率を求めよ。

(2) $n=1$ となる確率を求めよ。

$\boxed{9}$ 原点をOとする座標空間に 3 つの点 A(3，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，1) がある。

(1) O から 3 つの点 A，B，C を含む平面に垂線を下ろし，この平面と垂線の交点を H とする。点 H の座標を求めよ。

(2) 四面体 OABC に内接する球の半径を求めよ。

1 関数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}x+\cos\frac{2}{3}x\right)^2$ について考えよう。

(1) $f(x)$ は $f(x)=\sin\left(\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x-\frac{\pi}{\boxed{ウ}}\right)+\boxed{エ}$

と変形できる。ア～エを求めよ。ただし，ア～エは一桁の自然数である。

(2) $f(x)$ の正の周期のうち最小のものを答えよ。

(1) $f(x)=\frac{1}{2}\{2\sin(\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\pi)\}^2$ ②

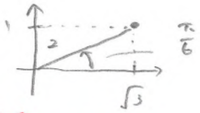
$=\frac{1}{2}\cdot 4\sin^2(\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\pi)$

$=2\cdot\frac{1}{2}\{1-\cos 2(\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\pi)\}$

$=1-\cos(\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\pi)$

$=1-\cos(\frac{4}{3}x-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi)$

$=1-\{-\sin(\frac{4}{3}x-\frac{1}{6}\pi)\}=\sin(\frac{4}{3}x-\frac{\pi}{6})+1$ ⑦



倍角の公式を知らない

$\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta$

(2) $\sin x$ の正の周期で最小なものは 2π より

$\sin\frac{4}{3}x$ の正の周期で最小なものは

$2\pi\div\frac{4}{3}=2\pi\times\frac{3}{4}=\frac{3\pi}{2}$ ③

求め方を知らない者 減点

2 (1) 1188の正の約数うち，2の倍数であるものの個数を求めよ。

(2) 1188のすべての正の約数の積を2進法で表すと，末尾には0が連続して何個並ぶか。

(1) $1188=11\times108$

$=11\times4\times27$

$=2^2\times3^3\times11$

よって 1188の正の約数で2の倍数であるものは

$2^a\times3^b\times11^c$

$\begin{pmatrix} a=1,2 \\ b=0,1,2,3 \\ c=0,1\end{pmatrix}$

と表せる。

数えて間違える

aのとり方は2通り

bのとり方は4通り

cのとり方は2通り より

2の倍数である約数は

$2\times4\times2=16$個 ⑦

(2) 1188のすべての正の約数の積を素因数分解したときの2の指数を求めればよい。

約数が $2^1\times3^b\times11^c$ $\begin{pmatrix} b=0,1,2,3 \\ c=0,1\end{pmatrix}$ の形であるものは $4\times2=8$個

約数が $2^2\times3^b\times11^c$ $\begin{pmatrix} b=0,1,2,3 \\ c=0,1\end{pmatrix}$ の形であるものも $4\times2=8$個

よって 1188のすべての正の約数の積において，

2^1は8個，2^2も8個

掛けられるので，全部で

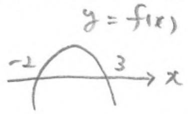
$1(個)\times8+2(個)\times8=24$個 ⑦

3 2次関数 $y=-x^2+2x+2$ ……① と2次関数 $y=f(x)$ を考える。

$y=f(x)$ のグラフは，①のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものであるとする。2次不等式 $f(x)>0$ の解が $-2<x<3$ になるときの p, q の値を求めよ。

①のグラフを x軸方向に p，y軸方向に q だけ動かしたグラフは

$y-q=-(x-p)^2+2(x-p)+2$



よって $y=-(x-p)^2+2(x-p)+2+q$ より

$f(x)=-(x-p)^2+2(x-p)+2+q$

$=-x^2+(2p+2)x+(-p^2-2p+2+q)$

ここで $-2<x<3$ が解になる2次不等式は

$(x+2)(x-3)<0$　$x^2-x-6<0$ より $-x^2+x+6>0$

より $f(x)>0$ が $-x^2+x+6>0$ となればいい。 ⑦

$\begin{cases} 2p+2=1 & (xの係数) \\ -p^2-2p+2+q=6 & (定数項)\end{cases}$　よって $p=-\frac{1}{2}, q=\frac{13}{4}$ ③ ④

4 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=3$，$a_{n+1}=-2a_n+8$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定める。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 自然数 n に対し $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。S_n を求めよ。

(1)
$a_{n+1}=-2a_n+8$
$-)\ \ c=-2c+8$ → $3c=8$, $c=\frac{8}{3}$
$a_{n+1}-c=-2(a_n-c)$

よって

$a_{n+1}-\frac{8}{3}=-2(a_n-\frac{8}{3})$ ②

と変形できる。

数列 $\{a_n-\frac{8}{3}\}$ は公比 -2 の等比数列 より

$a_n-\frac{8}{3}=(a_1-\frac{8}{3})(-2)^{n-1}$

$=(3-\frac{8}{3})(-2)^{n-1}$

$a_n=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}(-2)^{n-1}$ ⑦

(2) nの書き忘れ

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{\frac{8}{3}+\frac{1}{3}(-2)^{k-1}\}$

$=\frac{8}{3}n+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}$

初項 $(-2)^0$，比 -2 項数 n の等比数列の和

$=\frac{8}{3}n+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-2)^0\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$ ①

$=\frac{8}{3}n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(-2)^n}{3}$

$=\frac{24n}{9}+\frac{1-(-2)^n}{9}$

$=\frac{24n+1-(-2)^n}{9}$ ⑦

5 a を実数とし，x の整式 $P(x)$ を $P(x)=x^3+(a-1)x^2-(a+2)x-6a+8$ とする。

(1) 方程式 $P(x)=0$ の解がすべて実数となるような a の値の範囲を求めよ。

(2) (1)のとき，異なる実数解の個数がちょうど2個となるような a の値を求めよ。

組立除法している者がいる

(1) $P(-2)=-8+4(a-1)+2(a+2)-6a+8$
$=-8+4a-4+2a+4-6a+8$
$=0$

より $P(x)$ は $x+2$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & a-1 & -(a+2) & -6a+8 \\ & & -2 & -2a+6 & 6a-8 \\ \hline & 1 & a-3 & -3a+4 & 0\end{array}$$

$P(x)=(x+2)\{x^2+(a-3)x-3a+4\}$ ③

方程式 $P(x)=0$ の解は

$x+2=0$ または $x^2+(a-3)x-3a+4=0$

より，2次方程式 $x^2+(a-3)x-3a+4=0$ の解が実数ならば $P(x)=0$ の解はすべて実数

よって判別式

$D=(a-3)^2-4\cdot1\cdot(-3a+4)$

$=a^2-6a+9+12a-16$

$=a^2+6a-7\geqq0$

$(a+7)(a-1)\geqq0$

$a\leqq-7,\ 1\leqq a$ ⑦ ②

イコールなし

(2)

(1)より $P(x)=0$ は $x=-2$ を解にもつ。$P(x)=0$ の解がちょうど2個になるには

[1] $P(x)=0$ が -2以外の重解をもつ

[2] $P(x)=0$ が -2 と -2以外の2つの解をもつ

という2通りがある。

[1]のとき

判別式 $D=0$ となるのは $a=-7, 1$

$a=-7$ のとき

$x^2-10x+25=0$

$(x-5)^2=0$

$x=5$ より -2ではない

$a=1$ のとき

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$ より -2ではない ③

[2]のとき

$x^2+(a-3)x-3a+4=0$ が $x=-2$を解にもつので，代入して

$(-2)^2+(a-3)(-2)-3a+4=0$

$a=\frac{14}{5}$ となる。

このときもう1つの解を β とすると

$(-2)+\beta=-(a+3)$

$\beta=-(\frac{14}{5}+3)-(-2)$

となって，βは-2でないことが分かる。 ④

以上より

$a=-7, 1, \frac{14}{5}$ ⑦

確認がない ①

/59

6 大人4人，子ども3人の計7人を三つの部屋A，B，Cに分ける。ただし，各部屋は十分大きく，定員については考慮しなくてよい。

(1) どの部屋も大人が1人以上になる分け方は全部で何通りあるか。

(2) (1)のうち，三つの部屋に子ども3人が1人ずつ入る分け方は全部で何通りあるか。

(1)

大人4人の分かれ方 $3^4=81$ 通り　　${}_3C_1 2^4$ ダメ.

2部屋が空 … 3通り

1部屋が空 … ${}_3C_1(2^4-2)=42$ 通り

よって大人4人が空部屋なく

分かれる分かれ方は

$81-(3+42)=36$ 通り　△3

子ども3人の分かれ方は $3^3=27$ 通り

よって

$36\times27=972$ 通り　7

(2)

子どもの分かれ方は $3!=6$ 通り

よって　$36\times6=216$ 通り　7

7 座標平面上に点A(1，1)がある。直線 $y=2x-1$ を ℓ_1 とする。また，Aを通り，ℓ_1 に垂直な直線を ℓ_2 とする。さらに，ℓ_1 と x 軸との交点をB，ℓ_2 と x 軸との交点をCとする。3点A，B，Cを通る円の方程式を求めよ。

ℓ_2 の傾きを m とすると

$m\times2=-1$ より $m=-\frac{1}{2}$

よって

$\ell_2: y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$

つまり　$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

Cの座標は $y=0$ として

$0=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，$x=3$

よって　C(3, 0)

また，Aは ℓ_1 上の点である。

Bの座標は $y=0$ として

$0=2x-1$，$x=\frac{1}{2}$

よって　$B(\frac{1}{2}, 0)$

$\angle BAC=90^\circ$ より

3点A, B, Cを通る円は

線分BCを直径とする円である。

中心の座標は $(\frac{\frac{1}{2}+3}{2}, 0)$ より $(\frac{7}{4}, 0)$

半径は $\frac{7}{4}-\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$　△3　△4

よって円の方程式は

$(x-\frac{7}{4})^2+(y-0)^2=(\frac{5}{4})^2$

$(x-\frac{7}{4})^2+y^2=\frac{25}{16}$　7

$(2x^2+2y^2-7x+3=0)$

8 白いボールが3個，黒いボールが1個入っている箱がある。この箱の中から1個のボールを取り出し，ボールの色を確認した後，ボールを箱に戻すという試行を4回行う。白いボールが取り出された回数を m とする。また，整数 n を次のように定義する。

・白いボールが全く取り出されなかった場合は，$n=0$ とする。

・白いボールは取り出されたが，2回以上連続して白いボールが取り出されなかった場合は，$n=1$ とする。

・白いボールが2回以上連続して取り出された場合は，白いボールが連続して取り出された回数の最大値を n とする。

例えば，

白，白，黒，白の順に取り出した場合は，$n=2$

白，白，白，白の順に取り出した場合は，$n=4$

である。

(1)　$m=3$ となる確率を求めよ。

(2)　$n=1$ となる確率を求めよ。

(1)

4回中3回白いボールが取り出されたので　　${}_4C_3$ がない者ダメし.

${}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=4\cdot\frac{3^3}{4^4}=\frac{27}{64}$　3

(2)

$n=1$ となるのは

白・黒・黒・黒 …①

白・黒・白・黒 …②

白・黒・黒・白 …③

黒・白・黒・黒 …④

黒・白・黒・白 …⑤

黒・黒・白・黒 …⑥

黒・黒・黒・白 …⑦

の7通りである。このうち

①，④，⑥，⑦ の確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3$

②，③，⑤ の確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$

より，求める確率は

$4\times\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^3+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{4\times3+3\times3^2}{4^4}$

$=\frac{12+27}{4^4}$

$=\frac{39}{256}$　7

$n=0$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ の場合を引く

3つできていて △3

9 原点をOとする座標空間に3つの点A(3, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 1)がある。

(1) Oから3つの点A，B，Cを含む平面に垂線を下ろし，この平面と垂線の交点をHとする。点Hの座標を求めよ。

(2) 四面体OABCに内接する球の半径を求めよ。

(1)

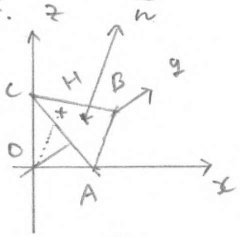
3点A, B, Cを通る平面の方程式は　$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$

$2x+3y+6z=6$ …① より　この平面の法線ベクトル

の1つは $\vec{n}=(2, 3, 6)$ と表すことができる。

$OH \parallel \vec{n}$ より $\vec{OH}=k\vec{n}$ となる実数 k が

存在する。よって $\vec{OH}=k(2, 3, 6)=(2k, 3k, 6k)$



点H $(2k, 3k, 6k)$ は平面ABC上の点より

①に代入して

$2\cdot2k+3\cdot3k+6\cdot6k=6$ より $49k=6$　　$k=\frac{6}{49}$

したがって　$H\left(2\cdot\frac{6}{49}, 3\cdot\frac{6}{49}, 6\cdot\frac{6}{49}\right)$ より　$H\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}\right)$　5

(2)

半径 r とすると内接球の中心は $K(r, r, r)$ とおける。

この球と平面ABCの接点をPとすると $\vec{KP}\perp$ (平面ABC)

であり $|\vec{KP}|=r$ である。ゆえに $\vec{KP}\parallel\vec{n}$ であり

$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$ であるから $\frac{1}{7}\vec{n}$ は単位ベクトル

になる。したがって　$\vec{KP}=r\times\frac{1}{7}\vec{n}$ とおけるので

$\vec{OP}-\vec{OK}=\frac{r}{7}\vec{n}$ より $\vec{OP}=\vec{OK}+\frac{r}{7}\vec{n}=(r, r, r)+\frac{r}{7}(2, 3, 6)$

つまり　$\vec{OP}=\left(r+\frac{2r}{7}, r+\frac{3r}{7}, r+\frac{6r}{7}\right)=\left(\frac{9}{7}r, \frac{10}{7}r, \frac{13}{7}r\right)$

点Pは平面①上の点であるから代入して

$2\times\frac{9}{7}r+3\times\frac{10}{7}r+6\times\frac{13}{7}r=6$

よって　$18r+30r+78r=42$，　$r=\frac{42}{126}=\frac{1}{3}$　5

/41